国家出版基金资助项目

中外物理学精品书系·前沿系列

非线性科学与斑图动力学导论

欧阳颀 著



中外物理学精品书系 · 前沿系列

非线性科学与斑图动力学导论

欧阳颀 现任北京大学物理学院长江特聘教授。1982年毕业于清华大学化学系，1983—1989年在法国波尔多第一大学攻读博士学位，后分别在美国德克萨斯州立大学奥斯丁分校、法国尼斯非线性研究所、美国NEC研究中心工作。长期从事反应扩散系统中的斑图动力学研究，并在此领域发表文章百余篇，其中3篇在Nature，1篇在Science上发表。近十年来将非线性动力学理论与方法应用于系统生物学研究。著有《反应扩散系统中的斑图动力学》。


ISBN 978-7-301-15931-6

9 787301 159316 >

定价：50.00元

国家出版基金资助项目

中外物理学精品书系·前沿系列

非线性科学与斑图动力学导论

欧阳颀 著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

非线性科学与斑图动力学导论/欧阳颀著. —北京：北京大学出版社，2010.5
(中外物理学精品书系)
ISBN 978-7-301-15931-6

Ⅰ. 非… Ⅱ. 欧… Ⅲ. 反应动力学—非线性力学—研究生—教材 Ⅳ. O643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 173873 号

书　　　名：非线性科学与斑图动力学导论
著作责任者：欧阳颀　著
责 任 编 辑：顾卫宇
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-15931-6/O・0802
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　　址：http://www.pup.cn　电子信箱：zpup@pup.pku.edu.cn
电　　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021　出版部 62754962
印　刷　者：北京中科印刷有限公司
经　销　者：新华书店
730 毫米×980 毫米　16 开本　18.5 印张　340 千字
2010 年 5 月第 1 版　2010 年 5 月第 1 次印刷
定　　　价：50.00 元

中 外 物 理 学 精 品 书 系

本书出版得到“国家出版基金”资助

《中外物理学精品书系》
编 委 会

序　　言

物理学是研究物质、能量以及它们之间相互作用的科学。她不仅是化学、生命、材料、信息、能源和环境等相关学科的基础，同时还是许多新兴学科和交叉学科的前沿。在科技发展日新月异和国际竞争日趋激烈的今天，物理学不仅囿于基础科学和技术应用研究的范畴，而且在社会发展与人类进步的历史进程中发挥着越来越关键的作用。

我们欣喜地看到，改革开放三十多年来，随着中国政治、经济、教育、文化等领域各项事业的持续稳定发展，我国物理学取得了跨越式的进步，做出了很多为世界瞩目的研究成果。今日的中国物理正在经历一个历史上少有的黄金时代。

在我国物理学科快速发展的背景下，近年来物理学相关书籍也呈现百花齐放的良好态势，在知识传承、学术交流、人才培养等方面发挥着无可替代的作用。从另一方面看，尽管国内各出版社相继推出了一些质量很高的物理教材和图书，但系统总结物理学各门类知识和发展，深入浅出地介绍其与现代科学技术之间的渊源，并针对不同层次的读者提供有价值的教材和研究参考，仍是我国科学传播与出版界面临的一个极富挑战性的课题。

为有力推动我国物理学研究、加快相关学科的建设与发展，特别是展现近年来中国物理学者的研究水平和成果，北京大学出版社在国家出版基金的支持下推出了《中外物理学精品书系》，试图对以上难题进行大胆的尝试和探索。该书系编委会集结了数十位来自内地和香港顶尖高校及科研院所的知名专家学者。他们都是目前该领域十分活跃的专家，确保了整套丛书的权威性和前瞻性。

这套书系内容丰富，涵盖面广，可读性强，其中既有对我国传统物理学发展的梳理和总结，也有对正在蓬勃发展的物理学前沿的全面展示；既引进和介绍了世界物理学研究的发展动态，也面向国际主流领域传播中国物理的优秀专著。可以说，《中外物理学精品书系》力图完整呈现近现代世界

和中国物理科学发展的全貌，是一部目前国内为数不多的兼具学术价值和阅读乐趣的经典物理丛书。

《中外物理学精品书系》另一个突出特点是，在把西方物理的精华要义“请进来”的同时，也将我国近现代物理的优秀成果“送出去”。物理学科在世界范围内的重要性不言而喻，引进和翻译世界物理的经典著作和前沿动态，可以满足当前国内物理教学和科研工作的迫切需求。另一方面，改革开放几十年来，我国的物理学研究取得了长足发展，一大批具有较高学术价值的著作相继问世。这套丛书首次将一些中国物理学者的优秀论著以英文版的形式直接推向国际相关研究的主流领域，使世界对中国物理学的过去和现状有更多的深入了解，不仅充分展示出中国物理学研究和积累的“硬实力”，也向世界主动传播我国科技文化领域不断创新的“软实力”，对全面提升中国科学、教育和文化领域的国际形象起到重要的促进作用。

值得一提的是，《中外物理学精品书系》还对中国近现代物理学科的经典著作进行了全面收录。20 世纪以来，中国物理界诞生了很多经典作品，但当时大都分散出版，如今很多代表性的作品已经淹没在浩瀚的图书海洋中，读者们对这些论著也都是“只闻其声，未见其真”。该书系的编者们在这方面下了很大工夫，对中国物理学科不同时期、不同分支的经典著作进行了系统地整理和收录。这项工作具有非常重要的学术意义和社会价值，不仅可以很好地保护和传承我国物理学的经典文献，充分发挥其应有的传世育人的作用，更能使广大物理学人和青年学子切身体会我国物理学研究的发展脉络和优良传统，真正领悟到老一辈科学家严谨求实、追求卓越、博大精深的治学之美。

温家宝总理在 2006 年中国科学技术大会上指出，“加强基础研究是提升国家创新能力、积累智力资本的重要途径，是我国跻身世界科技强国的必要条件”。中国的发展在于创新，而基础研究正是一切创新的根本和源泉。我相信，这套《中外物理学精品书系》的出版，不仅可以使所有热爱和研究物理学的人们从中获取思维的启迪、智力的挑战和阅读的乐趣，也将进一步推动其它相关基础科学更好更快地发展，为我国今后的科技创新和社会进步做出应有的贡献。

《中外物理学精品书系》编委会　主任
中国科学院院士，北京大学教授
王恩哥
2010 年 5 月于燕园

作者前言

1998年中国科学院理论物理研究所刘寄星教授约作者为郝柏林教授主编的《非线性科学丛书》(上海科技教育出版社)撰写一本小册子,介绍斑图动力学方面的研究工作.当时作者刚刚从国外回来,正好想整理一下十几年来在这方面的研究工作,于是写了《反应扩散系统中的斑图动力学》一书.那本书不但是给想要了解斑图动力学理论与实验研究工作的读者写的,也是给作者自己写的.2004年初考虑到此书过于专业,且仅有189页的篇幅,内容过于浓缩,对想要学习这方面知识的一般研究生来说有较大困难,而刘寄星教授又建议作者可否在保持原书风格的基础上,为非线性科学的学习者与研究者再写一本书,既可以作为研究生教材,也可以作为研究人员的参考书.此建议正是作者想办而没有办的事情.原因是在教学工作中,作者从学生的反馈中发现原来那本书内容过于专业,起点比较高,用作教学参考书是不合适的.本书稿就是作者在考虑到上述需求后写出的,比起原来那本书,增加了大量对基础非线性动力学理论的介绍.写作过程尽量遵从由浅入深的原则.为了避免前一本书暴露出来的问题,此书稿写出后作者用它作为主要参考资料在北京大学教了三届研究生的"非线性动力学前沿"课,反应较好.

对非线性动力学的系统研究,可以追溯到伽利略与牛顿时代人们对自然界的定量描述.伽利略研究过的摆与牛顿研究过的天体运动,都是非线性力学中的典型问题.19世纪经典力学的两大难题,刚体定点运动和三体问题,是上两个问题的继续.它们曾难倒了不少科学家,也因而推动了经典力学的发展.20世纪末庞加莱在总结整个世纪这方面进展的基础上,提出不少新的理论和方法,当前非线性科学中的很多概念和思想,都来源于庞加莱.可以说非线性科学应当从20世纪初庞加莱开始算起.20世纪上半叶促进非线性科学发展的,有数学中的微分方程定性理论和无线电技术所需要的非线性线路理论,对它们的研究结果推动了非线性振动理论这一分支的成长.近二三十年非线性科学由于计算机的广泛应用而更加兴旺.计算机不仅是数值计算的工具,也为非线性现象和理论分析提供了新的思想.促进这种发展的还有数学中动力系统理论的成长以及统计物理学中的不少成果,如重整化理论.

什么是非线性？非线性是一个数学名词，它指两个量之间没有像正比那样的"直线"关系. 自然科学和工程技术中有许多问题要用到非线性的数学模型. 比如，采用了非线性模型以后，可以说明为什么同一个前提会导致几个不同的结果，可以说明什么时候两种效应不能叠加，这两种现象会怎样彼此影响，发生耦合作用. 各门学科有各自的非线性问题：激光理论中有不少非线性光学问题；工程结构形变大的情况下要用非线性的结构力学；无线电技术中涉及非线性的振荡理论；说明化学反应中出现螺旋波的起源要用合适的非线性数学模型，等等. 但是，非线性科学并不是指包含各门学科里所有非线性的问题. 要真是那样的话，从数学的观点来看，线性是非线性的特殊情况，也可以算是非线性的一种；如果非线性科学里的"科学"是指所有学科，那么非线性科学就成为包罗一切的一门万能科学，也就什么具体问题也不能解决了. 非线性科学只考虑各门学科中有关非线性的共性问题，特别是那些无法从线性模型稍加修正（比如摄动理论）就能解决的问题. 此外，再加上它自身理论发展所要的一些概念方法等，这才是非线性科学的研究对象. 共性在很多地方表现为数学规律相同，因此数学在非线性科学里起很大作用. 但数学在这里只是作为一种说明共性的手段，非线性数学（姑且假设有这样一门学科，但一般不赞成这样的提法）只能用来解决由于非线性共性引起的某些数学问题. 而另一些非线性共性虽然确实存在，但目前还很难用数学理论来处理. 非线性科学和数学有密切关系，但不是一门数学. 从学科性质说，非线性科学不是基础应用研究，而是基础性研究.

目前，非线性科学的前沿领域大致包含以下几个方面：孤立波，混沌，分形及斑图动力学. 孤立波以及相应的孤立子的研究，是其中发展较早的一个分支. 它的发现可以追溯到 20 世纪初. 对它的理论和实验研究在 20 世纪 50、60 年代已经较多. 到今天，除了沿着它自身体系发展外，由于它在数学处理上已取得了不少经验，人们期望从中得到或了解其它非线性现象中模式形成的机理. 比如，有空间传播性能的波形不变的非线性现象，可以认为是系统中由于自组织而"降维"，在数学上和非线性振动中的所谓同宿解有关. 对其它非线性现象的理解也可能从孤立波已有的成果中得到借鉴.

混沌指一种貌似无规的运动，但支配这种运动的规律却可以用确定性的方程来描述. 上面提到的庞加莱在总结天体力学中的问题时，已经对这种现象有了认识. 到 20 世纪 50 年代，有些物理学家（如玻恩）也已明确知道经典力学中会有长期动态的不可预测性. 但混沌现象和理论开始受到重视，一般认为契机于上世纪 60 年代两件事. 一是洛伦茨在天气预报方程研究中的发现，尽管描述用的方程是确定性的，天气长期动态却是不可预测的；另一件是几位数学家证

明了有关经典力学动态的一个定理,即现在按他们的姓所称的卡姆(KAM)理论.这两件事也分别代表混沌理论两类对象和两种方法:洛伦茨的研究对象是耗散系统,这类系统和周围环境有联系和交往,它们在自然和工程中都存在;而卡姆理论的研究对象是保守系统,它们在天体研究和统计物理中常见.洛伦茨依靠的是数值计算,卡姆理论用的是严格数学推理,这两种方法在混沌理论研究里都必不可少.

分形是研究不规则形状的几何关系.人们早就熟悉从规则的事物抽象出诸如圆、直线、平面等几何概念,芒德布罗(Mandelbrot)则为曲曲弯弯的海岸线、棉絮团似的云烟找到合适的几何学描述方法——分形.早期概念中的分形要求整体与它的各个局部都相似,即具有"自相似性".正如天下没有绝对圆的东西,几何学里的圆仅存在于数学家脑袋中一样,完全自相似的分形也只是一种数学抽象.当今概念中的分形(多重分形)对自相似性作了适当的修正和推广,使分形更能接近现实的事物.这套几何工具在处理许多非线性现象时很有效.分形理论开始是在各种物理或真实例子里寻找应用,后来人们则进一步研究那些具有分形几何特征的事物具有什么样的物理规律,以及它们是如何随时间演化的.分形理论出现较晚,它的数学准备不像孤立波那样充分,目前它的数学理论和实际应用之间距离还较大,有些数学概念还得重新建立.

斑图动力学是非线性科学领域中的一个较新的分支,它的研究目的是探索诸系统之间共同存在的、具有普遍指导意义的斑图形成基本规律.对于斑图动力学的系统研究应该起始于1952年图灵对反应扩散系统的研究.图灵在其论文《形态形成的化学基础》中,从数学角度表明,在反应扩散系统中,稳定均匀态会在某些条件下失稳,并自发产生空间定态图纹.图灵在论文中试图说明,某些生物的体表所显示的图纹,如斑马身上的斑图是怎样产生的.虽然迄今为止在生物实验中还没有找到图灵斑图的直接证据,图灵的思想引发了人们在这方面的深入思考.1968年扎布亭斯基在别洛乌索夫-扎布亭斯基(Belousov-Zhabotinski,BZ)反应中发现螺旋波斑图,引发了人们对动态斑图的时空动力学行为的研究.由此开始,斑图动力学作为非线性科学的一个分支逐渐形成,并在非线性科学中占据了重要位置.

本书的目的不是对非线性的上述研究课题逐一展开讨论,而是着重介绍研究以上课题所必备的物理数学知识.在此基础上对斑图动力学问题作详细的介绍.本书分两部分:非线性科学研究与斑图动力学研究.第一部分分为六章,目的是使读者了解研究非线性问题的基本知识,并在一定程度上掌握它的研究工具.第一章是对非线性动力学研究的概述,简单介绍什么是动力系统,为什么研

究非线性动力学，及非线性科学在整个物理学中的地位. 接下来的两章通过讨论经典力学，流体力学，化学与生物学中的几个例子指出非线性问题的来源，并介绍建立数学模型的方法. 第四章对有限自由度的动力系统做分析，引出相空间，中心流形与不变流形，保守系统与耗散系统等概念，并对系统稳定性做分析上的定义. 第五章介绍非线性分析中最为广泛应用的工具：微扰分析. 重点是介绍对系统不动点的线性稳定性分析. 第六章在相空间中不动点附近做非线性分析，介绍分岔理论，并用分岔理论将非线性动力系统在不动点附近的行为进行分类，引出非线性方程的正则形式. 本书第二部分介绍斑图动力学. 第七章对斑图动力学问题作一个简单的介绍. 第八章、第九章通过讨论图灵斑图形成的机制及其演化，介绍一类由于系统的空间均匀定态在相空间中局部失稳而引发的斑图形成. 其中第八章集中讨论图灵失稳的一级分岔问题，失稳的结果是图灵斑图的产生. 第九章介绍图灵斑图的高级分岔. 图灵分岔机制是自然界广泛存在的一种斑图形成机制，目前研究比较透彻的流体力学中的斑图形成与非线性光学中的斑图形成，都与图灵分岔有关. 后面三章讨论由于系统在相空间中全局失稳导致的斑图形成. 第十章、十一章着重介绍可激发系统中螺旋波的斑图动力学. 其中第十章推导螺旋波的色散关系与本构关系，这两个关系决定了稳定螺旋波的动力学行为. 第十一章研究螺旋波的各类失稳途径及缺陷混沌的产生. 这部分工作有的已经有了定论，但大部分还在不断地探讨之中，有的问题还是非线性科学的前沿课题. 第十二章探讨双稳系统中可能出现的非平衡相变. 在这一章里主要介绍两类失稳现象：非平衡伊辛-布洛赫(Ising-Bloch)相变与化学波锋的横向失稳(transverse instability)，这两类失稳会导致系统发展出一系列时空斑图态. 第十三章研究一个特殊的非自治系统中的斑图动力学，即在周期外力扰动下系统的斑图自组织行为. 当周围外力扰动频率大约两倍于系统的本征振荡频率时，驻波斑图会自组织形成. 这类斑图最早由法拉第于一百五十年前在流体系统中观察到，现在在许多实验系统中都有发现，例如振荡沙盘系统，反应扩散系统等.

本书是作者在北京大学物理学院几年讲授非线性科学及斑图动力学中逐步形成的. 在教学过程中，作者主要参考了书末所列参考文献[1,2,3,4]所列的几本专著. 参考文献[1]对非线性科学作了系统的介绍，本书前半部分的主要结构参考于此书；参考文献[2]着重讨论非线性科学在各个学科中的应用，本书中例子的一部分来源于此专著；参考文献[3]对经典力学的分析简单明了，作者受益匪浅；参考文献[4]专门讨论非线性科学中的斑图动力学问题，作者的斑图动力学理论大部分是从此书学到的. 另外有几本书对作者了解非线性科学也甚有

帮助：如郝柏林先生主编的《非线性丛书》(上海科技教育出版社)是我国在非线性科学研究中的第一部系列丛书；参考文献[5]详细讨论了非线性科学的数学基础.

作者感谢刘寄星教授抽出时间认真阅读这个书稿，并从科学性方面、文章结构方面和文字表述方面提出一些有益的修改建议. 作者还要感谢北京大学2003—2005年随作者学习斑图动力学课程的学生们. 他们对本书的初稿进行了认真的校对，对本书出现的所有数学公式一一进行了重新推导. 没有他们的帮助和鼓励，作者是不敢将这个书稿送出去的.

欧阳颀

2006年9月

目　　录

第一章　概　　论

本章的主要目的是介绍非线性动力学的主要研究对象.首先讨论动力学方程的一般数学形式与研究动力学方程的主要工具,在此基础上讨论线性方程与非线性方程的根本区别,从而得到非线性系统的特殊性质.最后简单介绍一下非线性科学研究在整个物理学中的位置,以及非线性动力学在当下前沿领域的应用.

§1.1　动力学方程

非线性动力学是研究动力学的理论.动力学的数学表达主要分为两类:微分方程与差分方程.微分方程描述系统状态随时间的连续变化;差分方程是将时间变量离散化,研究系统状态此时刻与彼时刻之间的关系.在科学研究与工程设计中,微分方程是应用最广泛的形式,本书将主要讨论微分方程中的非线性问题.差分方程在研究混沌动力学中是一个极其有用的工具,由于本书重点不是讨论混沌动力学问题,在这里不作详细介绍.微分方程根据变量对自变量的微分形式又分两种类型:常微分方程与偏微分方程.例如,阻尼振荡方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=0 \tag{1.1.1}$$

是常微分方程,因为方程中只出现常微分项 $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$ 与 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$.也就是说,方程中变量只是一个自变量的函数.相反,在热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

中,变量 u 是时间 t 与空间 x 的函数,因此它是偏微分方程.在第一部分介绍非线性动力学基本理论的内容中,我们把注意力集中在常微分方程,偏微分方程的问题在斑图动力学部分讨论.

对于任意一个常微分方程,我们总可以将其转化为一个普遍形式:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=f_1(x_1,\cdots,x_n),\\ \vdots\\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=f_n(x_1,\cdots,x_n).\end{cases} \tag{1.1.2}$$

这里变量 $x_1,\cdots,x_n$ 可能是一个反应器中不同化学物质的浓度，生态系统中不同物种的数量，或是太阳系中不同星球的位置与速度；而函数 $f_1,\cdots,f_n$ 由不同问题的动力学性质决定. 例如，对于阻尼振荡方程(1.1.1)，可以经过这样的变量代换写成(1.1.2)的形式：令 $x_1=x$；$x_2=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$，这样就有：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_2,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{b}{m}x_2-\dfrac{k}{m}x_1.\end{cases}$$

此动力系统是一个线性系统，因为在方程右端所有变量 x_i 的表现形式都是一次的，因此函数 f_i 在相空间中是一条直线. 如果方程的右端存在高次项，则该方程就是一个非线性方程. 典型的非线性项是变量的乘积，高次幂或函数，如 x_1x_2，x_3^3，或 $\cos x_2$ 等，例如单摆运动由以下方程决定：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{L}\sin x=0.$$

这里 x 是单摆偏离垂直线的角度；g 是重力加速度；L 是单摆的长度. 此系统可以通过变换成为如下非线性方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_2,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{g}{L}\sin x_1.\end{cases}\tag{1.1.3}$$

在以上方程中，方程的右端都不显含时间，这类方程叫自治系统(autonomous system). 如果方程右端是显含时间的，则该系统被称为非自治系统(nonautonomous system). 对于非自治系统，也可以通过变换将其动力学方程转化为(1.1.2)的形式，例如受迫振荡系统

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=F\cos t,$$

通过变换：$x_1=x$，$x_2=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$，$x_3=t$，方程变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_2,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{m}(-kx_1-bx_2+F\cos x_3),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}=1.\end{cases}$$

这是一个三变量常微分方程组. 一般来讲，任意一个 n 阶单变量常微分方程可以化为一个 n 变量一阶常微分方程组；任意一个 n 阶 m 变量常微分方程组可以

化为一个最高不超过 $n\times m$ 个变量的常微分方程组. 对于非自治系统,变量的个数要加 1. 这里要指出的是方程(1.1.2)是没有记忆的. 对于有记忆的动力系统,方程的基本形式是微分积分方程. 对于这类系统的讨论会在以后遇到它时另作介绍.

将一个常微分方程变为方程(1.1.2)的形式并不是因为该方程的解析形式更容易得到,其实将一个常微分方程变为(1.1.2)的形式并没有改变解方程的困难程度. 用这种形式的优越性在于我们可以在相空间中定性地讨论问题. 以双变量常微分方程组为例,假设我们已经知道变量 x_1, x_2 随时间变化的解 $x_1(t)$, $x_2(t)$,如果我们以坐标(x_1, x_2)构造一个抽象空间,那么解($x_1(t)$, $x_2(t)$)在一个初始条件下的变化就对应于这个抽象空间的一条曲线(见图1.1),这条曲线被称为这个抽象空间的一条轨迹;而这个抽象空间被称为系统的相空间. 由于在相空间中的每一点都可以成为一个初始条件,相空间会被轨迹充满. 在这个框架下,非线性动力学研究的问题变成给定一个系统,找出系统在不同初始态下的轨迹,从而提取出系统的动力学行为的信息. 在许多情况下,用简单的几何学的推理就可以得到轨迹的一般性质,而不需要对此动力学系统做精确解. 这就是将一个常微分方程化为(1.1.2)形式的最大好处,我们将在第三章对此进行深入讨论.

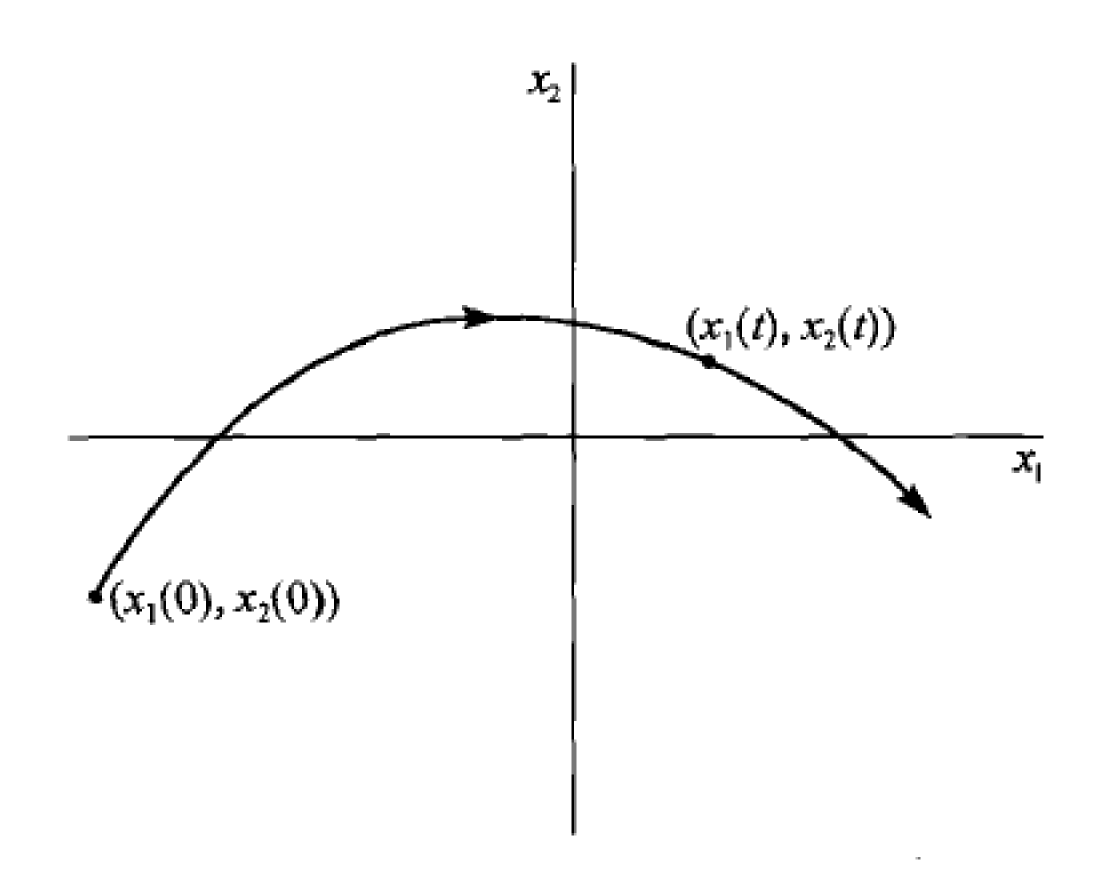


图 1.1 系统在相空间的演化轨迹

对于偏微分方程,例如上面提到的扩散方程,除了线性偏微分方程外,目前还没有一个很好的定量理论. 研究此类方程的一般计算方法是将空间分成许多等间隔或不等间隔的小格子,用格子顶点的变量随时间的变化近似描写整个系统的动力学行为. 这样的近似可以将一个偏微分方程变换为一个常微分方程组,以一维扩散方程为例,方程可以近似变换为

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} \approx \frac{D}{(\Delta x_i)^2}\ (u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i).$$

其中 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ 是格点的距离；u_i 是变量在格点上的值. 如果将空间分为 $n-1$ 个格子，则该方程可以近似看成一个 n 变量的常微分方程组. 很显然只有当 $\Delta x_i \to 0, n \to \infty$ 时，这个常微分方程组才能完全等效于原偏微分方程. 从这个意义上讲，偏微分方程是无穷多维的常微分方程系统.

§1.2　非线性问题

经典动力学理论的基础起源于古希腊的一个很有吸引力的简单假设. 它的主要思想是，一个由外部条件限制的物理系统将会沿着一个唯一的轨迹演化；当外部条件发生一些微小变化的时候，系统随时间变化的轨迹也会有一个相应的微小的改变. 这个思想隐含着两个基本观点：第一，对一个物理系统的实验是可重复的；第二，自然现象是可以预见的. 这个思想长期以来是科学家研究自然所信奉的真理. 定量的动力学系统研究起源于 17 世纪. 1666 年牛顿发现万有引力的平方反比定律. 为了用万有引力定律定量解释天体运动轨迹，牛顿在后来的 18 年中发现了三条动力学定律，即牛顿三定律，发明了微积分的数学研究方法，并在 1684 年发表了他的著作《自然哲学的数学原理》. 在这部著作中牛顿解释了开普勒从实验数据观察得到的三个行星运动定律，由此开创了动力学的定量理论. 牛顿的工作加深了人们对古希腊思想的信任程度，使人们更加相信所观察到的自然现象都可以用一个简单的自然定律，或简单的自然定律的集合加以解释. 而这些定律都有简单的比例关系，掌握了这些定律就可以预见未来. 到 18 世纪拉普拉斯把这个思想推到了顶峰. 当拿破仑读了他的新书《天体力学》后问他："上帝的位置在哪里?"拉普拉斯斩钉截铁地回答说："我不需要这个假设!"其实拉普拉斯是太乐观了. 比如，现代计算技术的发展可以使人们利用牛顿定律预测 1000 年以后的天体运动轨迹，但目前最大的计算机还不能预测几小时以后一个龙卷风的确切位置. 困难的关键是描述龙卷风的数学方程是一个有耗散的非线性不可积系统，会出现混沌.

引发对这个古希腊思想重新思考的第一个人是法国数学家庞加莱. 当时的瑞典与挪威的国王奥斯卡二世悬赏证明在多个质点组成的引力系统中，每个质点的运动轨迹都是和谐的、可预测的，并且是稳定的. 对两质点的运动方程，即二体问题，牛顿已经成功地解决了. 利用牛顿的引力定律，中心立场作用下的二体问题由如下动力学方程决定：

$$
\begin{cases}
M\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t^2}=-\boldsymbol{F}, & (1.2.1\mathrm{a})\\[2ex]
m\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F}. & (1.2.1\mathrm{b})
\end{cases}
$$

初看起来求解此方程是相当困难的：由于两个质点在三维物理空间运动，而完整地描述一个质点的运动需要 3 个位置变量和 3 个速度分量，所以该方程有 12 个变量．这时我们称系统有 6 个自由度，分别描述两个质点不同的位置变量．借助于牛顿的各种守恒定律可以将系统的自由度降下来．首先，因为引力作用在两个质点的直线上，一旦它们的运动被设定在某个平面上，两个质点将永远在此平面上运动．因此对每个质点来讲只需要两个变量和两个速度分量，共 8 个变量．进一步，线性动量，即质量与速度乘积的总和是守恒的，因此质心不随质点位置发生改变，我们只需要刻画质点间的相对位置，从而系统简化为两个位置变量和两个速度分量，即两个自由度．最后，由于没有转矩的作用，系统的角动量也是守恒的，因而旋转运动与径向运动是相互关联的．这使方程可以简化为仅有两个变量，这样的系统就成为只有一个自由度的可积系统了．具体的运算过程如下（见图 1.2）：首先将方程（1.2.1）两式相加

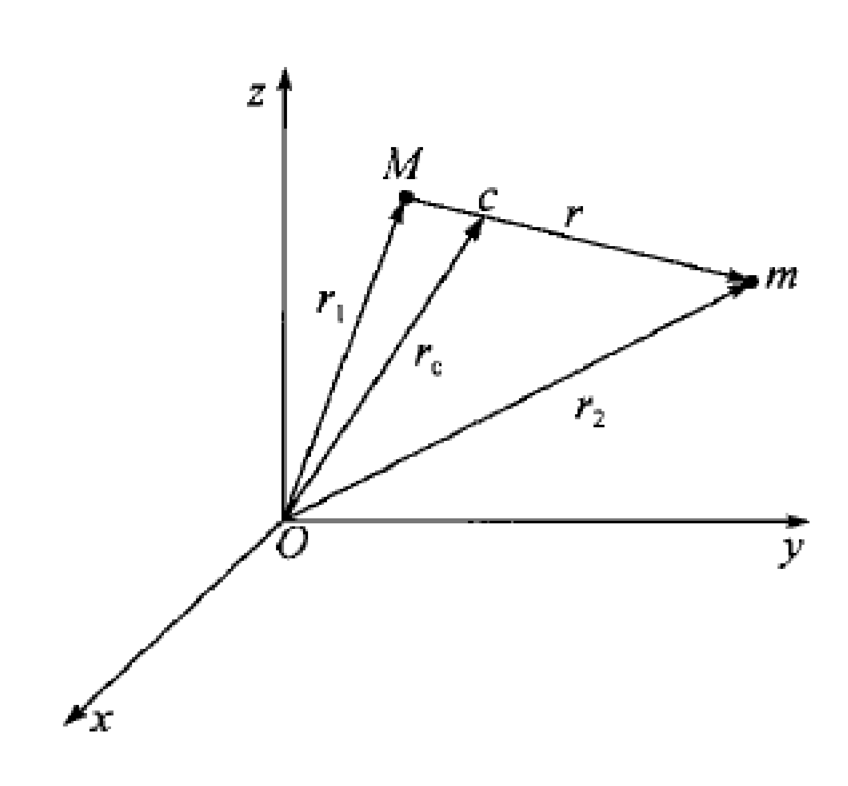


图 1.2　二体中心力场问题

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(M\boldsymbol{r}_1+m\boldsymbol{r}_2)=0.$$

定义质心

$$\boldsymbol{r}_c=\frac{M\boldsymbol{r}_1+m\boldsymbol{r}_2}{M+m}.$$

质心的运动方程为

$$(M+m)\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_c}{\mathrm{d}t^2}=0.$$

解得$\boldsymbol{v}_c=\mathrm{const}$．由于两个质点与质心在同一条直线上，当质点 m 相对于质心运动时质点 M 相对于质心作相反方向的运动．再将方程（1.2.1）作变换：$M\times$（1.2.1b）$-m\times$（1.2.1a）得

$$mM\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)=(m+M)\boldsymbol{F}.$$

令 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$ 并定义折合质量 $\mu=Mm/(M+m)$，方程(1.2.1)变成可积系统

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_c}{\mathrm{d}t^2}=0,$$

$$\mu\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F}.$$

对于三体以上的中心力场问题，一般情况下方程无法变为可积系统，情况就变得异常复杂.这在国王奥斯卡二世的悬赏公告上可以看到：

> "具有任意多个质点的系统，其中两点间的作用力满足牛顿定律，在任意两个质点不发生碰撞的条件下，试给出每个点的坐标以时间的某个已知函数作为变量的级数表示，并证明对于所有的取值，该级数是一致收敛的.
>
> 这一问题的解答无疑将扩充我们对太阳系的理解，它看起来可以利用目前由我们支配的解析方法来解决；至少可以这样假设，由于狄力克来在去世前不久写给他的一个熟人几何学家克罗内克的信中，称自己发现了一种可以对力学中的微分方程进行积分的方法，他应用这种方法从绝对严格的意义上成功地给出了太阳系稳定性的证明.遗憾的是，除了小振动理论可能作为这项发现的出发点以外，我们对此方法一无所知.但是我们几乎可以确信这种方法不是建立在冗长而复杂的计算基础上，它是从某种简单而基本的思想发展而来的，通过持续不断的深入研究人们有希望重新发现它.
>
> 即使在这次竞赛结束时这个问题还没有被解决，奖金仍然将颁发给完整地阐述和解决了力学中其他问题的研究者."

庞加莱发明了一套全新的方法冲击三体问题.他的主要思路是从强调完全定量的解析解退到定性的分析.基于几条看来简单的基本假设，庞加莱认为自己证明了三体问题，发表了论文并得到了奖金.但他在检查他的证明结果时发现其中一条基本假设不成立，并举出了反例.结果他用得到的一部分奖金收回了所有已出版的论文并付之一炬.在此过程中庞加莱对动力学理论作出了两个重要贡献：第一，证明了三体系统中的质点轨迹可能是混沌的；第二，发展了一套有效的方法来研究非线性动力学问题.

从上面的叙述可以看到，非线性不可积系统可能存在非常复杂的动力学行为.在一般情况下怎样处理这类问题呢？回到前面提到的单摆问题.单摆方程(1.1.3)中的非线性项使得得到方程的解析解变得非常困难.绕过这个困难的一个通常有效的方法是小角度近似，当 $x\ll 1$ 时 $\sin x\approx x$，这使得非线性方程可以近似地用一个线性方程表示，而线性方程是很容易得到解析解的.但是将变

量 x 限制在远小于 1 的范围内使我们不能了解系统动力学的全貌，比如单摆围绕顶点绕圈的现象. 一般来说，严格满足线性关系的系统在自然界是不存在的，这种关系只能在自变量的一定范围内成立. 对于许多系统，人们可以对它的动力学关系作线性近似而得到令人非常满意的结果. 从而线性近似方法在工程计算中得到了广泛应用. 然而，对另外一些系统，线性近似往往无济于事，甚至导向一些荒谬的推论. 其中，流体力学系统是一个典型的例子. 描述流体运动的纳维-斯托克斯(Navier-Stokes)方程是一个非线性方程：

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=-\nabla p+\nu\nabla^2\boldsymbol{u}.$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 与 p 分别是 t 时刻流体在点 $\boldsymbol{r}$ 处的流动速度与内压力，ν 是流体的黏度系数. 从原则上说，人们必须将此方程在一定初始条件与边界条件下完全求解，才能了解流体系统在这些条件下的所有动力学性质. 这在一般情况下是不可能的. 即使证明该方程解的唯一性也是本世纪七大数学难题之一. 美国的 Cray 研究所设立了一百万美元的奖金以求在本世纪找到对此问题的答案. 如果我们忽略难缠的非线性项 $(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$，则解上述方程将变得十分容易，但它也会得出一些明显违背实验的结果. 例如，在一些很自然的边界条件与初始条件下，一条普通的河流里流体流动的速度可能达到 100×10^4 km/h；一部功率为 75 kW 的轿车可能达到 2000 km/h 的时速等. 出现错误的原因是当流体做高速运动时，其运动方程的非线性项远大于线性项，在这种情况下忽略非线性项显然是不合理的. 对于所有非线性科学所关心的问题，其动力系统的非线性项都是起主导作用的. 如果这些动力系统的非线性都可以被忽略，非线性动力学就没有存在的必要.

线性系统与非线性系统最主要的区别在于问题的解是否可以叠加. 对于一个线性系统两个不同原因产生的结果可以简单叠加，因而一个线性系统可以被分解成许多部分，将各个部分分别解决后重新组合起来，就得到了原问题的解. 在此前提下人们发展了许多有用的计算方法使解决线性问题程式化. 最有效、最常见的方法包括拉普拉斯变换与傅里叶变换. 而对于一个非线性系统，在一般情况下不允许将问题分成许多部分去研究，然后再简单叠加起来得到原问题的解. 不同原因叠加后会产生新的结果，出现新的性质. 例如相变(phase transition)，多重性(multiplicity)，斑图形成(pattern formation)，确定性混沌(deterministic chaos)等.

对于单摆方程(1.1.3)，我们可以用椭圆函数方法幸运地找到它的解析解的一般形式. 但对于绝大多数非线性方程问题，我们就不那么幸运了. 非线性动

力学的研究目的就是在不知道方程解析解的情况下，通过对系统进行各种非线性分析，得到关于系统动力学行为的有用信息. 值得指出的是，非线性科学发展到今天也只是在初级阶段；人们已经发展出了一套有效的规范化程序对一般非线性系统的局部行为进行分析. 从这个角度讲，非线性系统的局部分析已经到达了“公式”化，“工程”化的阶段. 但是在大多数情况下，刻画非线性系统的全局性动力学行为还没有规范化的工具. 研究非线性系统的全局性动力学行为还在探索阶段. 有限的几个情形属于稀如凤毛麟角的“手工艺品”. 从这个角度讲，这方面的研究带有创新性、艺术性. 本书的重点是介绍研究非线性动力学的规范化工具，对于创新性的课题，在合适的情况做一定讨论，但不可能全面介绍.

§1.3 物理世界的动力学问题

在初步介绍了相空间与非线性系统的概念后，我们可以将研究物理世界会碰到的问题进行一个大致的分类. 图 1.3 给出了这种分类的一个大致框架，它同时标出本书的研究对象在物理学研究的位置. 此框架有两个轴：横轴是描述一个系统的动力学特征所需要的变量数，在相空间表达中它是相空间的维数；纵轴告诉我们所研究的对象是线性的还是非线性的. 每一个物理学的典型问题都在这个两维的框架中找到一个位置. 例如，无限制人口增长问题可以用一个单变量线性方程描述：$dx/dt=rx$，这里 x 是人口数量；r 是增长率. 这个系统在框架中的“坐标”是“($n=1$，线性)”. 对于单摆问题方程(1.1.3)，它的“坐标”是“($n=2$，非线性)”. 我们可以将所有研究的物理问题，以适当的判断放入这个框架中. 图 1.3 就是一种分配结果. 当然，有些物理问题的位置是否合适，存在争议，人们可以认为一些物理问题放错了位置，或应该加入新的坐标去反映物理研究的实际情况. 图 1.3 的做法只是将系统的动力学行为作为研究对象而画出的.

框架图 1.3 有明显的规律. 首先，所有的简单问题都在框架的左上方. 这些是我们在头两年大学课程中所接触到的问题. 笼统地说，当 $n=1$ 时，这些线性问题描写生长、衰退与平衡；在 $n=2$ 时描写振荡行为. 图中用黑体字标出的物理问题代表一大类现象，例如 RC 电路问题代表一类 $n=1$ 的线性系统，它不会出现振荡现象；RLC 电路代表一类 $n=2$ 的线性问题，它会出现振荡. 另一类大学中已经比较熟悉的问题出现在框架的右上方. 这是经典应用数学与经典数学物理方法所处理的问题，线性偏微分方程. 在这里我们可以找到麦克斯韦方程组，热传导方程，以及描述量子力学的薛定谔波动方程. 我们曾说明过，这类偏微分方程可以看成是无穷维的常微分方程组.

变量数目 →

	$n=1$	$n=2$	$n\geqslant3$	$n>>3$	连续
线性	**增长、衰减、平衡**	**振动**		**集体现象**	**波动与斑图**
	指数增值 *RC* 电路 放射性衰减	线性振子 质量与弹簧 *RLC* 电路 二体问题 (Kepler, Newton)	土木工程结构 电子工程	耦合的哈密顿振子 固体物理 分子动力学 平衡态统计力学	弹性 波动方程 电磁学 (Maxwell) 量子力学 (Schrödinger, Heisenberg,Dirac) 热与扩散 声学 黏性流体
非线性			**混沌**	前沿	**时空复杂性**
	稳定点 分叉 过阻尼振荡系统 弛张动力学 单种群的 Logistic 方程	垂摆 非哈密顿振子 极限环 生物振子 （神经元,心脏细胞） 捕食与被捕食循环 非线性电子学 (Van del Pol, Josephson)	奇异吸引子 (Lorenz) 三体问题 (Poincaré) 化学动力学 迭代映射 (Feigenbaum) 分形 (Mandelbrot) 非线性强迫振子 (Levinson, Smale) 混沌学的应用 量子混沌	耦合的非线性振子 激光，非线性光学 非平衡态统计力学 非线性固体物理（半导体） Josephson 列 心脏细胞的同步化 神经网络 免疫系统 生态系统 经济学	非线性波（震动，孤立子） 等离子体 地震 广义相对论 (Einstein) 量子场论 反应扩散，生物与化学波 纤维性颤动 癫痫症 湍流 (Navier-Stokes) 生命

图1.3 典型动力系统框架图

与上两类物理问题形成对照的是框架的右下方，即非线性的部分. 这里列出的问题经常被物理教科书所“忽略”，原因不是这些问题不重要，而是在研究这些问题时，需要找到看问题的新角度，发展新的物理思维方法，开发新的研究工具. 而这些方法与工具是近几十年来才完善起来的. 本书的目的就是对近几十年在这方面的发展做一个简单、系统的介绍. 我们将从框架的左下角开始，并系统地向框架的右下角移动. 当我们从一维相空间到三维相空间移动时，在每一步都会遇到新的现象：当 $n=1$ 时有多重定态问题与分岔现象；当 $n=2$ 时出现非线性振荡与极限环；当 $n=3$ 时出现混沌与分形. 在这些分析中，几何分析将被证明有特殊的功能. 它会在得不到方程精确解的情况下给出非线性系统的大部分动力学信息，特别是渐近态行为的信息.

框架图中的虚线标出了非线性科学的前沿领域. 虚线内的大部分问题人们并没有完全研究清楚，它们构成了非线性科学研究的核心. 这些问题通常非常困难，因为它们既是高维的又是非线性的. 在本书的后半部分将着重分析这类问题的一个特例：反应扩散方程. 将这个问题彻底研究明白，对非线性科学家来说在今后很长一段时间内是一个挑战.

第二章　自然界中的非线性行为

非线性科学是传统科学分类的一个剖面.本章的目的是表明非线性现象是如何在众多的自然现象中产生出来的.这里不可能穷举所有非线性系统的典型例子.只是从经典力学、流体力学、化学与生物学中抽出一些系统进行分析.在介绍非线性动力学的早期阶段,我们只是从常识出发,定性地对所研究的系统进行分析.在以后的各章中再引入各种定量分析的方法.希望这种循序渐进的方式能使读者深入了解非线性动力系统的实质.在分析中会逐步介绍一些非线性科学常用的术语,如稳定、失稳、临界现象、分岔、相变、对称、对称性破缺、斑图形成、斑图选择等.这些术语的定量意义将在以后各章中逐渐出现.

§2.1　经典力学中的非线性行为

非线性行为在经典力学中随处可见.本节利用一个简单的力学系统——旋转铁环——来显示非线性现象的普遍存在性.对这个系统的讨论可以追溯到四十多年前[6,7].如图 2.1 所示,考虑一个在重力场下的半径为 r 的刚性圆环.一个质量为 m 的圆球在初始时被置于偏离垂直线 θ 角的环上,并允许其在环上作无摩擦的自由运动.当整个圆环处于静止状态时,如果小球初始位置 $\theta_0\neq0$,小球将在环上以 A 位置为中点做周期性运动;当 $\theta_0=0$ 时,小球会在 A 位置永远

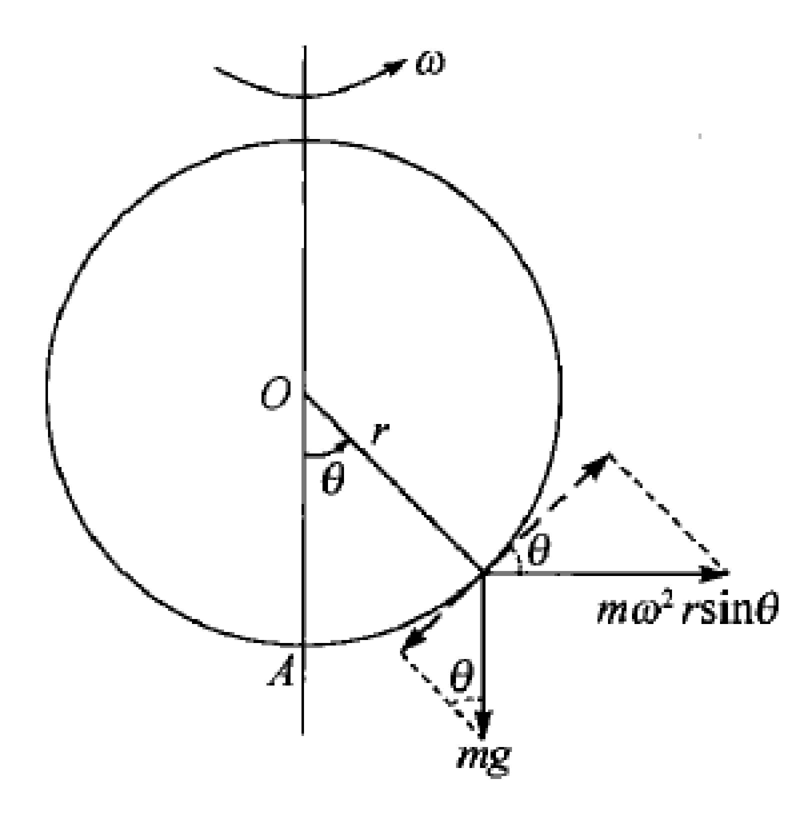


图 2.1　在铁环中的小球运动受力图

静止地停留下去. 在这个简单的装置中，A 位置被称为平衡位置. 现在令圆环在外力作用下以过 O 点的垂线为轴匀速转动，其角速度为 ω. 实验证明，当 ω 很小时小球仍然会以原来的平衡点 A 为中心作振荡运动或静止于 A. 但是当 ω 超过一个临界值(critical threshold)时，原来的情形会被彻底改变. 小球会以新的平衡点为中心做振荡，或静止于新的平衡点上，此平衡点与垂线方向有一个非零的夹角 θ. 实际上在这种情况下，系统存在两个平衡点：θ 与 $-\theta$，对称地位于原平衡点 A 的两端. 系统对这两个平衡点没有特别的偏好：在一次实验中小球可以处于两个平衡点中的任意一个，在另一次实验中它可能会跑到另一个平衡点. 但在一次实验中小球只能选择一个平衡位置. 对于观测者来说，这是一个在对称物理环境下小球做出的一个非对称选择. 此现象被称为**对称破缺**(symmetry breaking). 对于这个特定系统来说，系统的关于垂直线的镜像对称发生了破缺. 系统的这种突变性质可以非常简单明了地用一个**分岔图**(bifurcation diagram)表示. 图 2.2 表示该系统的动力学分岔图. 系统状态的特征可以用平衡位置 θ 表示，它的值在图的纵坐标上标出. 图的横坐标是系统的控制参量 ω. 平衡状态随系统的控制参量 ω 的变化构成分岔图. 从图中看出，当控制参量 ω 小于 ω_c 时，系统只存在一个平衡位置(图中的(a)分支)；当控制参量 ω 大于 ω_c 时，该平衡态将变得不稳定因而不能保持，在图中用虚线标出((a')分支). 与此同时，两个新的平衡态产生，图中(b_1)，(b_2)分支表示这两个新平衡态. 当 $\omega=\omega_c$ 时，(b_1)，(b_2)，(a)，(a')分支会合；当 $\omega>\omega_c$ 时，(b_1)，(b_2)与(a)，(a')分离. 这种分岔被命名为叉形分岔，它是非线性动力学中最基本的分岔形式之一.

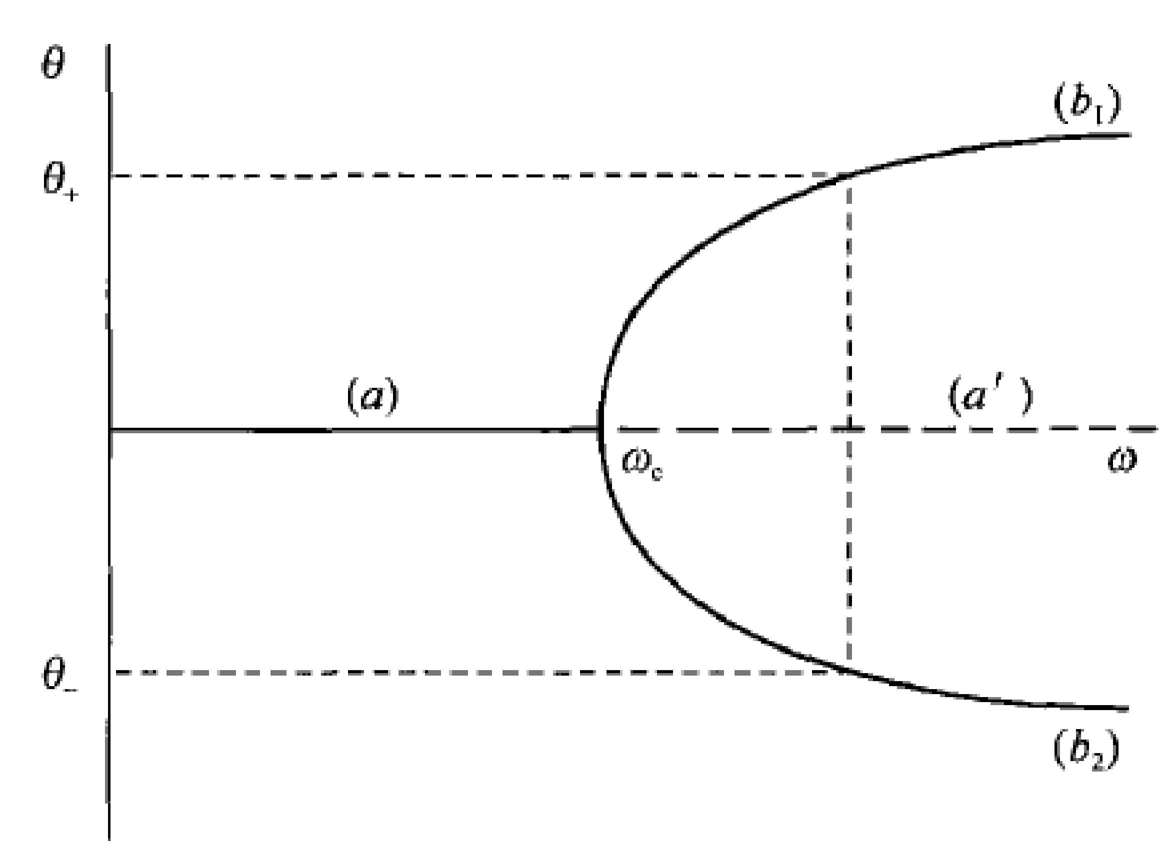


图 2.2 叉形分岔图

小结一下对上面这个简单力学系统的定性分析给我们的启示. 当系统的控制参量越过一个临界值时，这个非线性系统对变化的响应出现完全不同于

前面一章提到的变化-响应成比例关系的简单图像. 其中最大的差别在于这个非线性系统对变化的响应出现了多重态. 当控制参量 ω 逐渐变大时, 系统会自发地从围绕一个单一平衡点做单摆运动跃变到以新的平衡点做单摆运动. 而这个新平衡点可能是许多新平衡点中的任意一个. 对于同样的物理系统由于它的历史不同, 在同样控制条件下会表现出不同的行为.

通过简单的力学定性分析可以很快明白上述系统的动力学行为. 小球的运动受两个因素支配: 重力(mg)趋向使小球向下运动至平衡位置 A. 而离心力 $m\omega^2 r\sin\theta$ 趋向使小球保持在离开平衡点 A 的位置. 可以想象, 离开平衡点 A 的趋势会随着控制参量 ω 的增加而变强. 我们在下一章的定量分析中, 会对此系统做深入的研究. 值得强调的是, 以上分析得出的动力学特征并不只是局限于这个简单的力学系统, 它是诸多非线性系统的原型之一, 表现了一类非线性系统的共同特征. 如果再在这个系统中加上另一些控制参量, 例如令圆圈的半径随时间周期变化: $r=r_0+r_1\sin\Omega t$, 在某些条件下该系统会表现出非周期振荡现象, 并出现混沌运动. 由于描述该系统的动力学方程是确定性的(见下章), 此行为被称为确定性混沌. 同样的动力学行为会出现在耦合的单摆运动以及天体力学中的三体问题上. 在电路上也会出现类似现象. 对于电路系统实际上可以从它们的动力学模型中看出, 因为支配两个系统的物理定律可以相互映射: 质量向电感映射, 位移向电荷映射, 恢复力映射为电容的倒数, 阻力映射为电阻, 一个刻画机械系统的数学方程就变成了一个刻画电路系统的数学方程了.

§2.2　热对流

热对流是起因于温度不均匀性的流体宏观运动. 在自然界存在着许多热对流现象. 比如, 在很大程度上决定短期气象的大气环流与海洋回流; 决定地球板块运动的地幔对流等. 在本书中我们只关心实验室尺度的对流现象, 下面要介绍的可控性实验是法国科学家贝纳尔(Bénard)第一个发明的. 尽管实验装置很简单, 它产生的动力学行为却非常丰富, 成为非线性科学分析中经常引用的例子. 图 2.3 是实验的示意图. 观测对象是位于两块导热平行板间的流体, 流体受重力作用. 两块平板通过外部条件控制保持不同的温度 T_0, T_1, 通过对底板加热使 $T_0\geqslant T_1$. 当 $\Delta T=T_0-T_1=0$ 时, 流体经过一个或长或短的暂态过程最终会达到热力学平衡态. 在这种状态下流体在宏观上是等温、等密度的, 我们观察不到任何流体的宏观运动. 现在用温差 ΔT 作为控制参量研究这个物理系统, ΔT 的作用就像 §2.1 中角速度 ω 起的作用一样. 当温差不为零时, 系统在外力

下偏离热力学平衡态，开始有热传导过程.这时流体的温度不再是均匀的，它在沿垂直方向有一个线性分布.但是当温差很小时，流体还是没有宏观运动，它在水平方向的分布还是等温、等密度的，也就是说系统还保持由外界条件(平板)规定的对称性.

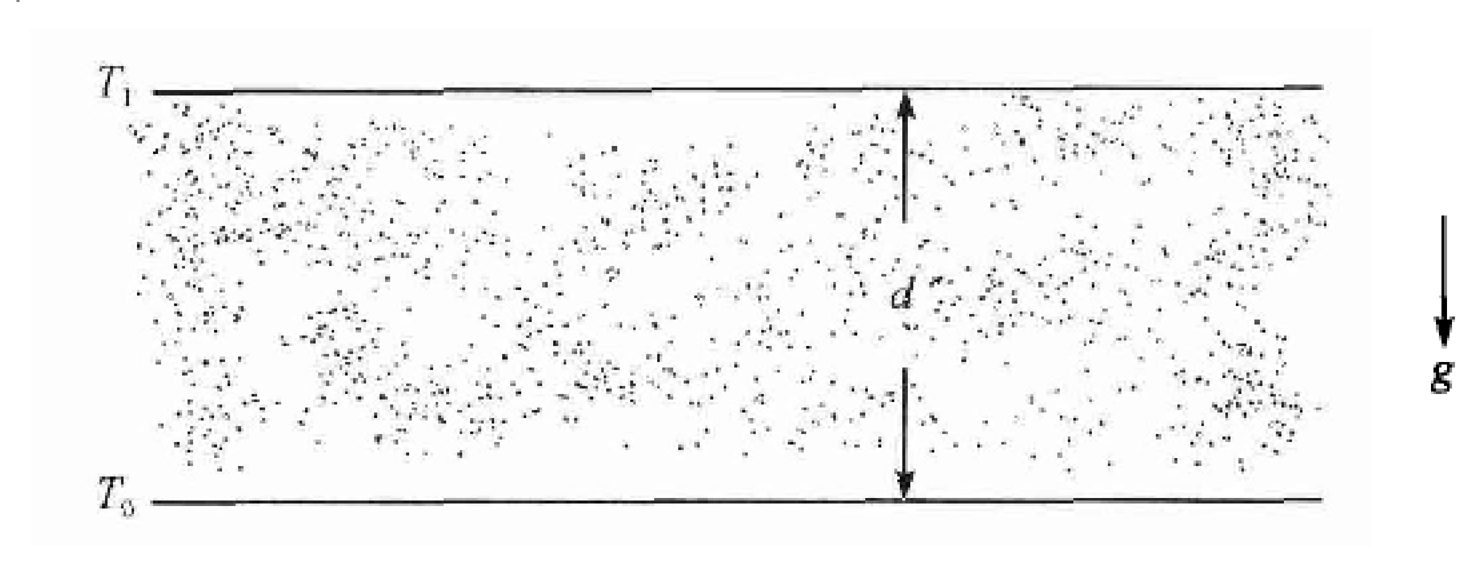


图 2.3 贝纳尔实验系统示意图

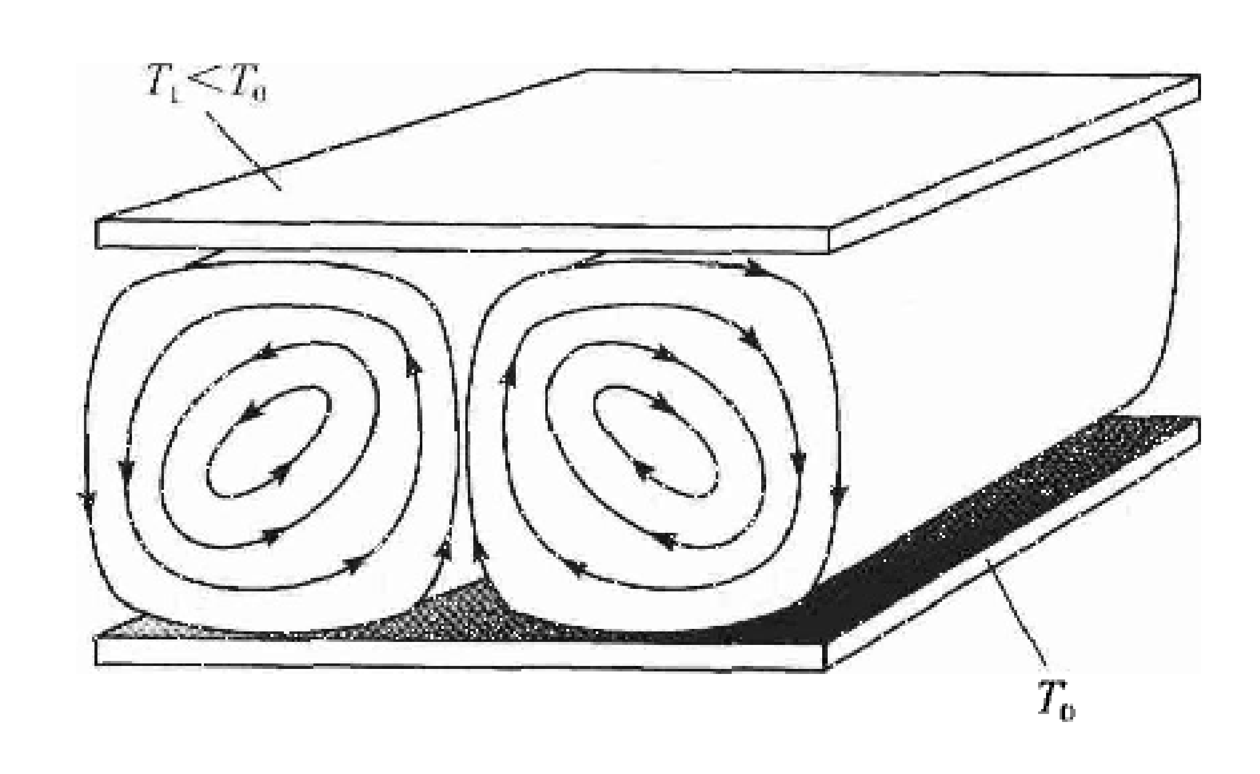


图 2.4 贝纳尔对流胞

当温差 ΔT 超过一个临界值 ΔT_c 时，情况就完全不一样了：平板中的流体开始了宏观运动，并自组织出一个个非常有序的对流单元，如图 2.4 所示.这些对流胞被称为贝纳尔胞.在一个对流胞中，流体有序地在胞的一侧从底向上流动，到达顶部时再从另一侧由上向下运动.如果这个胞内的流动方向是顺时针方向的话，它邻近胞内的流体一定沿逆时针方向流动，见图 2.4.每一个胞的特征尺度由板间的距离决定，它大致等于板间距.注意到尽管流体在运动，但对于系统中每一点来说，流体的流速、温度与密度不随时间变化而变化.因此，该状态被称为非平衡热力学定态.由于两个相邻的对流胞中流体的流动方向是相反的，在一个很小的体积内流体可以向下运动，也可以向上运动.给定体积内的流体向何方向流动，在临界点上是随机的，没有一个控制参量可以指导给定小体积的流动方向.很显然系统出现了双重态.在一个特定实验中，这个小体积会在

两个方向中随机挑选一个流动方向，正像上节讨论圆环系统的情形一样. 我们又遇到了对称性破缺现象. 这次的对称性破缺是破坏了与转动相连的系统手征对称. 从整体角度讲，系统还出现了平移对称性破缺. 因为在临界温度到达以前，观测者可以在水平方向对系统做任意尺度的移动. 假设系统在水平方向可以无限延展，观测者观察到的系统状态不会因这样的平行移动而改变，也就是说，在控制参量到达临界点以前系统具有平移对称. 在控制参量到达临界点以后，对流胞的出现破坏了这种对称；观测者为了保持同一个系统状态不能对系统进行任意尺度的平移，而只能做两倍于对流胞尺度的平移. 显然这种对称比前一种为低. 这种平移对称性破缺可以类比于经典热力学中的液-固相变. 在液态，物质保持各向同性与旋转对称；在固态这种对称被打破，物质变成了对称性较低的晶体状态. 液-固相变与贝纳尔胞出现之间的不同是，前者的对称性破缺是在微观尺度上的，特征尺度是一个分子的距离，它的出现可以用热力学中的自由焓解释；后者是在宏观尺度上的，特征尺度是毫米以上的距离，它的出现必须用非线性动力学的非平衡相变解释. 在某种意义上贝纳尔对流胞也可以看成是一种全新的宏观"耗散"晶体结构，我们也可以根据它们的空间对称性来分类. 比利时学派的科学家的确如此做了，并且的确得到了一些有趣的结果[8].

对贝纳尔对流现象可以做一个定性的解释，图 2.5 是解释的示意图. 在贝纳尔实验系统中的流体受两种力支配：重力与浮力. 由于热膨胀的原因，在一个有温差的系统中流体在不同位置上的密度是不一样的：靠近底部的流体由于温度较高其密度较低，靠近顶部的流体由于温度较低而密度较高. 这使得系统产生一个密度梯度来抵消温度梯度的影响，但这种结构是不稳定的. 考虑在系统底部的一个小体积内流体的行为. 想象由于一个很小的扰动使得这个小体积稍微向上挪动了一下，在实际情况中这种小的扰动是不可避免的. 如果热传导速度不够快的话，这个小体积内的流体温度就会比它临近的流体温度高. 在一个相对冷因而密度相对高的环境里，这个小体积内的流体会在浮力的作用下向上

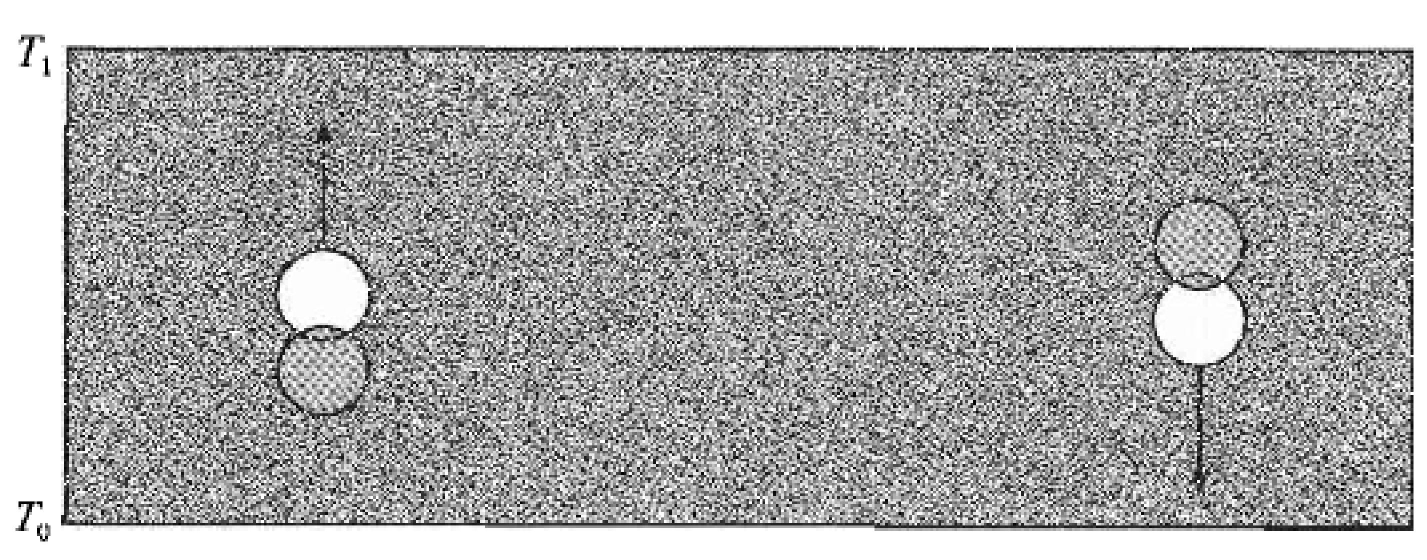


图 2.5　贝纳尔对流失稳的定性解释

运动，这种运动使小体积的流体到了一个更冷、密度更大的环境里，因而更使它向上运动，见图 2.5. 再来考虑这个小体积在受到一个向下扰动的行为. 这种向下扰动会使小体积内的流体进入一个较热、密度较低的环境，在重力作用下它会向下运动，并一直向下走下去，见图2.5. 因而原则上讲在有温度梯度的情况下流体不可避免地会出现宏观对流现象. 之所以流体没有在很小的温度梯度下马上表现出宏观运动，是由于这种失稳因素被一些稳定因素所平衡. 这些稳定因素包括使流体间运动产生摩擦阻力的流体黏度，使小体积与其环境之间温差消失的热传导等. 这些因素随温度变化不大，因而只能在一定程度上克服温差引起的失稳. 当温差大到一定程度时，稳定因素就不能平衡失稳因素，系统开始进入热对流状态. 这样就解释了试验观察到的临界值 ΔT_c.

与 §2.1 相似，我们可以将以上分析所得的信息总结在一张分岔图中. 图 2.6 就是这样一张分岔图. 表示系统状态的参量是一个小体积内流体的垂直流动速度分量 w. 而控制参量是温差 ΔT. ΔT 在超过临界值 ΔT_c之前，整个流体不存在宏观运动，因而 $w=0$；当 ΔT 超过 ΔT_c时静止分支失去稳定性，系统的流体开始作宏观运动. 对一小体积内的流体而言我们可能观察到流体向下($w<0$)或向上($w>0$)运动，这种流动状态的两个分支在 $\Delta T=\Delta T_c$时与静止态的分支汇合，在 $\Delta T > \Delta T_c$时向两端分岔. 我们看到尽管上节研究的系统与本节研究的系统是完全不同的，但它们在临界点附近的行为却有很大的相似性：在两个例子中伴随非线性行为而产生的多重态，都会随控制参量超过临界值而出现. 新出现的状态与原来的状态有质的区别，它们具有较低的对称性，因而这些突变过程都伴随着对称性的破缺. 我们将在以后看到这类分岔现象在许多不同的动力学系统中都存在，它们在临界点附近的分岔行为都是类似的.

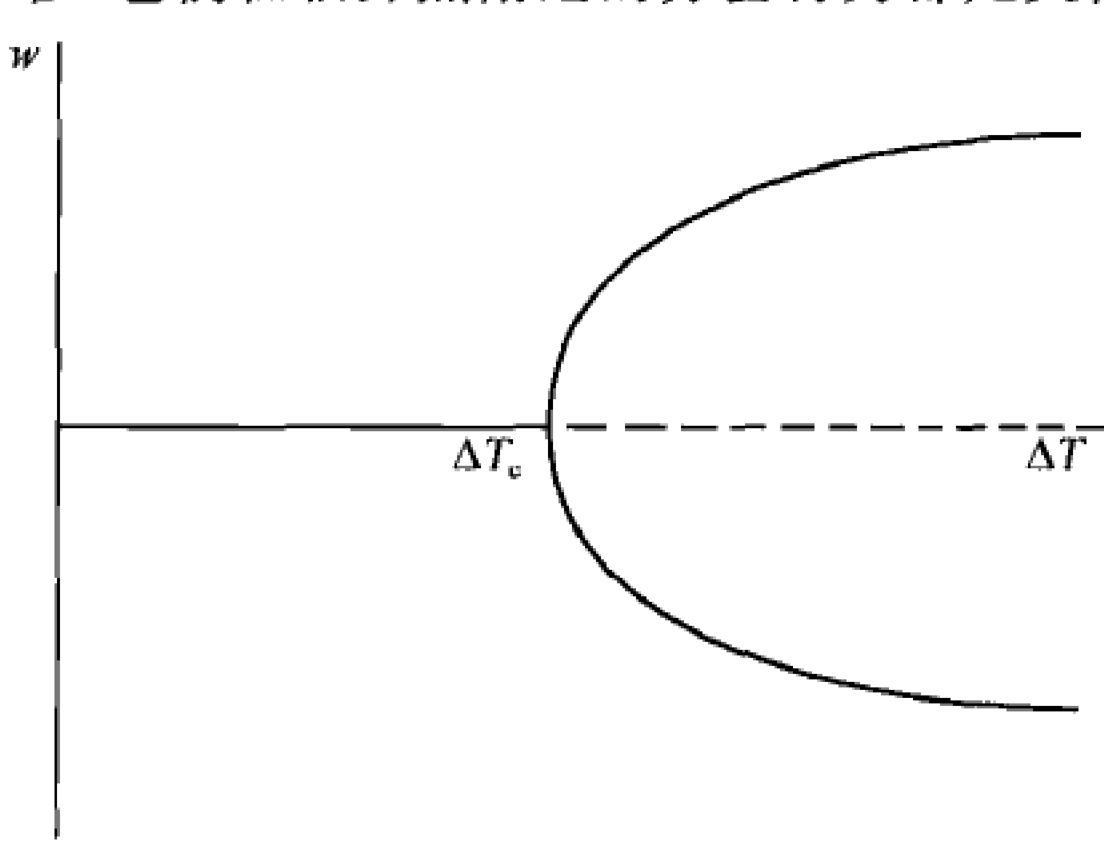


图 2.6 贝纳尔系统分岔图

贝纳尔对流系统在非线性科学占有重要位置的另一个原因是除了以上讨论的一级分岔，当系统的 ΔT 继续升高时系统会经历一系列的分岔现象，这些高级分岔现象的发现与对它们的深入研究，在很大程度上帮助人们揭开了非线性系统动力学的全貌．例如第一个倍周期分岔导致确定性混沌出现的实验观测就是在贝纳尔对流系统中发现的[9]．当系统包含许多贝纳尔对流胞时，随着 ΔT 的上升系统会出现时空混沌现象，这种动力学行为到现在还是非线性动力学研究的一个前沿方向．

§2.3　化学系统中的非线性现象

一般的宏观化学反应动力学系统都是非线性的，单分子反应是一个特例．根据化学反应动力学的质量作用定律，基元化学反应的速率与反应物浓度的乘积成正比，例如一个双分子反应

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}\longrightarrow\mathrm{C}+\mathrm{D},$$

它的反应速率可以表示成：

$$\frac{\mathrm{d}[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t}=-k[\mathrm{A}][\mathrm{B}].$$

这里[A]，[B]是反应物 A，B 的浓度．根据热力学第二定律，一个封闭系统的熵增加量总是大于零的，因而在一个封闭系统中系统的渐近行为不会出现上两节所描述的宏观分岔现象．也就是说，从简单到复杂的“进化”现象不可能在热力学平衡态附近出现．如果我们要从热力学角度出发研究复杂系统的形成，需要研究非平衡态热力学．下面简单介绍非平衡热力学的研究思路．

非平衡热力学的研究对象是一个开放系统，其熵增加量可以写成两部分：

$$\mathrm{d}S=\mathrm{d_e}S+\mathrm{d_i}S.$$

等式右端的第一项为系统外界对系统熵的贡献，第二项为系统内部的熵产生．根据热力学第二定律有 $\mathrm{d_i}S\geqslant 0$，而 $\mathrm{d_e}S$ 不受限制．非平衡热力学要建立有熵流的热力学理论．这种研究首先要建立局部平衡假设，其大意是，一个整体的非平衡系统可以近似地在空间中被分割为许多局部平衡系统的集合，每一个局部平衡系统在微观上可以看成无穷大，因而所有热力学函数都可以作为一个确定性的状态量加以研究；在宏观上该局部系统又可以认为是无穷小，因而整个系统的行为可以用微分方程描述．在这个假设下任何一个广延量 E 的变化都可以分成系统外界与系统内部，写成

$$\mathrm{d}E=\mathrm{d}E_{\mathrm{int}}+\mathrm{d}E_{\mathrm{ext}}.$$

系统广延量 E 随时间的变化为

$$\frac{\partial E}{\partial t}=\int_v \delta_E \mathrm{d}v-\int_\Sigma \boldsymbol{J}_E \mathrm{d}\Sigma.$$

这里 δ_E 为系统中 E 的源，v 为速度；$\boldsymbol{J}_E$ 为 E 从边界流入系统的流；Σ 为系统的边界. 写成微分形式：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)=\delta_E-\nabla\cdot\boldsymbol{J}_E.$$

在有速度场的情况下，广延量随时间的全微分为：

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial E}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla E.$$

在这个一般表示式的基础上加上一些守恒定律及热力学第二定律的限制，即质量守恒（$\delta_m=0$），能量守恒（$\delta_E=0$），熵增加原理（$\delta_S\geqslant 0$）等，就可以推导出在任何情况下系统熵产生的一般形式：

$$\sigma_S=\sum \boldsymbol{J}_k\cdot\boldsymbol{X}_k.$$

其中 $\boldsymbol{J}_k$ 为广义流，$\boldsymbol{X}_k$ 为广义力. 例如对于热传导过程，广义流为 $\boldsymbol{J}_Q$，广义力为 $\nabla(1/T)$；对于对流，广义流为 $\boldsymbol{J}_i$，广义力为 $\boldsymbol{f}_i/T-\nabla(\mu_i/T)$；对于化学反应，广义流为 δ_{m_i}，广义力为 $(\mu_i+E_{\mathrm{p}i})/T$ 等. 这里 T 是体系温度；$\boldsymbol{f}_i$ 是物质 i 所受外力；μ_i 是 i 物质的化学势；$E_{\mathrm{p}i}$是 i 物质的机械势能等. 在系统处于热力学平衡态时有 $\boldsymbol{X}_k=0$，$\boldsymbol{J}_k=0$. 考虑系统离开热力学平衡不远的情况. 这时有 $\boldsymbol{X}_k\ll 1$，于是可以将广义流看成广义力的函数并用泰勒级数展开：

$$\boldsymbol{J}_k(\boldsymbol{X}_k)=\boldsymbol{J}_k(0)+\sum_l\left(\frac{\partial \boldsymbol{J}_k}{\partial \boldsymbol{X}_l}\right)\boldsymbol{X}_l+O(\boldsymbol{X}_l^2).$$

去掉高阶项有

$$\boldsymbol{J}_k=\sum L_{kl}\boldsymbol{X}_l.$$

因而

$$\sigma_S=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}.$$

考虑细致平衡，L 矩阵元服从昂萨格倒易关系 $l_{kl}=l_{lk}$，所以 $\boldsymbol{L}$ 是正定的，$\sigma_S>0$. 在 20 世纪 70 年代，普里高津（Pringogine）等人发现了最小熵产生原理. 在近平衡态情况下，如果系统是等温的（$\Delta T=0$），没有流场（$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$），无外力（$\boldsymbol{f}_i=0$），并且边界条件不随时间变化，则可以定义一个熵产生量：

$$P=\int\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}v.$$

可以证明一个非平衡系统有 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t\leqslant 0$，在平衡位置有 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t=0$. 这个定理的推

论是,在近热力学平衡条件下,任何系统都不会自发产生宏观自组织现象,即宏观对称性破缺不可能发生.在 20 世纪 70 年代,普里高津又提出了适用于远离热力学平衡系统的超熵原理.超熵原理认为,任何系统都可以找到一个热力学量,超熵 $\delta_x P$,来表征系统的稳定性.当超熵大于零时系统是渐近稳定的;当超熵小于零时系统失稳,并经过一个对称性破缺的过程产生出新的宏观有序结构,这个结构被称为"耗散结构".从热力学角度研究耗散结构是统计物理与物理化学的一个新的分支,对这部分研究感兴趣的读者可以阅读参考文章[10,11].

对耗散结构理论的早期实验支持,是发现化学系统中的振荡现象并对该现象的系统研究.第一个均相系统中的化学振荡现象是布雷(Bray)于 1921 年在研究碘酸盐/碘分子(IO_3^-/I_2)系统催化双氧水(H_2O_2)分解时发现的[12].虽然布雷在实验中很小心地证明振荡现象产生于均匀相反应系统,但在近五十年的时间里,这个反应中的周期振荡现象还是被人们认为是由于反应中产生的气态氧气(O_2)引起的.当时存在的普遍看法是,均匀态化学反应中的振荡现象违反了热力学第二定律.1951 年,苏联生物学家别洛乌索夫(Belousov)在研究铈离子(Ce^{4+}/Ce^{3+})催化下,溴酸盐(BrO_3^-)氧化柠檬酸的反应时又发现了化学振荡现象.基于前述理由,别洛乌索夫的论文一再被苏联化学界否认.直到七年后的 1958 年,依靠一位朋友的帮助,他才得以在一个医学会议的论文集中发表了自己论文的摘要[13].1960 年,另一个苏联生物学家扎布亭斯基(Zhabotinski)证实了别洛乌索夫的发现.他用一系列严谨的实验结果,证明了化学振荡现象的客观存在.这个反应就是在非线性动力学领域中著名的别洛乌索夫-扎布亭斯基(Belousov-Zhabotinski,简称 BZ)反应.1968 年维夫瑞(Winfree)从捷克布拉格会议上得知 BZ 反应中的化学振荡与化学波现象.当他将 BZ 反应中的这些"反常"现象介绍到西方后,立刻引起了西方化学界及物理学界的注意.到了 20 世纪 70 年代,以普里高津为首的比利时布鲁塞尔物理化学组,用上面提到的非平衡热力学的观点,从理论上论证了化学振荡与化学波现象存在的可能性.他们指出,这类现象是系统在远离平衡态条件下产生的一种稳定的时空结构,并将其命名为耗散结构[11].

在研究化学振荡的早期所有的实验都是在封闭系统中进行的.在一个封闭系统中化学反应中的周期振荡现象是暂时的,该系统同样受热力学第二定律所支配.如果处在一个开放系统中,周期振荡会一直进行下去.1978 年法国波尔多研究小组第一次用全混釜开放反应器(continuously-fed stirred tank reactor, CSTR)研究 BZ 反应.图 2.7 是该反应器的示意图.该装置有两类控制参量:从外部打入反应器的化学物质的浓度 C_i,与打入反应器的化学物质的流量 J_i. J_i

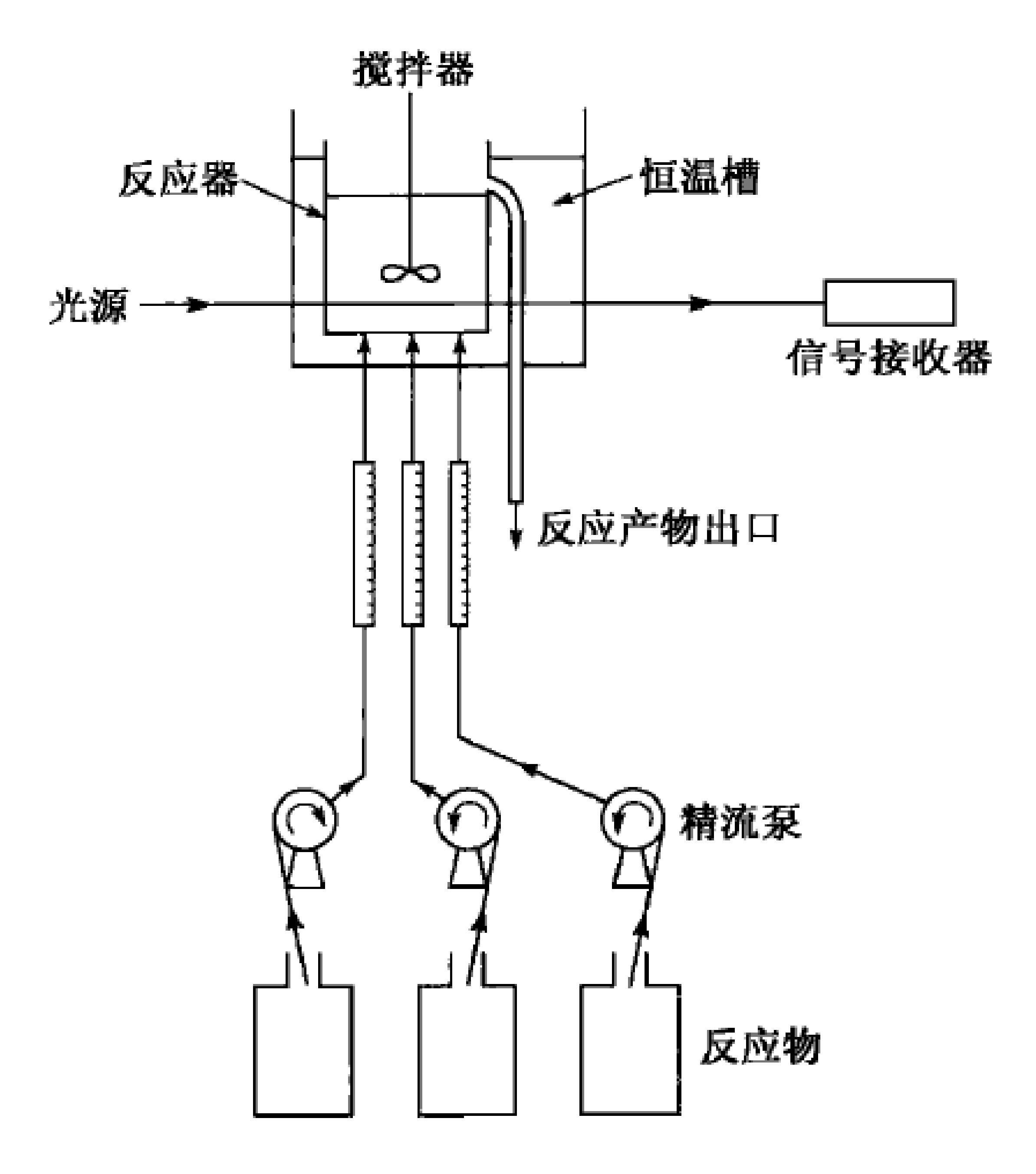


图 2.7　全混釜反应器(CSTR)示意图

除以反应器的体积是反应物在反应器中停留时间 T_i 的倒数，它可以很方便地成为系统的控制参量. 当 J_i 接近于零时 T_i 接近无穷大，系统接近于热力学平衡状态，因而不能产生任何宏观自组织现象；当 J_i 很大时 T_i 接近于零，所有反应都没有时间能在反应器中完成，因而系统也没有自组织现象产生；在这两个极端之间系统会表现出一系列有趣的周期或非周期的振荡现象. 在实验中发现当 T_i 降低到一个临界值 T_c 时 BZ 反应的定态开始失稳，系统显示周期振荡行为，振荡的频率与振幅由系统的控制参量唯一地决定. 图 2.8 给出了系统随控制参量变化的一些典型振荡行为.

周期振荡现象的出现破坏了系统的时间平移不变性. 因为对于一个定态来说，观测者在任意时刻观察系统所得到的结果都是一样的；而对于一个时间周期振荡系统，只有间隔时间为周期的整数倍，观测者才可以得到同样的观察结果. 我们同样可以用系统的振荡振幅随控制参量的变化，做出系统动力学行为的分岔图. 在分岔图中振荡分支在 $T_i=T_c$ 时从定态分布分岔出去. 继续变化控制参量系统会呈现新的状态，一直到出现确定性混沌. 随着耗散结构理论被普遍接受和全混釜反应器在实验中的应用，人们开始系统地研究化学振荡现象. 到目前为止，人们已经发现了二百多种不同的化学振荡系统.

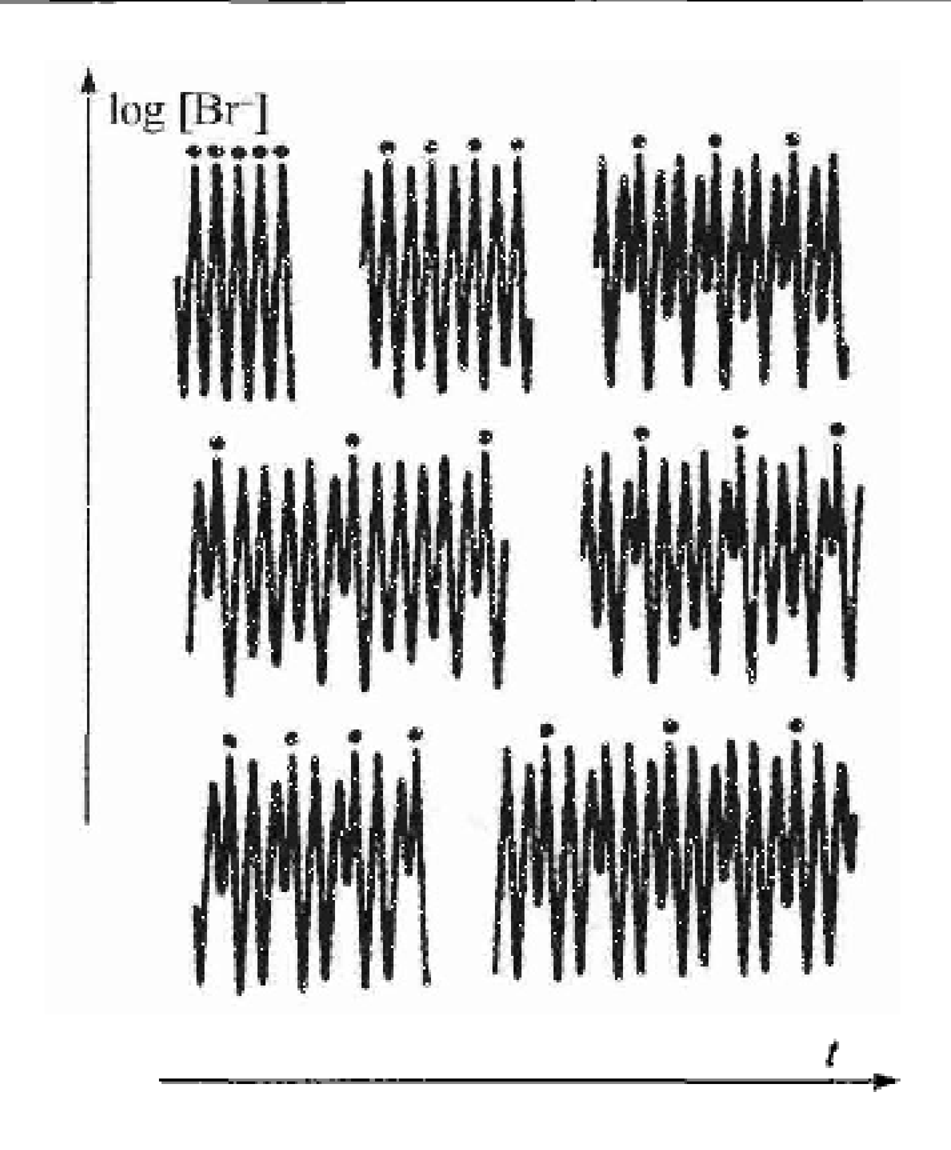


图 2.8　BZ 反应系统中发现的一些典型振荡行为

从热力学角度研究耗散结构还有很长的路要走，但从动力学角度研究化学系统的自组织行为，却在近几十年来取得了突破性的成果. 原因是对 BZ 反应动力学的研究. 对 BZ 振荡系统的定量分析是菲尔德等人在 1972 年完成的[14]. 虽然人们对反应机理的细节研究在近三十年来有了很大的进展，但它的基本框架并没有改变. 该反应机制主要是由两部分(A，B)组成，A 与 B 过程交替控制 BZ 反应. 而第三个过程 C 控制 A 与 B 的交换.

当作为反应物的溴离子(Br^-)浓度很高时如下反应是 BZ 反应的主线(A 过程)：

$$Br^- + BrO_3^- + 2H^+ \longrightarrow HOBr + HBrO_2, \qquad (A.1)$$

$$Br^- + HOBr + H^+ \longrightarrow Br_2 + H_2O, \qquad (A.2)$$

$$Br^- + HBrO_2 + H^+ \longrightarrow 2HOBr. \qquad (A.3)$$

当溴离子浓度显著下降时，由于 BrO_2 的产生使金属离子的自催化氧化成了反应的主线(B 过程)：

$$2HBrO_2 \longrightarrow HOBr + BrO_3^- + H^+, \qquad (B.1)$$

$$HBrO_2 + BrO_3^- + H^+ \longrightarrow 2BrO_2 + H_2O, \qquad (B.2)$$

$$BrO_2 + Ce^{3+} + H^+ \longrightarrow Ce^{4+} + HBrO_2. \qquad (B.3)$$

最后，丙二酸将氧化态金属离子重新变为还原态，同时放出溴离子，从而形成一个反应循环(C 过程)：

$$10Ce^{4+} + CH_2(COOH)_2 + BrCH(COOH)_2 + 4H_2O + 2Br_2$$
$$\longrightarrow 10Ce^{3+} + 5Br^- + 6CO_2 + 15H^+. \qquad (C)$$

整个反应可以用图 2.9 示意. 注意到 C 过程本身不会使 B 过程跃变到 A 过程，必不可少的另外一个因素是 B 过程的自催化性质. 这个反应的定量分析会在后面的章节中介绍.

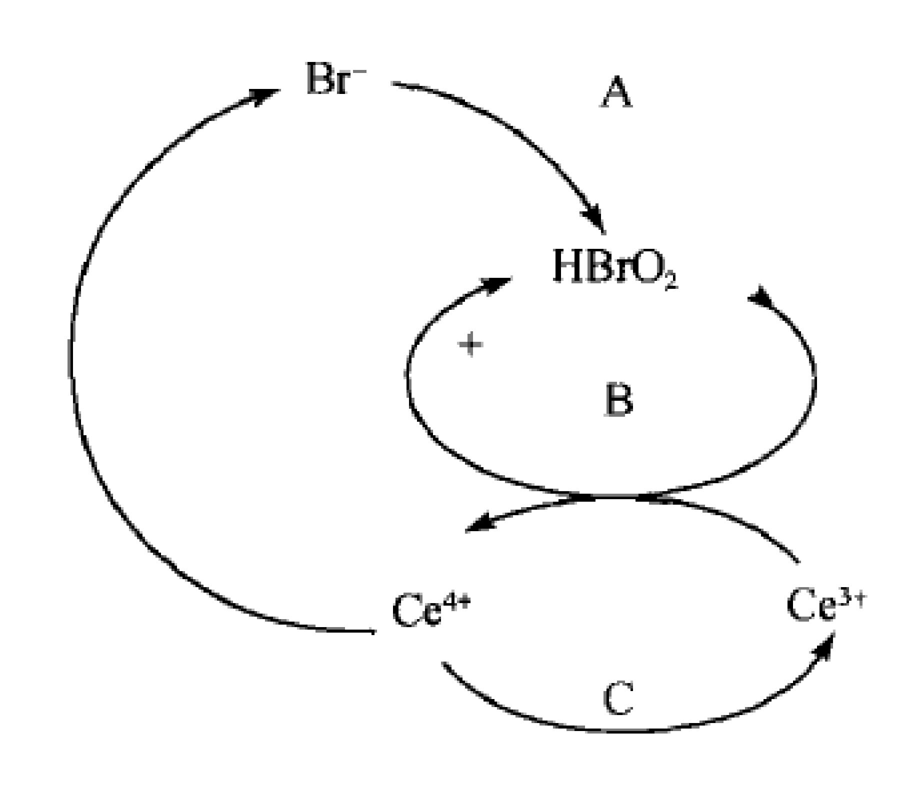


图 2.9 BZ 反应系统网络图

§2.4 生物系统中的非线性现象

生物系统表现出的形态多样性与系统稳定性很早就引起了物理学家的关注. 在科学史上用各种理论解释生命现象的尝试从来就没有停止过. 用现代物理学观点揭示生命现象的早期尝试之一是薛定谔的著作《什么是生命》，虽然用现在的观点看薛定谔对生命现象的解释不很准确，甚至有些错误的观点，但他的书的确吸引了一批物理学家的目光，引导他们用定量的手段研究生命现象，并试图找出它们中间的普遍规律. 近年来用定量手段对生命现象进行系统研究正在理论生物、生物物理、生物数学领域迅速发展，两个主要原因促成了这种发展趋势：第一，生物实验技术的革命性进步使得生物实验数据得以迅速积累，实验精度迅速提高，从而生物实验的观测正在加速从定性观测到定量观测，同时人们可以很快地组织实验对一些基本假设进行证实或证伪；第二，从基因及蛋白质水平研究生命现象积累了大量观测事实，使人们能够从系统生物学的角度出发，研究基因调控网络与蛋白质作用网络的一些基本性质. 这里举出北京大学理论生物学中心的一个研究结果[15]——酵母蛋白质网络的动力学性质的研究，说明生物系统中的非线性现象.

芽殖酵母(budding yeast, *Saccharomyces cerevisiae*)是生物学研究广泛应用的单细胞真核模式生物，酵母在细胞周期调控的研究中有着极其重要的作用. 1966 年作为第一个真核生物，芽殖酵母的全基因组测序工作完成并公布. 近

年来，芽殖酵母的蛋白质相互作用的数据迅速增加积累，这些蛋白质-蛋白质相互作用网络的数据和相关的生物学研究进展，为进一步全面系统地研究蛋白质网络的性质提供了可能. 一些物理学家对芽殖酵母蛋白质网络的拓扑性质进行了研究，得出了网络连线数随网络节点成幂率分布的结论[16]，另一些研究人员对基因调控网络中的基本调控单元进行了研究，试图找到生物系统中蛋白质网络的基本构成单元[17]. 相对于较为稳定的基因组，蛋白质网络对不同的环境信号、不同蛋白质状态的不断变化作出反应，即通过动力学过程完成生物学功能. 所以，蛋白质网络动力学的研究成为生物学家和生物物理学家共同关心的重要问题.

芽殖酵母具有简单的生命周期，能够以单倍体和双倍体形式存在. 在营养丰富的条件下，单倍体和双倍体的芽殖酵母细胞都能够以正常的细胞分裂周期进行繁殖. CDK(cyclin-dependent kinase)蛋白激酶的基因表达和活性调控了整个细胞周期过程. 在营养缺乏条件下，触发孢子形成信号(sporulation signal)，双倍体细胞能够通过减数分裂产生孢子，形成单倍体细胞来适应恶劣的外界条件，减数分裂主要是由 Ime1 蛋白的表达和活化来调控的. 当营养丰富时，受到信息素(pheromone)刺激，两个单倍体细胞将融合成为一个新的双倍体细胞.

生物学中研究得最为清楚的是细胞周期(cell-cycle)调控网络. 该网络是我们基于以前的动力学模型，并通过大量的文献调研和对蛋白质数据库(http://mips.gsf.de/)的分析建立起来的. 简化的细胞周期网络如图 2.10 所示. 该网络中的蛋白质可分为以下 3 大类：第 1 类为 Cyclin/Cdc28 复合物，包括 Cln3/Cdc28 复合物(图中简写为 Cln3)，Cln1/Cdc28 与 Cln2/Cdc28 复合物(简写为 Cln1,2)，Clb5/Cdc28 与 Clb6/Cdc28 复合物(简写为 Clb5,6)，Clb1/Cdc28 与 Clb2/Cdc28 复合物(简写为 Clb1,2)；第 2 类为转录因子，包括 MBF，SBF，

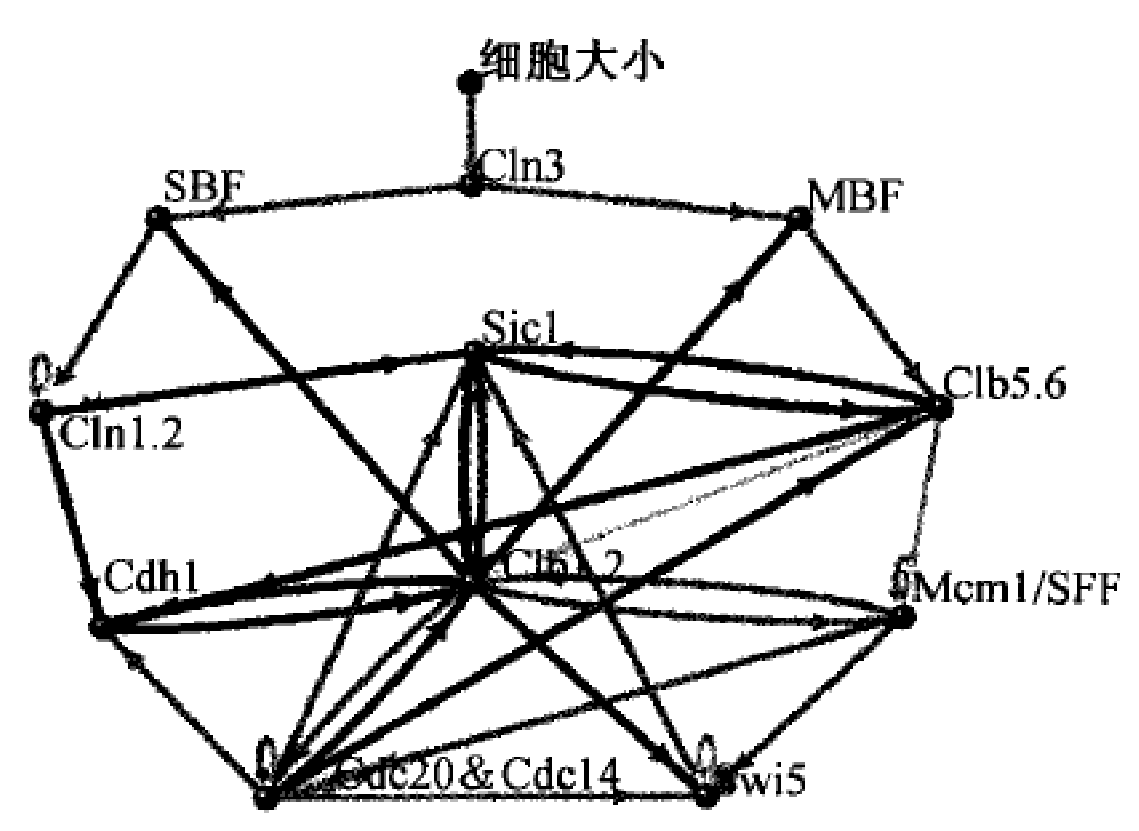


图 2.10　细胞周期调控网络

Mcm1/SFF 和 Swi5;第 3 类为 Cyclin/Cdc28 复合物的抑制蛋白与降解蛋白,包括 Sic1,Cdh1,Cdc20/APC. 网络中浅色箭头表示正相互作用(激发或活化),深色箭头表示负相互作用(抑制或去活化),环状箭头表示蛋白质的自降解作用. 细胞周期过程可以简述如下:在营养丰富的条件下,当双倍体或单倍体的酵母细胞长得足够大时,Cln3/Cdc28 蛋白复合物将被活化,促使细胞进入"激发的"G_1 态,这时细胞的 Sic1 浓度较高,Hct1 处于活化状态. 活化的 Cln3/Cdc28 复合物将活化转录因子 MBF 和 SBF,活化的 MBF 和 SBF 与 DNA 结合后,转录相应的 mRNA,然后翻译形成 Cln1,Cln2,Clb5,Clb6 蛋白,上述蛋白抑制了 Sic1 和 Hct1 的作用,并控制着 G_1 后期基因的表达. 在 S 期(S phase),细胞复制自己的 DNA. 通过 G_2 期,Clb1 和 Clb2 活化,细胞进入有丝分裂期(M phase). 有丝分裂使得复制的 DNA 等量地分配到细胞相对的两极,然后一个细胞分裂产生两个子细胞,在该过程中 Cdc20/APC 和 Swi5 被活化,导致 Sic1 浓度升高,Hct1 活化,并对 Cyclin/Cdc28 复合物产生抑制作用. 最后,细胞又回到细胞周期的静息 G_1 态,即 G_1 基态,等待下一次分裂信号. 总的来说,细胞周期过程起始于"激发"G_1 态——该状态 Cln3/Cdc28 复合物处于活化状态,通过一系列细胞周期过程,最后回到 Cln3/Cdc28 复合物未活化的 G_1 基态. 以上的定性描述是分子生物学家经过几十年努力得出的综合结果. 物理学家面临的问题是,怎样用动力学的观点研究这个网络系统的基本动力学性质.

为了研究蛋白质网络的动力学性质,选择以下简单的离散动力学模型:每类蛋白质只有两种状态,0 与 1,分别表示该蛋白质处于活化与未活化状态. 下一个时刻蛋白质的状态是由当前时刻的蛋白质状态按照以下规则决定的:

$$S_i(t+1)=\begin{cases}1, & \sum_j a_{ij}S_j(t)>0,\\ 0, & \sum_j a_{ij}S_j(t)<0,\\ S_i(t), & \sum_j a_{ij}S_j(t)=0.\end{cases} \tag{2.4.1}$$

其中 a_{ij} 是第 j 类蛋白质对第 i 类蛋白质的作用系数. 模型中的时间步长是逻辑步长,而非实际意义上的时间. 我们选择 a_{ij} 取值为 1 与 -1,分别表示正相互作用(浅色箭头)和负相互作用(深色箭头). 自降解作用(环状箭头)具有时间延迟的性质:一个具有自降解作用的蛋白质,若在 t 时刻被活化($S_i(t)=1$),而且在 $t+1$ 到 $t=t+t_d$ 时间内一直没有其他的正负输入,那么它将在 $t=t+t_d$ 时刻降解($S_i(t+t_d)=0$). 在模型中选择 $t_d=1$. 采用简单的离散动力学模型的优势在于能够分析网络动力学状态全空间的性质,从而得到网络的全局动力学性质.

现在利用以上的离散动力学模型研究细胞周期调控网络随“时间”的变化. 首先把激发 G_1 态作为初始态(Cln3,Sic1 和 Cdh1 的状态为 1,其余蛋白质的状态为 0),计算的结果表明系统经过十三个逻辑步长逐步演化到 G_1 基态(Sic1 和 Cdh1 的状态为 1,其余蛋白质的状态为 0),见图 2.11. 蛋白质状态的时间演化过程与生物学实验观察相符合,这说明图 2.10 描述的控制细胞周期的蛋白质作用网络与式(2.4.1)基本抓住了系统动力学的关键. 网络动力学研究的第一个任务是了解它的动力学吸引子. 遍历所有可能的 2048 个初始态(11 结点网络,不包括细胞大小的信号),该蛋白质网络最后演化到 7 个稳定的状态,其中 1764 个初始态(约 86%)演化到静息的 G_1 态,即细胞周期的生物学稳定态. 这说明细胞周期的静息 G_1 态是一个全局吸引子,而且是唯一的全局吸引子. 为了验证是否所有网络都具有类似的性质,我们在相同演化规则下,研究了具有相同结点数目和相同连接数目的随机网络的吸引域分布. 随机网络的动力学性质的研究表明,随机网络平均来说具有更多的吸引子,而且出现类似细胞周期网络全局吸引子的概率极小. 因而细胞周期网络的特殊结构使得其生物系统能够具有很好的全局动力学稳定性.

蛋白质演化步数	Cln3	MBF	SBF	Cln2	Cdh1	Swi5	Cdc20 & Cdcl4	Clb5	Sicl	Clb2	Mcml/SFF	相
1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	初始态
2	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	G_1
3	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	
4	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	
5	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	S
6	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	G_2
7	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	M
8	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	
9	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	
10	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	
11	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	
12	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	G_1
13	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	G_1 基态

图 2.11 细胞周期的演化表

那么,11 个结点的细胞周期网络中的所有初始状态是怎样一步一步地演化到最后的吸引点呢? 图 2.12 中给出了所有的 2048 个初始状态的演化路径,图中最粗的路径为生物学路径——细胞周期路径,最大的节点为 G_1 基态,图中每个点的大小和每条线的宽度正比于 $\ln(2+m)$,m 为蛋白质初态经过该点(边)

的数目. 我们发现细胞周期路径是最可几路径：大部分的网络初始状态首先被吸引到细胞周期路径上来，然后沿着细胞周期路径逐步到达稳定态——G_1 基态. 这意味着不仅 G_1 基态是一个全局性的稳定点，而且从 G_1 激发态到 G_1 基态的细胞周期路径同样是一个全局性的稳定的动力学路径. 蛋白质网络通过长期的进化，其动力学性质具有双重稳定性. 更加深入地研究发现在裂殖酵母(fission yeast)和蛙卵细胞(frog egg)的细胞周期网络中也有类似的动力学性质.



图 2.12 细胞周期状态在相空间的演化路径

全局稳定性与路径稳定性都是典型的非线性现象，本书在以后各章中对这些性质都有一定的讨论. 但是坦白地说，非线性动力学现有的分析工具在大部分情况下只能分析系统的局部行为，对系统全局的动力学行为的研究还刚刚开始.

第三章　动力系统的定量形式

定量研究一个动力系统的第一步是根据已知的物理学、化学或生物学定律建立一个数学模型. 本章用几个在经典力学、化学中经常见到的例子讨论建立数学模型的步骤. 在讨论中将详细介绍对方程的无量纲化处理. 将一个物理模型无量纲化有两个显著的优点：第一，可以减少方程中独立控制参量的个数，使所研究的系统在控制参量空间大为简化；第二，控制参量在无量纲化后一般表现为两个控制参量的对比，这使人们对该控制参量的物理意义有更加清楚的认识. 本章的后两节将通过讨论生态与生物系统，介绍动力系统的一个特殊情况，延迟模型. 延迟模型在细胞尺度的生物系统中可能是普遍存在的，它是产生微观自组织的原因. 关于微观自组织的物理背景将在本章中最后一节讨论，并通过讨论建立数学模型.

§3.1　经典力学中的演化方程

经典力学一般将研究对象看成是一群具有质量 m_i 的质点，它研究由于质点间相互作用或在外力影响下，质点位置 $\boldsymbol{r}_i$ 与速度 $\boldsymbol{v}_i$ 随时间的变化. 研究经典力学所用的物理定律是牛顿的动力学第二定律：

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = F_i(\boldsymbol{r}_i, \cdots, \boldsymbol{r}_N), \quad i = 1, \cdots, N. \tag{3.1.1}$$

对于一部分力学系统，以上方程在适当的变量代换下可以写成哈密顿形式：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}_i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}_i}, & (3.1.2\text{a}) \\ & (i = 1, \cdots, N), \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}_i} & (3.1.2\text{b}) \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{q}_i$ 与 $\boldsymbol{p}_i$ 分别是系统的广义坐标与广义动量；H 是系统的哈密顿量. 一般来讲，式(3.1.1)与(3.1.2)是非线性的，因为对于特定的坐标系来说描述自然的物理定律一般是非线性的，例如牛顿的引力定律. N 个质点组成的系统用 $6N$ 个常微分方程描述. 如果这 $6N$ 个方程可以分解为 $6N$ 个独立的可积分的系统，则系统的动力学性质可以很容易地确定下来. 这种情况对单质点($N=1$)总是

成立，因为这时变量受物理学能量守恒定律的约束不是独立的. 上一章提到的铁环模型与单摆模型都是这一类的可积系统. 对于 N 个质点的问题，如果只考虑质点在其平衡点附近做小幅度振动，这个系统也可以被处理成为可积系统. 这种处理方式在研究固体物理中经常用到，失去了这种处理方法固体物理问题就会变得非常困难.

从拉普拉斯时代到 20 世纪中叶，物理学家认为绝大部分力学系统都属于可积系统. 到了 20 世纪 50 年代，克尔莫格罗夫（Kolmogorov）证明许多力学系统是不可积的，从此人们开始研究不可积哈密顿系统，并发现了确定性混沌. 在这里举两个研究领域，对它们的研究深刻地改变了人们对经典力学问题的认识. 第一个是有名的三体问题，现在已经知道三体问题属于不可积系统，它可以表现出哈密顿混沌行为. 第二个领域是对统计物理微观机制的研究. 这里问题的核心是，系统如何从微观上的时间可逆性过渡到宏观上的时间不可逆性的？哈密顿混沌现象可能是连接着两个端点的纽带，它揭示了几率概念是怎样从一个由确定性方程组规定的系统中自然地显现出来的.

非哈密顿系统中复杂动力学行为的研究起始于 20 世纪 60 年代. 洛伦茨在研究大气对流现象时推导了对流主模式的振幅方程，它是一个简单的三变量常微分方程[18]. 洛伦茨用这个方程在计算机中模拟气象时，发现了不规则的非周期振荡现象. 在这个系统中，初始条件的一个微小的改变对系统状态的演化有很大影响. 洛伦茨将这种行为喻为“蝴蝶”效应：一只蝴蝶在南美洲扇动一下翅膀会引发北美洲的一场风暴. 与三体问题的研究一样，这项研究工作在确定性混沌研究中占有很重要的地位.

在简单地讨论了经典力学中非线性问题以后，回到上章第一节遇到的铁环问题的建模上. 首先注意到这个问题是单体问题，它不可能表现出混沌行为. 但在以后的分析中我们将看到，这个系统存在失稳现象并出现动力学分岔，这些行为在上一章中已经做过定性分析. 建立数学模型的出发点是牛顿的动力学第二定律，为了更接近实际，我们在原系统上加上摩擦力. 令 v_t，F_t 分别为小球的切向速度与切向力（见图 2.1），则

$$v_t = r\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t,$$

$$F_t = (\text{重力} + \text{离心力} + \text{摩擦力})_t$$

$$= - mg\sin\theta + m\omega^2 r\sin\theta\cos\theta - b\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t,$$

应用牛顿第二定律，得方程：

$$mr\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = - mg\sin\theta - b\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + m\omega^2 r\sin\theta\cos\theta. \tag{3.1.3}$$

此方程有五个控制参量：m,r,b,ω,g，但实际上只有三个独立控制参量：r/g，b/mg，$\omega^2 r/g$. 下一步是将方程做无量纲化处理. 无量纲化的目的是减少控制参量的个数，同时使我们对控制参量的物理意义认识得更加清楚.

首先看变量、自变量与各个控制参量的量纲(这里用对应的单位表示量纲)：

$$\theta\text{: 无量纲},r\text{: }[\mathrm{m}],t\text{: }[\mathrm{s}],m\text{: }[\mathrm{kg}],$$
$$\omega\text{: }[\mathrm{s}^{-1}],g\text{: }[\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}],b\text{: }[\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}].$$

第一步是把变量与自变量变成无量纲的. θ 本身是无量纲的，t 有时间的量纲，令 $\tau=t/T$，T 是无量纲方程的时间尺度，其量纲为[s]，形式待定. 代入方程(3.1.3)，得：

$$\frac{mr}{T^2}\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2}=\frac{-b}{T}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}-mg\sin\theta+mr\omega^2\sin\theta\cos\theta.$$

上面方程的两边都是力的量纲，所以可以在方程两端同除以 mg 使方程无量纲化：

$$\left(\frac{r}{gT^2}\right)\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2}=-\left(\frac{b}{mgT}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}-\sin\theta+\left(\frac{r\omega^2}{g}\right)\sin\theta\cos\theta. \qquad (3.1.4)$$

剩下的事就是定出无量纲方程的时间尺度 T. 这个过程主要遵从两个原则，第一，尽量使方程简化；第二，当变量的动力学行为存在两个以上时间尺度时，选择最慢的作为方程的时间尺度，因为它是方程动力学演化的控制步骤. 根据这两个原则，可以分两种情况讨论确定 T 的问题. 第一种是摩擦力很小的情况，惯性力远大于摩擦力. 这时有

$$\frac{r}{gT^2}\sim O(1),\quad \frac{b}{mgT}\ll 1.$$

在这种情况下可令

$$\frac{r}{gT^2}=1,\quad T=\sqrt{\frac{r}{g}},$$

将此关系代入(3.1.4)式得到最后的无量纲方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2}=-\varepsilon\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}+\sin\theta(\lambda\cos\theta-1). \qquad (3.1.5)$$

其中

$$\lambda=\frac{r\omega^2}{g},\quad \varepsilon=\frac{b}{m\sqrt{rg}}\ll 1.$$

ε 在方程中可以被认为是微扰项.

第二种是摩擦力很大的情况，这时惯性力远小于摩擦力，也就是说

$$\frac{b}{mgT}\sim O(1),\quad \frac{r}{gT^2}\ll 1.$$

在这种情况下，令

$$T=\frac{b}{mg},\quad \varepsilon=\frac{rgm^2}{b^2},$$

得到最后的无量纲方程

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2}=-\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}+\sin\theta(\lambda\cos\theta-1). \tag{3.1.6}$$

无量纲方程(3.1.5)，(3.1.6)都只有两个控制参量，比原方程少了一个. 另外，其中一个控制参量可能是一个微量，这使我们可以在一些情况下对方程进行微扰分析. 方程中唯一重要的控制参量是$\lambda=r\omega^2/g$，它反映了离心力与重力的竞争关系：当 λ 增加时离心力越来越占上风，当 λ 下降时重力越来越占上风. 如果惯性力与摩擦力的作用相当，可以选择以上两种无量纲方程的任意一种，这时 ε 就不再是一个远小于 1 的量了.

现在讨论方程(3.1.5)在无摩擦时的情况. 这时方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2}=\sin\theta(\lambda\cos\theta-1). \tag{3.1.7}$$

很显然 $\theta=0$ 是方程的一个定态解. 我们希望知道在什么情况下，即 λ 取何值时系统会出现 $\theta\neq0$ 的解. 根据上一章第一节的定性分析，在临界点附近 $\theta\ll1$（见图 2.2)，所以可以在临界点附近将方程作关于 $\theta=0$ 的泰勒展开：

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2}=\sin\theta(\lambda\cos\theta-1)=\left(\theta-\frac{\theta^3}{6}+\cdots\right)\left[\lambda\left(1-\frac{\theta^2}{2}+\cdots\right)-1\right].$$

去掉五阶以上的项，得到达芬(Duffing)方程，又称达芬振荡子

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2}=\mu\theta+\nu\theta^3, \tag{3.1.8}$$

其中

$$\mu=\lambda-1,\quad \nu=\frac{1}{6}(1-4\lambda).$$

显然只有 $\lambda>1$，即离心力的作用大于重力的作用时，才可能出现非零定态解，其解为

$$\theta=\pm\sqrt{\frac{-\mu}{\nu}}=\pm\sqrt{\frac{6\lambda-6}{4\lambda-1}}.$$

达芬方程具有一些有趣的性质. 首先，方程在 $\theta\to-\theta$ 的操作下保持不变，这反映了原物理系统关于垂直线的镜像对称不变性. 另外，此方程在很大程度上不依赖于原物理系统的细节，而只依赖于它的对称性. 实际上，满足镜像对称的无摩擦力学系统在临界点附近都可以简化成达芬方程，因为一个这样的系统在临界点附近都可以作如下形式的泰勒级数展开：

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\tau^2}=f(x)$$
$$=f(0)+\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_0 x+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right)_0 x^2+\frac{1}{6}\left(\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}\right)_0 x^3+\cdots.$$

镜像对称要求

$$f(0)=0,\quad \left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right)_0=0,$$

令

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_0=\mu,\quad \frac{1}{6}\left(\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}\right)_0=\nu,$$

去掉三阶以上的高阶项就得到了达芬方程. 最后,如果只考虑线性项,该方程就是谐振子方程,其中 $\mu=-\omega^2$. 很显然这样的考虑只有在 $\mu<0(\lambda<1)$ 时才成立. 如果 $\mu>0(\lambda>1)$,变量会随时间无限增长,这时非线性项成为主导项. 因而在方程中必须加上非线性项. 而正是由于非线性项的加入,使系统产生了如图 2.2 所示的分岔现象.

§3.2　化学反应系统的动力学模型

对于一个宏观化学反应系统,我们可以假设分子间化学反应所需要的反应时间远小于分子在随机运动中发生碰撞所需要的时间,即扩散时间. 这时可以将反应过程看成是瞬时的. 如果再假设分子间的反应事件是独立事件,则化学反应的动力学服从质量作用定律,即基元反应的速率正比于反应物浓度的乘积. 值得指出的是,在一个微型反应器中以上的两个假设都有可能不成立,这时质量作用定律就不再适用. 这种情况可能会出现在生物系统中. 本章的最后一节会对这种情况做一个细致的分析. 本节讨论宏观反应系统. 对于这类系统,我们可以用质量作用定律来建立化学反应的动力学模型. 以 BZ 反应机制为例,它的反应方程式可以写为如下基元反应[14]:

$$\mathrm{A}+\mathrm{Y}\xrightarrow{k_1}\mathrm{X}+\mathrm{P},\qquad (3.2.1a)$$

$$\mathrm{X}+\mathrm{Y}\xrightarrow{k_2}2\mathrm{P},\qquad (3.2.1b)$$

$$\mathrm{A}+\mathrm{X}\xrightarrow{k_3}2\mathrm{X}+\mathrm{Z},\qquad (3.2.1c)$$

$$\mathrm{X}+\mathrm{X}\xrightarrow{k_4}\mathrm{A}+\mathrm{P},\qquad (3.2.1d)$$

$$\mathrm{B}+\mathrm{Z}\xrightarrow{k_5}f\mathrm{Y}.\qquad (3.2.1e)$$

这里反应物溶度 $A=[BrO_3^-]$，$B=[CH_2(COOH)_2]+[BrCH(COOH)_2]$，由于它们在反应中是大量存在的，可以认为在反应过程中它们的浓度几乎不变，所以它们可以被看成是反应控制参量；$X=[BrO_2]$，$Y=[Br^-]$，$Z=[Ce^{4+}]$是反应中的变量；$P=[HOBr]$，此物质是反应产物，它只出现在反应方程式的右端，因而在反应动力学方程中不会出现；f 是常数，它反映了单位还原物 $CH_2(COOH)_2$，$BrCH(COOH)_2$ 在反应中生成溴离子的比例. 根据质量作用定律，上面的反应方程式可以导出如下动力学方程：

$$\frac{dX}{dt}=k_1AY-k_2XY+k_3AX-2k_4X^2, \tag{3.2.2a}$$

$$\frac{dY}{dt}=-k_1AY-k_2XY+k_5fBZ, \tag{3.2.2b}$$

$$\frac{dZ}{dt}=k_3AX-k_5BZ. \tag{3.2.2c}$$

有了反应动力学方程式，下面的任务是将其无量纲化. 首先看一下方程中变量、自变量与控制参量的量纲(以相应的单位表示)：

$$k_i:[\mathrm{mol^{-1}\cdot L\cdot s^{-1}}],A,B,X,Y,Z:[\mathrm{mol\cdot L^{-1}}],t:[\mathrm{s}].$$

对于一个反应系统，可以任意选择一个基元反应的速率作为系统演化的时间尺度. 一般在得到无量纲方程之前，不一定能一下子选中一个好的时间尺度. 在遵循用慢变量的变化作为时间尺度的原则下，有时还需要在不同的时间尺度间进行选择，这种选择在很大程度上需要经验的积累. 与上一节一样，首先定义一个待定的时间尺度 T，并对每一个变量定义一个待定的浓度单位 X_0，Y_0，Z_0. 令

$$\tau=\frac{t}{T},\quad x=\frac{X}{X_0},\quad y=\frac{Y}{Y_0},\quad z=\frac{Z}{Z_0},$$

代入方程(3.2.2)，得

$$\frac{X_0}{T}\frac{dx}{d\tau}=k_1AY_0y-k_2X_0Y_0xy+k_3AX_0x-2k_4X_0^2x^2, \tag{3.2.3a}$$

$$\frac{Y_0}{T}\frac{dy}{d\tau}=-k_1AY_0y-k_2X_0Y_0xy+k_5fBZ_0z, \tag{3.2.3b}$$

$$\frac{Z_0}{T}\frac{dz}{d\tau}=k_3AX_0x-k_5BZ_0z. \tag{3.2.3c}$$

选择反应方程式中的(3.2.1e)作为系统的时间尺度，令 $T=(k_5B)^{-1}$代入方程(3.2.3c)：

$$Z_0\frac{dz}{d\tau}=X_0\frac{k_3A}{k_5B}x-Z_0z.$$

为了使方程变得更简单，可以要求 $k_3AX_0=k_5BZ_0$，在这样的规定下，方程变成

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}=x-z.$$

在这个推导过程中，我们定义了系统的时间尺度 T，同时定义了反应物浓度单位 X_0 与 Z_0 的关系，还剩下两个待定浓度单位 X_0，Y_0，适当地选择这两个量可以使方程(3.2.3)变得更加简单. 现在看方程(3.2.3a)，该式可以重新写为

$$\frac{k_5B}{k_3A}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=\frac{k_1Y_0}{k_3X_0}y-\frac{k_2Y_0}{k_3A}xy+x-\frac{2k_4X_0}{k_3A}x^2.$$

令

$$X_0=\frac{k_3A}{2k_4},\quad Y_0=\frac{k_3A}{k_2},\quad \varepsilon_1=\frac{k_5B}{k_3A},\quad q=\frac{2k_1k_4}{k_2k_3},$$

得到

$$\varepsilon_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=qy-xy+x-x^2=x-x^2-y(x-q).$$

用 X_0 与 Z_0 的关系定出 Z_0 的浓度单位，就把所有的待定参数都确定了. 将这些参数代入方程(3.2.3b)，得

$$\varepsilon_2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}=-qy-xy+fz.$$

其中

$$\varepsilon_2=\frac{2k_4k_5B}{k_2k_3A}.$$

经过这样的无量纲化处理，方程(3.2.2)变成：

$$\varepsilon_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=x-x^2-y(x-q),\tag{3.2.4a}$$

$$\varepsilon_2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}=-qy-xy+fz,\tag{3.2.4b}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}=x-z.\tag{3.2.4c}$$

新老自变量、变量的关系为

$$\tau=k_5Bt,\quad x=\frac{2k_4}{k_3A}X,\quad y=\frac{k_2}{k_3A}Y,\quad z=\frac{2k_4k_5B}{(k_3A)^2}Z.$$

新老控制参量的关系为

$$\varepsilon_1=\frac{k_5B}{k_3A},\quad \varepsilon_2=\frac{2k_4k_5B}{k_2k_3A},\quad q=\frac{2k_1k_4}{k_2k_3}.$$

原方程有 7 个控制参量：k_1-k_5，A，B，在无量纲化以后控制参量变为 3 个：ε_1，ε_2，q. 4 个原控制参量被吸收到新的自变量与变量中，其中 1 个进入时间单位，

3 个进人浓度单位. 新的控制参量 ε_1, ε_2 有明显的物理意义,它们分别表示变量 x 与 z, y 与 z 的变化关系. 在 BZ 反应中

$$k_1 = 1.34\ \mathrm{mol^{-1}\cdot L\cdot s^{-1}},\quad k_2 = 1.6\times 10^9\ \mathrm{mol^{-1}\cdot L\cdot s^{-1}},$$

$$k_3 = 8\times 10^3\ \mathrm{mol^{-1}\cdot L\cdot s^{-1}},\quad k_4 = 4\times 10^7\ \mathrm{mol^{-1}\cdot L\cdot s^{-1}},$$

$$k_5 = 80\ \mathrm{mol^{-1}\cdot L\cdot s^{-1}},\quad A = 0.6\ \mathrm{mol\cdot L^{-1}},\quad B = 0.6\ \mathrm{mol\cdot L^{-1}}.$$

将这些反应常数与反应条件代入新的控制参量有 $\varepsilon_1\approx 10^{-2}$, $\varepsilon_2\approx 5\times 10^{-4}$,所以变量 z 是变化最慢的量,它比变量 x 慢两个数量级,比 y 慢三个数量级,这说明我们选择的时间尺度是合适的. 另外由于 $\varepsilon_1\gg\varepsilon_2$,变量 y 的变化相对于 x 来说是一个快过程. 为了进一步简化 BZ 反应的动力学方程,可以认为变量 y 总是处于动态平衡下,这样就可以通过绝热消除法把方程的维数降下来. 令

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = -qy - xy + fz = 0,$$

得 $y=fz/(q+x)$,代入方程(3.2.4)得到一个双变量微分方程组:

$$\varepsilon_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = x - x^2 - fz\frac{x-q}{x+q}, \tag{3.2.5a}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = x - z. \tag{3.2.5b}$$

当然,由于相对于 z 来说 x 也是一个快变量,以上方程还可以通过绝热消除法进一步简化,从而得到一个单变量方程. 但是这样做会使 BZ 反应失去一个重要的全局动力学性质,即系统的可激发性. 关于系统可激发性的概念在本书第十章介绍螺旋波动力学理论时会仔细讨论.

§3.3　生态系统及延迟模型

生态系统的动力学,是研究在一个生态环境中种群的群体数量 N 随时间的演化过程. 所用的基本定律是守恒定律:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \text{出生} - \text{死亡} + \text{迁移}.$$

假设种群的数量分布在空间上是均匀的,并且不考虑迁移,则单个群体最简单的生长模型为

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = bN - dN. \tag{3.3.1}$$

这里 b, d 分别是种群的出生率与死亡率. 由于该方程是一个线性方程,种群数量随时间的演化只有两种可能: 当 $b>d$ 时种群数量随时间指数型增长;当 $b<$

d 时种群数量随时间减少，最后趋于零. 这两种动力学行为都没有实验观测上的依据. 为了使模型更加切合实际情况，需要在这个线性模型上引入非线性因素：承载能力(carrying capacity). 观测中发现种群的相对生长率会随种群的数量增加单调减小，如图 3.1 所示.

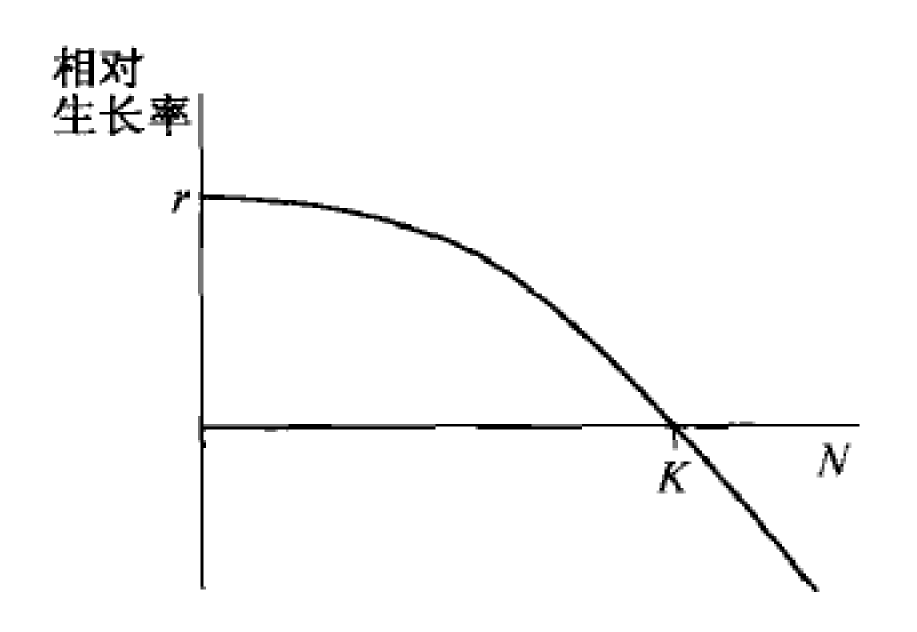


图 3.1 种群相对生长率随数量的变化

最简单的情况是种群的相对生长率随种群数量的增加线性减小，这样方程(3.3.1)变成：

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN\left(1-\frac{N}{K}\right). \tag{3.3.2}$$

以下证明这个单变量自治系统 $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t=f(N)$ 不会出现周期振荡现象. 假设自治系统出现周期振荡现象，则有

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} \neq 0,\ N(t) = N(t+T).$$

这里 T 是振荡周期. 将方程两端同乘 $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$ 并在 t 到 $t+T$ 时间对方程积分，得

$$\int_t^{t+T}\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right)^2\mathrm{d}t = \int_t^{t+T} f(N)\,\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_{N(t)}^{N(t+T)} f(N)\mathrm{d}N = 0.$$

因而 $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t=0$，与前假设矛盾. 这种情况在多变量系统中也可能成立. 例如，可以证明多变量梯度系统不存在周期振荡行为. 多变量梯度系统的动力学方程为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = -\nabla V(\boldsymbol{x}).$$

其中 V 是势函数，也就是说 V 对于 $\boldsymbol{x}$ 是单值的. 假设系统存在周期振荡行为，则在一个周期完成后系统回到原处，$\Delta V=0$. 从另外一方面看，

$$\Delta V = \int_0^T \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_0^T\left(\nabla V\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t = -\int_0^T\left\|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right\|^2\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

除了 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t=0$ 的情况外这个推论与原推论矛盾. 而 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t=0$ 对应于不动点，不是振荡行为.

方程(3.3.2)有时并不能准确反映实际系统中的种群动力学行为，原因之

一是该方程没有“记忆”. 在实际系统中，现在时刻的状态可能与前一段时间系统的状态有关系. 例如，一个新出生的婴儿过二十年左右才能进入生育期，现在人口的增长率受二十年前人口出生率的影响；某些有潜伏期的传染病，如非典型性肺炎，如果潜伏期的时间为 T，则现在的感染率受 T 时刻之前感染人数的影响；在决策过程中，由于一系列操作上的延迟，现在的政策可能是根据一段时间以前的社会状态所作出的，这也会引起延迟效应. 一般形式的带有记忆效应的种群生长模型应是一个微分积分方程，相对于方程(3.3.2)带延迟的种群生长模型应为

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}=rN(t)\left[1-K^{-1}\int_{-\infty}^{t}\omega(t-s)N(s)\mathrm{d}s\right]. \tag{3.3.3}$$

这里 ω 是权重函数，一般情况下它是一个平均值为 T 的高斯函数. 如果令高斯函数的二阶矩趋于零，ω 就是一个 δ 函数. 这时以上方程变为带延迟的微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}=rN(t)\left[1-\frac{N(t-T)}{K}\right]. \tag{3.3.4}$$

将此方程无量纲化，令 $n=N/K,\tau=rt,\Gamma=rT$，得

$$\frac{\mathrm{d}n(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=n(\tau)[1-n(\tau-\Gamma)]. \tag{3.3.5}$$

此方程有唯一控制参量 Γ.

简单的定性分析可以说明，即使单变量的延迟模型也可以表现出振荡行为. 如图 3.2 所示，假设当 $t=t_1$ 时 $N(t_1)=K$，而对于某个时刻 $t<t_1$ 时 $N(t-T)<K$，由于 $1-N(t-T)/K>0$，在 $t=t_1$ 时刻 $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t>0$，种群数目上升；当 $t=t_1+T$ 时 $N(t-T)=N(t_1)=K,\mathrm{d}N/\mathrm{d}t=0$，种群数目上升到最大值；对于 $t_1+T<t<t_2$ $(N(t_2)=K)$ 的一段时间里，由于 $N(t-T)>K$（见图 3.2），种群数目开始下降，这种下降趋势要延续到 $t=t_2+T$ 时才能停止，因为这时 $N(t_2+T-T)=N(t_2)=K$. 如此上升与下降行为交替出现，构成了系统的周期振荡现象，振荡周期大约为延迟时间的四倍. 对延迟系统的定量分析将在第五章介绍线性稳定性分析时详细讨论.

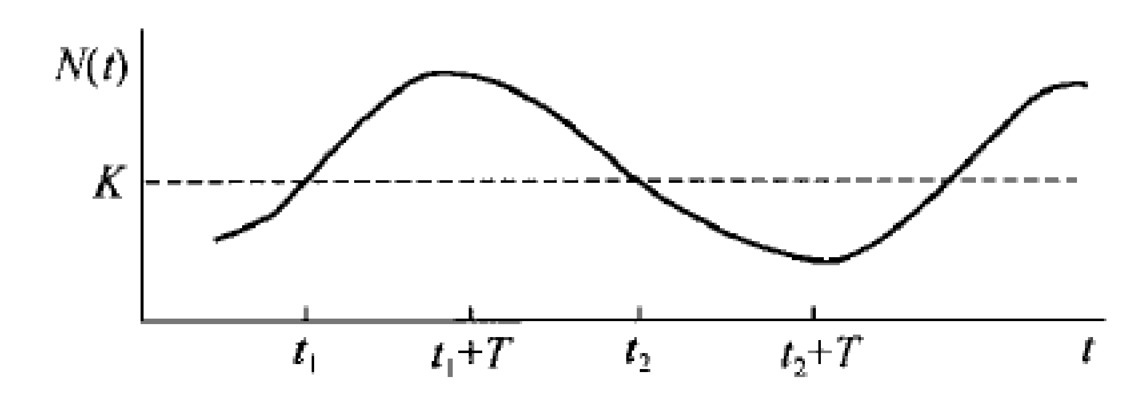


图 3.2 延迟模型中的振荡现象

延迟模型不属于第一章概论中讨论的一般性微分方程.但它能很好地刻画一些自然界或实验室观察到的现象.例如,20 世纪 50 年代澳大利亚科学家对一种生长在绵羊身上的苍蝇(sheep-blowfly)的种群数量进行系统实验研究发现,在恒定温度、恒定食物源的环境下苍蝇的种群数量显示出很有规律的振荡行为,振荡周期为 35～40 天[19],见图 3.3.

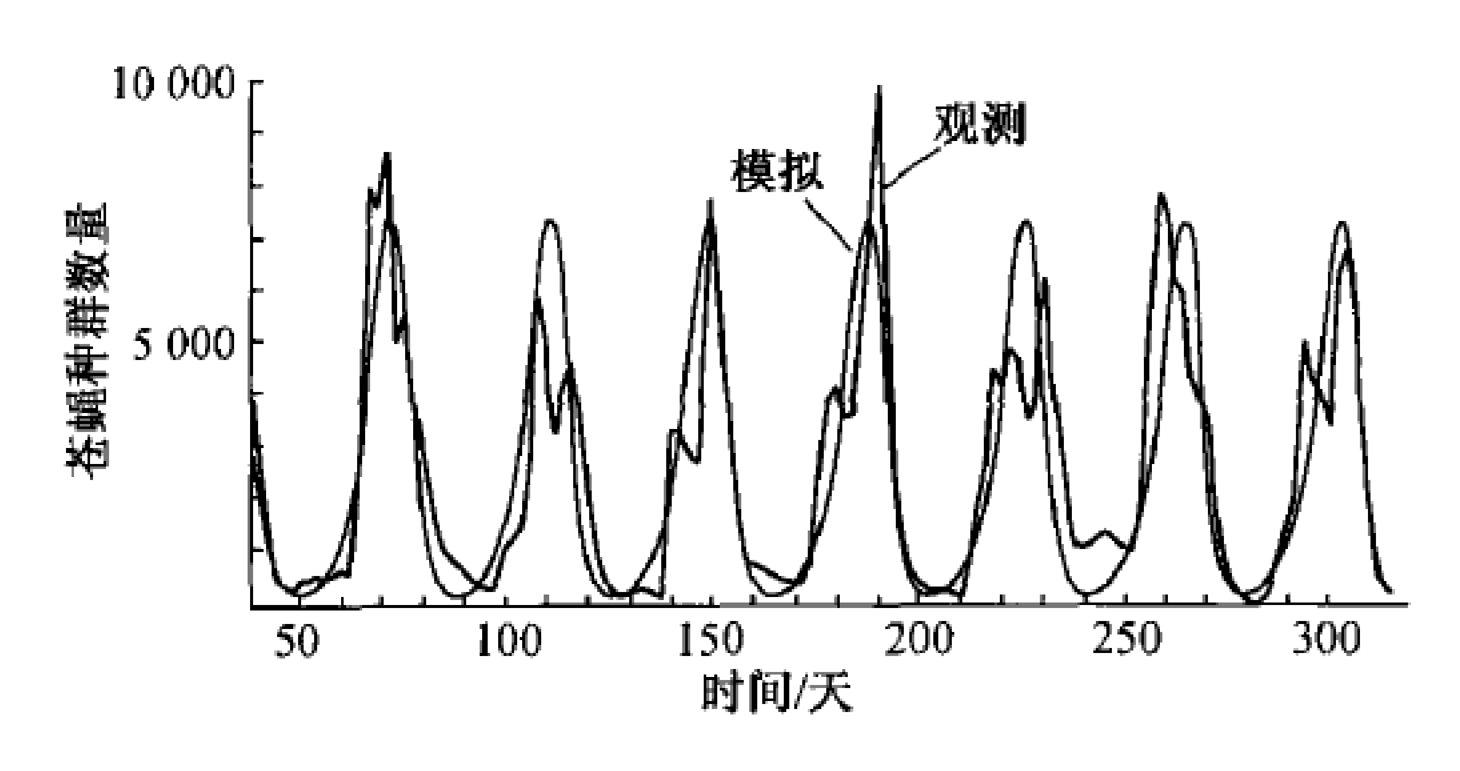


图 3.3　苍蝇群体数量随时间变化的实验观测与模拟

将方程(3.3.4)应用于此系统,承载能力 K 对应于食物供应量;延迟时间 T 对应于一只苍蝇从幼虫到成虫的生长时间;只有增长率是内部因素所决定的量.图 3.3 同时表示了用方程(3.3.4)做数值模拟所得到的结果与实验数据的比较.在模拟中取 $rT=2.1$,得到的周期是 $4.54T$.在实验中观察到的苍蝇种群数量的振荡周期是 40 天左右,根据振荡周期大约为延迟时间 4 倍的推论,模型得到的延迟时间应该是 9 天左右,实验中观察到的数据是 11 天左右.另外,模型预测改变承载能力 K 不会影响振荡周期,因为在无量纲方程中它已经被写入无量纲的种群数量中.实验中发现将食物供应量加倍没有改变苍蝇种群数量的振荡周期,符合方程(3.3.5)的预测.另一个实例是对加拿大 Churchill 地区旅鼠种群数量的研究[20].观测它的数量有一个周期为 4 年左右的振荡行为.应用模型(3.3.5)可以比较好地解释这种振荡现象.得出的延迟时间 T 为0.72 年,接近于旅鼠的生长周期.必须指出的是,不是所有在生态系统中发现的种群数量振荡现象都可以由延迟模型解释.例如,人们所熟悉的蝉的种群数量有 13 年或 17 年的振荡周期,解释这个现象的最好模型是“捕食者—猎物”双变量模型,它也可以导致种群数量的振荡.

除了生态研究以外,生理研究也经常遇到延迟模型.许多生理性疾病的早期都会表现出周期振荡现象:原来的稳定系统会发生振荡行为,原来的周期系统,如呼吸系统会出现阵发性的不规律现象.这些生理性疾病被人们称为动力

学疾病，因为它们的出现与系统动力学的失稳有关．一个典型的例子是一种呼吸系统的疾病，它的表现形式是呼吸频率随时间周期性改变，因而呼吸量随时间上下波动[21]．图 3.4 是一个病人发病时的典型呼吸模式，可以看到呼吸量随时间周期变化．

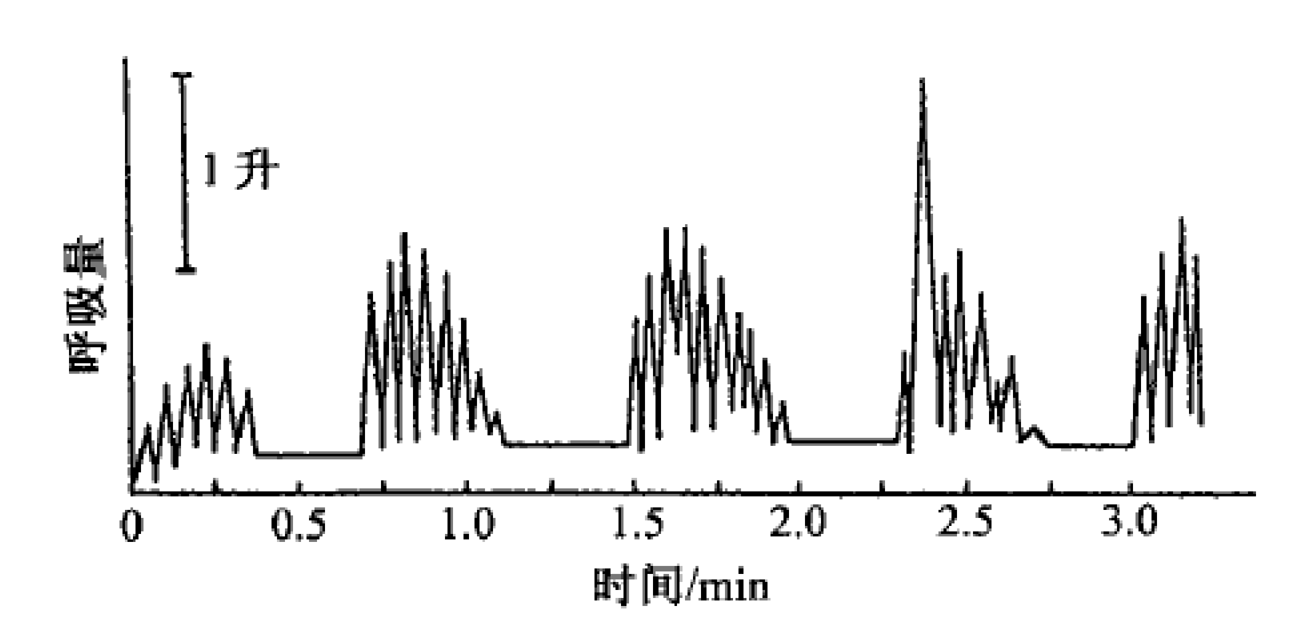


图 3.4　呼吸系统动力学病的典型呼吸模式

建立这个动力学疾病的数学模型的第一步，是了解控制呼吸系统的生理因素．人体血液中的二氧化碳含量由体内的一些感受器测量，神经系统将这些测量信号传入大脑，大脑会根据测量信号发出调节呼吸量的信号，经神经系统传到肺部，后者完成呼吸量的调节．由于神经系统传递信号需要时间，整个呼吸控制系统是一个带延迟的动力系统．人们已经知道呼吸量随血液中二氧化碳浓度的变化关系是一个类似于 S 形的曲线，因而可以假设呼吸量 V 与二氧化碳浓度 c 可以用希尔(Hill)函数表示：

$$V = V_{\max}\frac{c^m(t-T)}{a^m + c^m(t-T)}.$$

这里 $V_{\max}$是最大呼吸量；参数 a 与希尔系数 m 为正数，它们可以由实验确定．假设体内二氧化碳的产生率 p 不随时间变化，二氧化碳的排出率正比于呼吸量与

注意到方程中唯一的控制参量是二氧化碳的产生机制与排出机制的竞争关系.应用将在第五章介绍的线性稳定性分析方法,可以得到此系统产生周期振荡行为的条件:

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right)_{V_0} > \frac{\pi}{2\alpha x_0 \Gamma}, \tag{3.3.8}$$

其中 V_0,x_0 分别对应于在平衡条件下呼吸量与二氧化碳的浓度;$(\mathrm{d}V/\mathrm{d}t)_0$ 代表在平衡位置 V_0 随 x_0 的变化率.式(3.3.8)表示如果呼吸量随血液中二氧化碳浓度变化过于敏感,或神经系统在传递信号过程中延迟太长,都会引起这类呼吸系统的动力学疾病.

§3.4　微观自组织

在本章的第二节讨论过,对于一个宏观化学反应系统,我们可以假设分子间化学反应所需要的反应时间远小于分子在随机运动中发生碰撞所需要的时间,即扩散时间.这时可以将反应过程看成是瞬时的.如果再假设分子间的反应事件是独立事件,则化学反应的动力学服从质量作用定律.在一个微观反应器中,以上两个假设可能都不成立,因而化学反应的质量作用定律也可能不成立,需要重新建立数学模型.在生命体中,生物化学反应一般都是在细胞中进行的,而细胞的线性尺度是 1 到几十 μm 之间.在这个尺度下质量作用定律还是否成立?如果不成立,那么描述细胞内反应动力学的方程应该是怎样的形式,这是本节要讨论的问题.这个问题是近十年来才逐步引起人们注意的[22].

首先分析一个典型的生物化学酶催化反应:

$$\mathrm{S} + \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{ES} \longrightarrow \mathrm{E} + \mathrm{P}, \quad \mathrm{P} \longrightarrow 0. \tag{3.4.1}$$

此反应式表示反应物 S 首先与反应酶 E 结合形成复合物 ES,在复合物状态下反应物被活化,生成反应产物 P 并放出酶;反应产物以一定速率变为与本反应无关的其他生物化学物质.在这个反应中,我们假设反应产物对复合物的形成有催化作用,这在生物化学反应中是普遍存在的.整个反应的微观机制由图 3.5 示意:一个催化酶分子 E 与反应产物分子 P 结合后被活化,使其更容易与反应物 S 形成复合物;被活化的酶分子与反应物 S 结合形成反应物——酶复合物;在经过一段变构时间 T_1 后复合物分解并释放出反应产物分子与催化酶分子;这个酶分子经过一段时间 T_2 后回到初始状态.只有催化酶回到初始状态后,下一个反应循环才可能开始.在生物化学反应中,由于酶分子的质量很大,变构时间通常是比较慢的.假设变构过程是反应的控制步骤,则可以忽略其他反应过

程所需要的时间，将反应总时间写为：$T=T_1+T_2$.

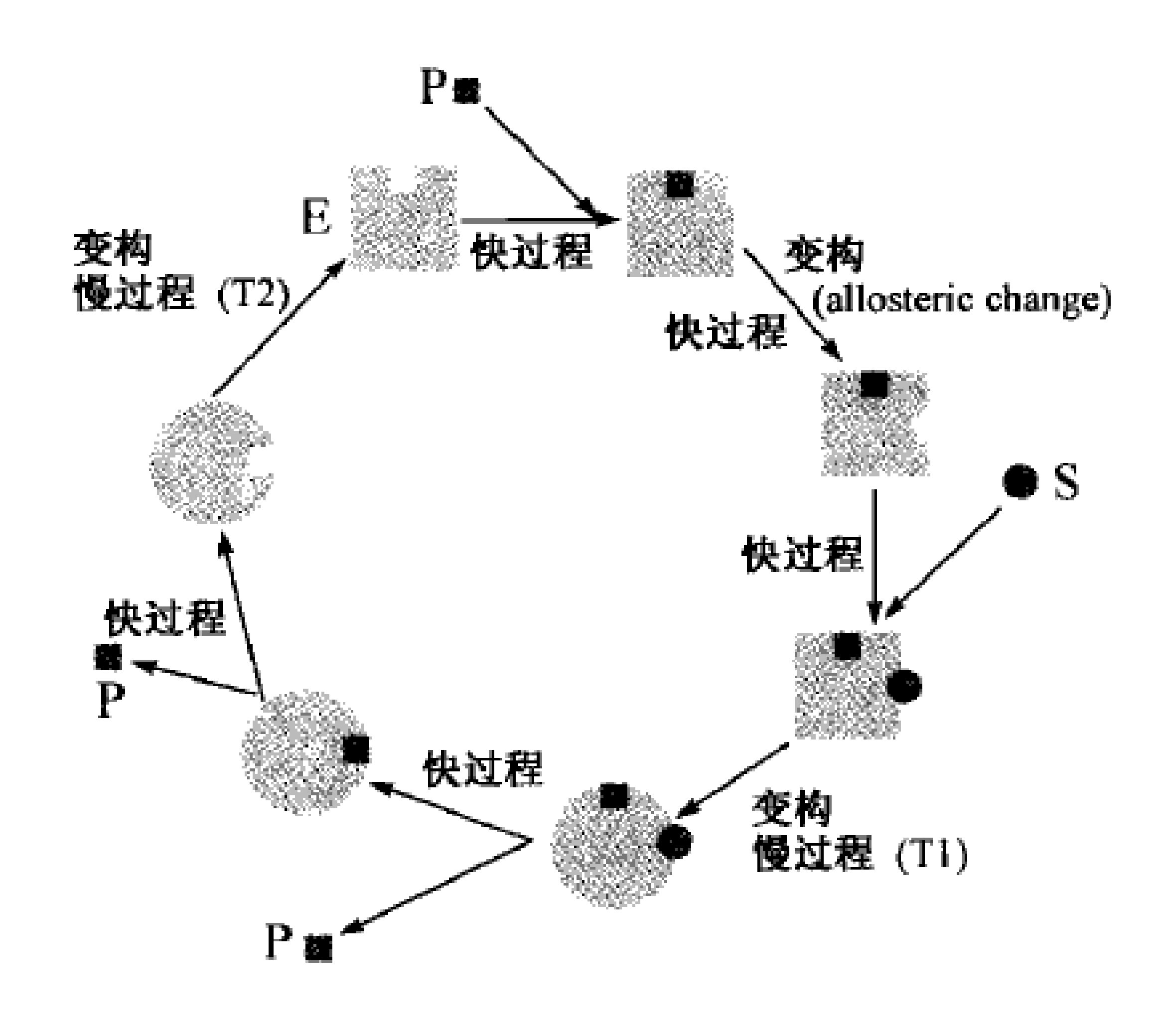


图 3.5 典型生化反应示意图

由于反应的起始受反应产物的调节，而反应产物在生成后，在反应器中需要一个随机扩散过程才能与反应酶分子碰撞，因此分子在反应器中的扩散时间对反应速率是非常重要的. 下面就定义与反应器相关的几个特征时间尺度.

混合时间 反应产物在反应器的某个位置产生后，通过扩散，经过一段时间在反应器的任何一个地方，以相同的概率找到它所需要的时间，称为混合时间. 如果反应器的线性尺度为 L，反应物的扩散系数为 D，则通过扩散方程可以粗略估计混合时间的数量级大小为

$$t_{\text{mix}} \propto L^2/D. \tag{3.4.2}$$

行走时间 假设反应器中只存在一个酶催化分子 E. 在反应器中任意部位释放一个反应产物 P，反应产物寻找到酶，并通过一个表面扩散过程与其结合所需要的时间，为行走时间. 假设忽略两分子的相接(docking)过程，忽略反应产物在酶表面的二维扩散过程，认为反应产物通过布朗运动，达到酶分子表面的一个半径为 R 的范围后与之结合. 由于一般情况下酶分子的质量远大于反应产物的分子质量，酶分子可以看成是不动的. 在此情况下，可以通过扩散限制反应(diffusion-controlled reaction)理论估计行走时间的量级大小：

$$t_{\text{traffic}} \propto L^3/DR. \tag{3.4.3}$$

输运时间 假定反应器中有 N 个酶分子，产物分子找到第一个酶分子所需要的平均时间为运输时间. 如果酶分子在反应器中是均匀分布的，并且相互不关联，则有

$$t_{transit}=(1/N)t_{traffic}\propto L^3/NDR. \tag{3.4.4}$$

注意到 $L_{corr}=(Dt_{transit})^{1/2}$ 表示反应产物分子找到酶分子所经过的平均距离，这个特征尺度可以被认为是反应(3.4.1)的相关半径. 与反应器的线性尺度比较，如果反应器的线性尺度远大于反应的相关半径($L\gg L_{corr}$)，反应产物分子在生成后就可以与邻近区域的一个酶分子结合. 由于携带反应状态信息的反应产物在产生后不可能走很远，整个反应系统没有长程关联. 在这种情况下可以认为反应事件是独立的，符合质量作用定律的第二个假设. 相反，如果 $L\ll L_{corr}$，反应产物分子生成后，需要在反应器中走许多来回才能找到一个酶分子，这意味着这个反应产物分子可以以相同概率与反应器中的任何一个酶分子结合. 由于反应产物分子带有反应系统状态的信息，反应器中的所有酶分子都通过反应产物产生了关联. 在这种情况下反应事件就不再是独立的，质量作用定律的第二个假设不再成立.

再将以上讨论的特征时间尺度与分子的反应时间 T 比较. 在一个宏观反应器中，由于反应器的线性尺度 L 很大，$t_{transit}, t_{mix}\gg T$，在这种情况下一个反应事件可以被看成是瞬时的，因而满足质量作用定律的第一个假设. 相反，在一个微观反应器中可能会有 $t_{transit}, t_{mix}\ll T$，这时一个反应事件就不能被看成是瞬时的，质量作用定律也就不再成立. 从这个意义上讲，一个反应器从宏观到微观的转变点为：$T=t_{transit}$.

一个细胞的线性尺度约为 1 μm. 假设酶分子的靶半径 $R=1$ nm细胞中酶分子的数量为 $N=100$，对应的浓度为 $c\approx0.1$ μmol/L，如果分子的扩散系数为 $D=10^{-6}\,\mathrm{cm^2/s}$，通过式(3.4.2)，(3.4.4)得$t_{mix}=0.01$ s，$t_{transit}=0.1$ s. 这说明细胞可能是一个微观反应器. 如果反应时间 $T>t_{transit}$，则质量作用定律的两条基本假设就都不成立了. 在这种情况下，需要重新建立微观反应器中的反应动力学方程.

由于相对于反应时间扩散时间很短，可以认为扩散时间是瞬时的. 在这个假设下可以建立微观反应(3.4.1)的动力学模型. 首先确定系统变量：令 $n(t)$ 为酶分子在初始态，即未激发态的数量；$m(t)$ 为反应产物的数量；$p(\phi,t)$ 为酶分子在反应循环的分布密度，其中 ϕ 是反应循环的相位，它表示一个酶分子在一个反应循环中的进度；$v(t)$ 为酶分子被活化的反应几率密度. $v(t)$ 分为两部分：第一部分是自动反应($E\to E^*$)，在 Δt 时间里的反应几率为 ω_0；另一部分是催化反应：$E+P\to E^*P$，在 Δt 时间里的反应几率是 ω_1. 因而总反应几率为

$$\omega=1-(1-\omega_0)(1-\omega_1)^m.$$

假设 ω_0,ω_1 很小，则有 $\omega\approx\omega_0+m\omega_1$. 酶分子活化的反应几率密度为

$$v(t) = \frac{\omega}{\Delta t} \approx v_0 + v_1 m(t). \tag{3.4.5}$$

这里 $v_0 = \omega_0/\Delta t, v_1 = \omega_1/\Delta t$. 在 Δt 时间内，有 $v(t)n(t)\Delta t$ 个酶分子进入反应循环，$v(t-T)n(t-T)\Delta t$ 个酶分子离开反应循环；在 $t-T_1$ 时刻进入反应循环的酶分子产生反应产物分子. 利用守恒定律，这个反应的动力学方程为

$$\frac{\mathrm{d}n(t)}{\mathrm{d}t} = -v(t)n(t) + v(t-T)n(t-T), \tag{3.4.6a}$$

$$\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t} = -rm(t) + v(t-T_1)n(t-T_1), \tag{3.4.6b}$$

$$v(t) = v_0 + v_1 m(t). \tag{3.4.6c}$$

其中 r 是反应分子的衰变速率，$T = T_1 + T_2$.

由以上推导可以看出，在微观反应器中反应的动力学方程是一个有“记忆”的延迟模型. 在上节的讨论中看到，延迟模型在延迟时间达到一个临界值时会产生周期振荡现象，这种现象被称之为微观自组织. 微观自组织与宏观自组织相比有本质上的区别. 在一个宏观自组织系统中，分子间不存在长程关联，自组织行为是由反应的宏观动力学不稳定性引起的；在一个微观自组织系统中，分子间存在强关联，这种强关联可能导致延迟效应，从而引发系统的振荡行为.

第四章　有限维动力系统

本章讨论有限维度系统的动力学行为，重点集中在一维与二维系统. 在讨论中介绍非线性动力学常用的几个基本概念，包括：相空间表示，这样的表示是研究非线性动力学问题的主要工具；相空间中的中心流形与不变流形，中心流形概念的引入使处理动力学问题更加简单化与程式化，不变流形概念的应用可以对动力系统的渐进行为进行系统的分类；保守系统与耗散系统，这是非线性动力学研究的两大类系统；稳定性概念，这是非线性研究的核心.

§4.1　相空间

在第一章概论中曾经讨论过，一般情况下一个无记忆的动力系统的数学方程，可以写为如下的一般形式：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\lambda). \tag{4.1.1}$$

$\boldsymbol{x}$ 是系统的变量，其维数可能是有限的（常微分方程），也可能是无限的（偏微分方程）. λ 是系统控制参量的集合. 对于一个线性问题，以上方程总可以通过线性变换使其对角化，或变为约当(Jordan)形式，在这些形式下可以容易得到问题的解析解. 对于一个非线性问题，当维数大于 2 时，现代数学还没有发展出任何普适性的方法得到问题的解析解，讨论这类问题需要发展新的方法，其中最有效的方法之一，就是舍去对系统动力学性质的细节，转而研究系统的定性性质与渐近态行为. 研究动力系统的定性性质的有效工具是微分几何学. 首先通过几个例子说明微分几何学在研究动力系统中的优越性.

考虑如下一个简单的一维动力系统：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sin x. \tag{4.1.2}$$

如果用解析的方法研究这个系统，就需要在一定的初始条件下得到这个方程的解析解，在一般情况下是很困难的，但对这个问题来说可以找到它的解析形式：

$$t = \ln\left|\frac{\csc x_0 + \cot x_0}{\csc x + \cot x}\right|. \tag{4.1.3}$$

这里 x_0 是方程的初始条件. 原则上说这个解析解的形式给出了变量在任何条件下随时间变化的行为. 但是直观地从(4.1.3)中得到这些行为,还是要再下一定的功夫. 可以首先把 x 写成 t 的函数

$$x = 2\arctan\left(\frac{e^t}{\csc x_0 + \cot x_0}\right),$$

再用微积分中所学到的作图法找出曲线的极值点、拐点等,然后作图.

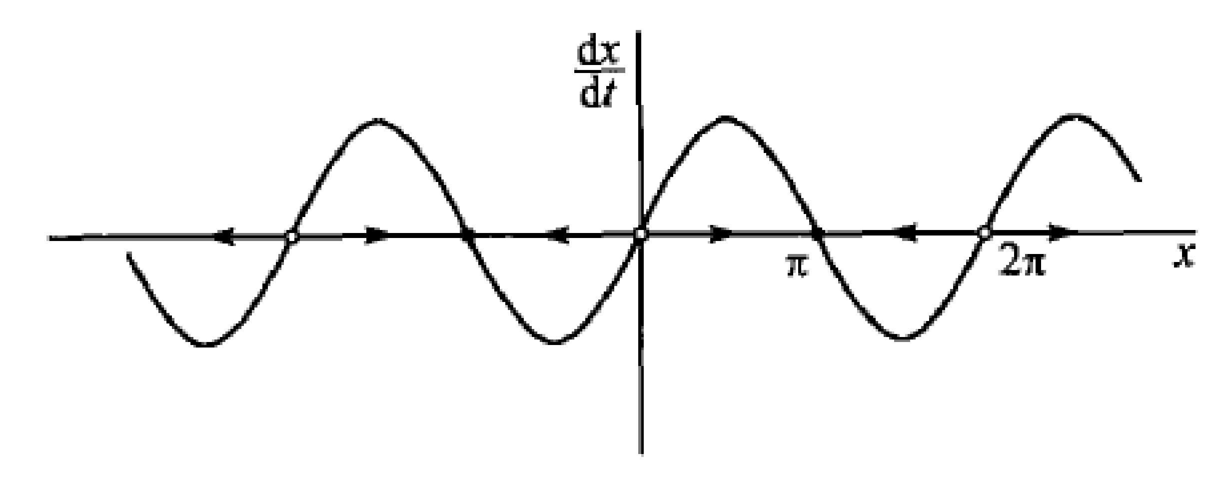


图 4.1　方程 $dx/dt=\sin x$ 的流形图

现在用几何方法讨论方程(4.1.2). 我们只关心系统的一些特征行为,如拐点、渐近态行为,即不动点. 把 x 想象成一个粒子的位置坐标,则 dx/dt 是粒子的运动速度, $\sin x$ 代表在 x 轴的向量场,对应于粒子在 x 位置时的运动速度. 向量场随粒子变化的情况由图 4.1 所示. 系统的动力学行为在此图中表现得一目了然. 例如,当初始条件为 $x=\pi/4$ 时,粒子向右边运动($dx/dt>0$);当 $\pi/4<x<\pi/2$ 时,粒子加速运动($d^2x/dt^2>0$),当 $\pi/2<x<\pi$ 时粒子减速运动($d^2x/dt^2<0$),所以 $x=\pi/2$ 是曲线的一个拐点;当 $x=\pi$ 时, $dx/dt=0$,所以 $x=\pi$ 是一个不动点. 整个流形图如图 4.2 所示. 用流体力学的眼光看,想象流体沿 x 轴流动,流动速度根据(4.1.2)式随位置变化. 当 $dx/dt>0$ 时,流线指向右边,当 $dx/dt<0$ 时,流线指向左边,当 $dx/dt=0$ 时,没有流线,所对应的点被称为定点. 图 4.1 显示出两类定点:实心的定点称为"汇",因为邻近的流体都流向这里;空心的定点称为"源",因为邻近的流体从这里流出. 图 4.2 给出了系统状态在不同初始条件下随时间的演化,可以看到所有的流线都随时间趋向于"汇"定点. 在非线性科学中,"汇"定点是稳定的,如

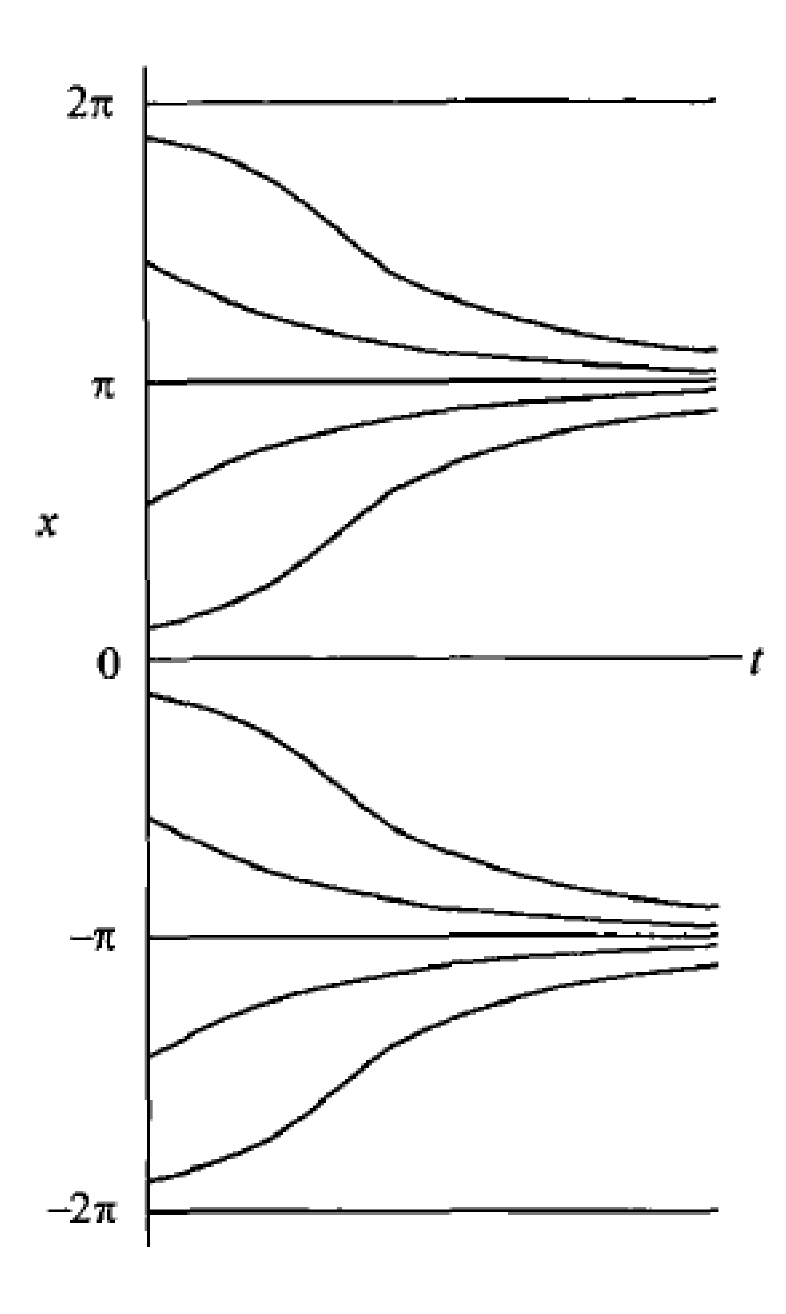


图 4.2　系统随时间的演化图

果系统的状态发生偏离，它会自动地回到原位置."源"定点是不稳定的，如果系统的状态发生偏离，它会自动从这些点走开.稳定的定点又叫动力系统的"吸引子".

第二个例子是§3.1讨论的铁环模型方程(3.1.7).令 $\varepsilon=0$，去掉惯性项，得方程

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\sin\theta(\lambda\cos\theta-1). \tag{4.1.4}$$

方程(4.1.4)也有解析解

$$t=\frac{\lambda}{\lambda^2-1}\ln\left[\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{1/\lambda}\left(\frac{\sin\theta}{\lambda\cos\theta-1}\right)\right]+C,\quad \lambda\neq 0.$$

设初始条件为 $\theta_{t=0}=\theta_0$，上式可写为

$$\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{1/\lambda}\frac{\sin\theta}{\lambda\cos\theta-1}=\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)^{1/\lambda}\frac{\sin\theta_0}{\lambda\cos\theta_0-1}\mathrm{e}^{\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)t}.$$

即使有这样的解的形式我们还是很难画出变量随时间变化的图形.只考虑 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 的情况，可以计算出系统的渐近行为($t\to\infty$).当 $\lambda<1$ 时，上方程右边等于零，因而

$$\tan\frac{\theta}{2}=0\quad\Rightarrow\quad\theta=0,$$

或

$$\sin\theta=0\quad\Rightarrow\quad\theta=0,\pi.$$

不动点为：$\theta=0,\pi$.当 $\lambda>1$ 时，上述方程右边趋于无穷大，因而

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\to\infty\quad\Rightarrow\quad\theta=\pi,$$

或

$$\lambda\cos\theta-1=0\quad\Rightarrow\quad\theta=\pm\arccos\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

不动点为：$\theta=0,\pi,\pm\arccos\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

现在用流形方法分析方程(4.1.4).容易得出在任何情况下系统都存在不动点 $\theta=0,\pi$.当 $\lambda<1$ 时

$$\lambda\cos\theta-1<0,$$

$$\sin(0+\delta)(\lambda\cos\theta-1)<0,$$

$$\sin(0-\delta)(\lambda\cos\theta-1)>0,$$

所以 $\theta=0$ 是稳定不动点；而

$$\lambda\cos\theta-1<0,$$
$$\sin(\pi+\delta)(\lambda\cos\theta-1)>0,$$
$$\sin(\pi-\delta)(\lambda\cos\theta-1)<0,$$

所以 $\theta=\pi$ 是不稳定不动点.

当 $\lambda>1$ 时系统又多出了两个不动点，它们的位置可以通过图 4.3 很容易地得到. 这时曲线 $\cos\theta$ 与 $\lambda=\text{const.}$ 有两个交点，交点的位置为

$$\theta=\pm\arccos\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{4.1.5}$$

由图 4.3 还可以看出当 $\theta<\arccos(1/\lambda)$ 时 $\lambda\cos\theta-1>0$，当 $\theta>\arccos(1/\lambda)$ 时 $\lambda\cos\theta-1<0$. 由于 $\sin(\arccos(1/\lambda))>0$，所以 $\theta=\arccos(1/\lambda)$ 是稳定不动点. 同样的分析也可以说明 $\theta=-\arccos(1/\lambda)$ 也是稳定不动点. 同时 $\theta=0$ 变为不稳定不动点，因为这时 $\lambda\cos\theta-1>0$. 图 4.4 给出了系统在临界点前后的流形图. 系统的动力学分岔图由图 4.5 显示，图中的实线与虚线分别表示稳定点与不稳定点随控制参量的变化，这类分岔被命名为超临界叉形分岔.

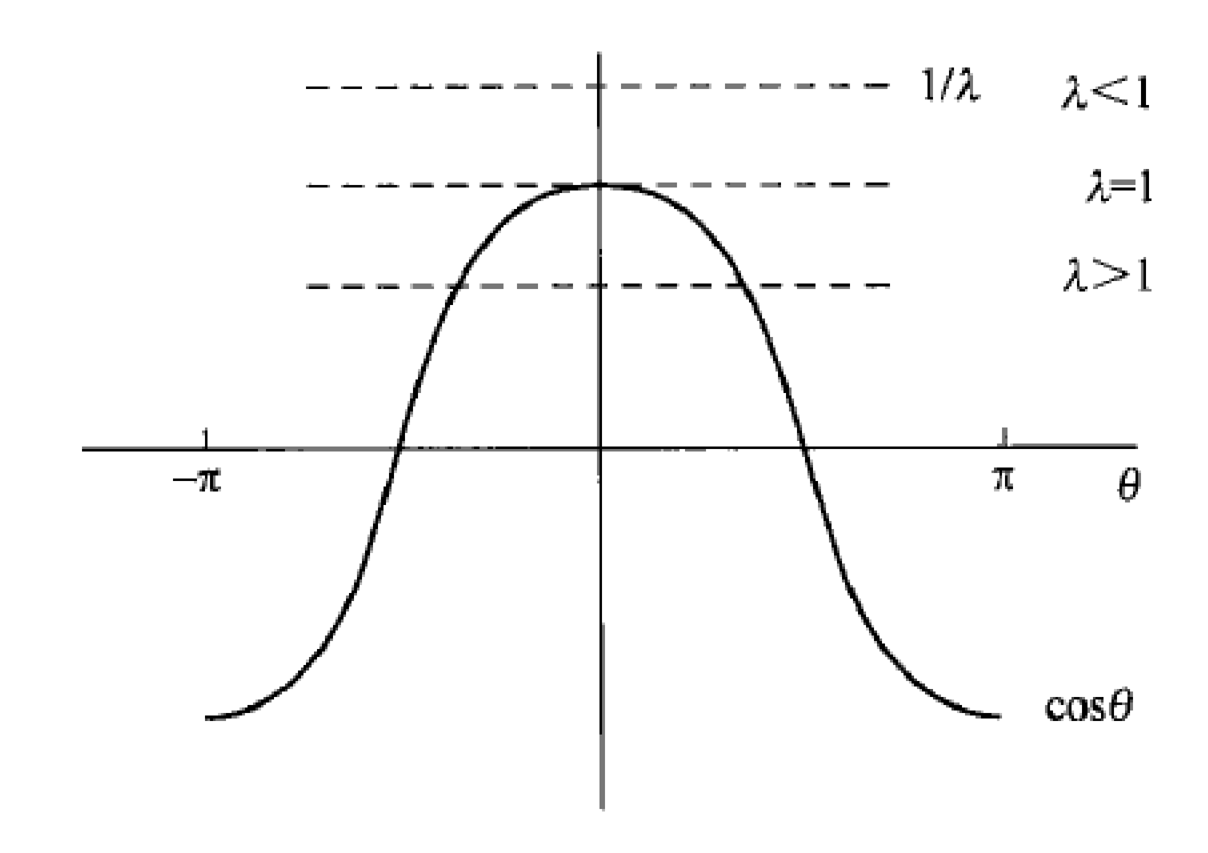


图 4.3 铁环问题的非零不动点

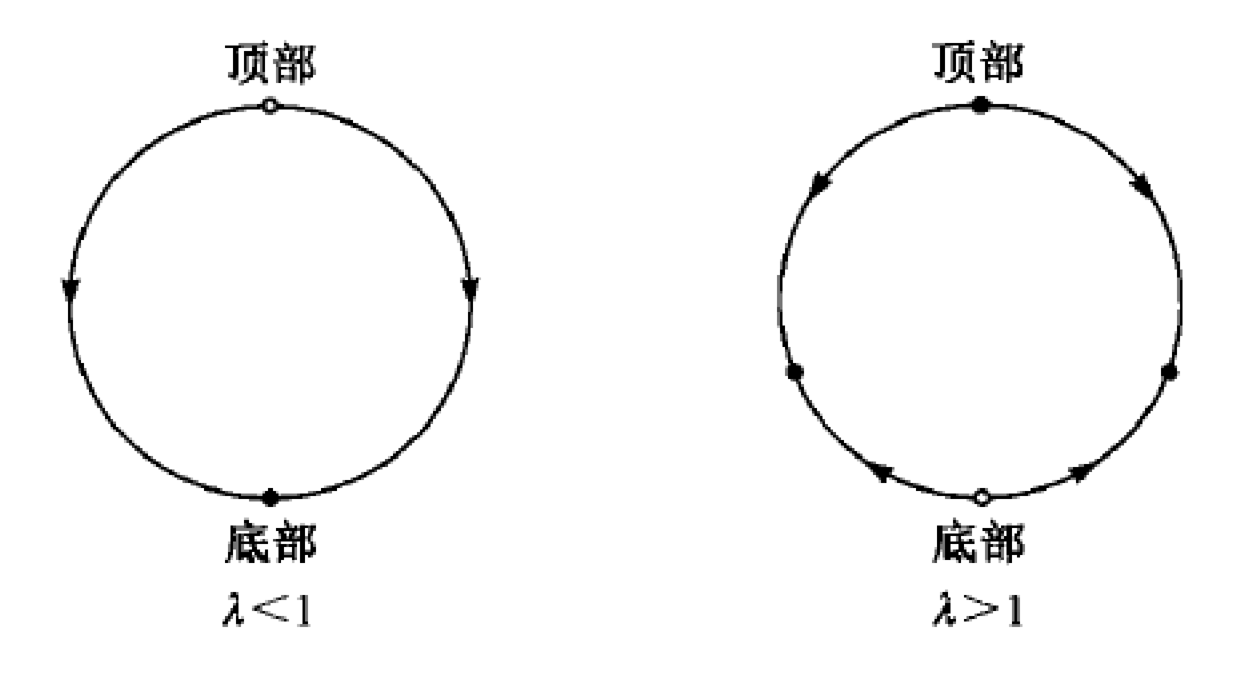


图 4.4 铁环问题的流形图

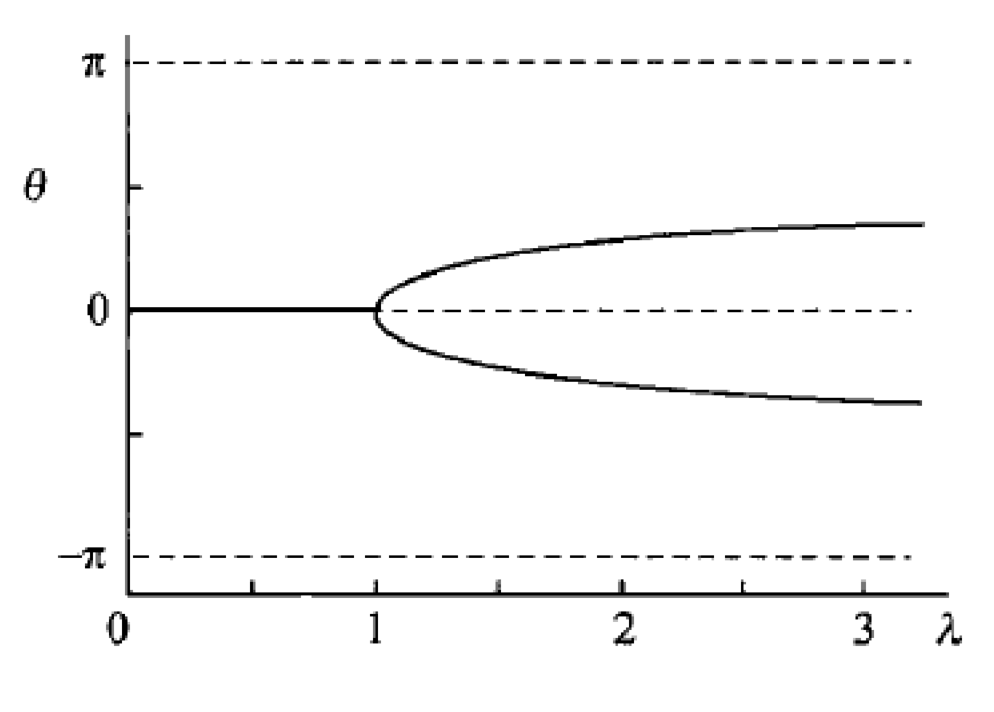


图 4.5　铁环问题的分岔图

将以上的讨论作一个总结就引出了流形理论. 首先定义相空间：定义欧几里得空间$(x_1,\cdots,x_n)$，各分量(定义见下)之间相互正交：

$$\sigma_i \cdot \sigma_j = \delta_{ij}, \qquad i,j=1,\cdots,n.$$

方程(4.1.1)的每一个向量 $\boldsymbol{x}$ 对应于这个 n 维空间的一个点 P；反过来n 维空间的每一个点也唯一地对应于一个 $\boldsymbol{x}$ 值. 这样，动力系统中每一个状态随时间的演化$(x_1(t),\cdots,x_n(t))$在相空间唯一地对应于一条空间轨迹. 除了奇异点之外，在空间轨迹的每一个特定点上都可以唯一地定义一个切线方向$(v_1,\cdots,v_n)$，$\boldsymbol{v}$ 的集合构成速度场. 借用流体力学中的术语这个速度场被称为**流场**，或**向量场**. 向量场的分量定义为 $\sigma_i=\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}s$，这里 $\mathrm{d}s$ 是空间轨迹的一小段弧线. 在欧几里得空间中

$$\mathrm{d}s = \Big(\sum_k \mathrm{d}x_k^2\Big)^{1/2}. \tag{4.1.6}$$

因而有

$$\sigma_i = \Big(1+\sum_{k\neq i}\Big(\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}x_i}\Big)^2\Big)^{1/2}. \tag{4.1.7}$$

将动力学方程(4.1.1)代入此关系式得到

$$\sigma_i = \Big(1+\sum_{k\neq i}\Big(\frac{f_k}{f_i}\Big)^2\Big)^{1/2}. \tag{4.1.8}$$

从式(4.1.8)推论，如果在相空间中的某一点上 $f_i\neq 0$，向量场在这点的方向是唯一确定的. 而 $f_1=f_2=\cdots=f_n=0$ 对应于方程(4.1.1)的不动点. 由于在不动点上流场的方向不确定，不动点又叫奇异点. 对于任意一个初始条件 x_0，如果它不在不动点上，则动力学方程(4.1.1)可以唯一地在相空间确定一条轨迹

$$\phi_t : \boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}_t = \phi_t(\boldsymbol{x}_0). \tag{4.1.9}$$

这个演化轨迹的集合与奇异点的集合一起构成了这个动力学系统的一个**相空间图**(phase portrait)，相空间图包含了整个系统的动力学信息.

在本节的最后介绍一个重要的定理：存在性与唯一性定理．考虑初始值问题

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\tag{4.1.10}$$

如果在一个连通域 $D\subset R^n$ 中系统存在如下性质：(1) $\boldsymbol{f}$ 连续；(2) $\boldsymbol{f}$ 的所有偏微分 $\partial f_i/\partial x_j,i,j=1,\cdots,n$ 连续，则方程的解 $\boldsymbol{x}(t)$在关于$t=0$ 的一个时间领域$(-\tau,\tau)$一定存在，并且解是唯一的．

这个定理否定了除奇异点外在相空间两条轨迹相交的可能性．因为如果在非奇异点两条轨迹相交则在交点处方程的解就不唯一，违反了上面的唯一性定理．由此还可以得到非线性动力学中许多有用的推论．例如，一维自治系统不可能出现振荡现象；二维自治系统不可能出现准周期行为与确定性混沌．

§4.2 中心流形

在研究一个高维动力系统时，在许多情况下系统可能存在不同的动力学时间尺度．一般来说我们关心的只是系统的渐近态行为．如果是这样的话，就可以想办法将系统的快变尺度与慢变尺度分开，并将其快变量做绝热消除．这样做可以将一个高维动力系统的问题，转化成为一个低维动力系统的问题．这个低维系统在欧几里得空间中是一个超曲面，在超曲面上的流形被称为**中心流形**(central manifold)．下面用一个实例说明中心流形的物理意义．

重新分析一下方程(3.1.6)．当 $\varepsilon\ll1$ 时，一般的处理方法是令$\varepsilon\to0$，因而方程可以近似地看成(4.1.4)的形式．但是严格地说，这种将一个二阶微分方程近似为一个一阶微分方程的思想存在原则上的错误．麻烦在于一个二阶微分方程需要两个初始条件，而一个一阶微分方程只需要一个初始条件．对于方程(3.1.6)所描述的这个具体例子，铁环上小球的轨迹是由小球的初始位置与初始速度共同决定的，这两个量可以没有限制地自由组合．而对一阶微分方程(4.1.4)，初始位置与初始速度不能自由选择，在给定初始位置后初始速度完全由方程(4.1.4)决定．因而一阶微分方程(4.1.4)在给定初始条件下的解，一般不能同时满足二阶微分方程(3.1.6)的两个初始条件．在什么意义上方程(4.1.4)可以看成方程(3.1.6)的近似？考察一下方程(3.1.6)的流形就会对这种近似的物理意义有更深刻的了解．令 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t=\Omega$，方程(3.1.6)可以写成

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\Omega, \tag{4.2.1a}$$

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=\sin\theta(\lambda\cos\theta-1)-\Omega. \tag{4.2.1b}$$

这个方程在相空间表示中是一个二维系统，需要两个初始值来确定流形的起始点. 图 4.6 给出了这个动力系统的流形图. 其中曲线 C 由下式定义：

$$C:\varepsilon\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=\sin\theta(\lambda\cos\theta-1)-\Omega=0. \tag{4.2.2}$$

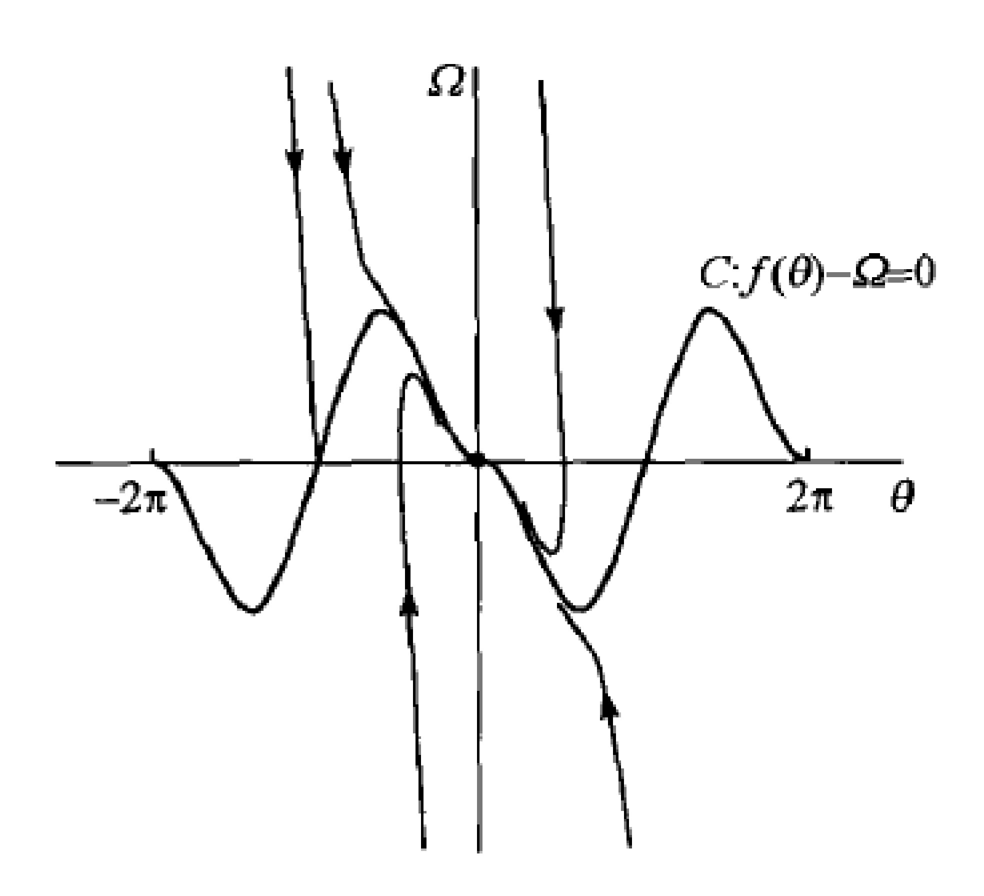


图 4.6 过阻尼铁环方程的流形图

由于 $\varepsilon\ll1$，流形在 Ω 方向的运动速度要远大于在 θ 方向的运动速度. 假设轨迹的初始位置与曲线 C 有一个量级为 1 的距离，即

$$\sin\theta(\lambda\cos\theta-1)-\Omega\sim O(1).$$

那么根据方程(4.2.1)，Ω 将会有一个很大的速度：

$$\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t\sim O(1/\varepsilon)\gg1.$$

在这种情况下，流形会在一个量级为 ε 的时间里，被压缩到距离曲线 C 大约为 ε 的区域. 当 $\varepsilon\to0$ 时，这个区域可以完全用曲线 C 代表. 也就是说，经过这个时间量级为 ε 的暂态过程，系统的流形会被压缩在离曲线 C 很近的区域，然后系统会沿曲线 C 向它的定态演化，演化速度远小于暂态过程. 这个渐近态的演化方程为

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\sin\theta(\lambda\cos\theta-1). \tag{4.2.3}$$

总结上面的讨论可以得出，在一个有不同时间尺度的动力系统中，系统在相空间的运动由两部分组成：暂态部分与渐近态部分. 初始的暂态部分将流形很快地压缩到相空间的一个超曲面上；渐近态部分决定系统在超曲面上的运动. 非线性动力学主要感兴趣的是系统在超曲面上的渐近行为，在上面的例子中就是流形 C 上的动力学过程，这个流形被称之为中心流形.

在 §3.2 分析 BZ 反应动力学方程时，我们也用到了中心流形的方法. 这个方法的基本假设是准平衡态假设，即在反应系统中某些化学反应会在很快的时间里达到离平衡态很近的位置，因而可以在化学反应动力学方程中绝热消除. 由此可见，绝热消除法的应用范围是对慢变量的研究. 如果我们关心的动力学

时间尺度小于快变量的时间尺度，准平衡态假设就不成立，因而就不能对快变量进行绝热消除.

本书的后面会介绍中心流形定理与推导中心流形的一般方法. 应用这些方法可以将一个高维动力系统简化为一个低维动力系统. 在实际问题中会出现维数很高的动力学方程，应用中心流形定理，我们可以将问题变为一般不超过三维的问题. 所以本书的重点是讨论三维以下的动力系统.

§4.3 不变流形

对于一个动力系统，描述系统动力学行为的相空间中一般存在这样一些子集或子空间(A)，从这些子集或子空间出发的任意一个状态都会留在这些子集或子空间中：$\phi_t(A)=A$. 这些子空间被称为**不变流形**(invariant manifold). 从稳定性角度出发看，不变流形可以分为两类：稳定不变流形与不稳定不变流形. 前者对不变流形邻近的区域有吸引作用，在此流形附近的状态会随时间趋向这个不变流形；后者对它附近的状态有排斥作用，在此流形附近的状态会随时间离开这个不变流形. 在研究非线性动力学中，我们更注意研究稳定不变流形，在以后的分析中我们的注意力也集中于此. 一个动力系统从一个初始态出发在演化足够长的时间后会趋向于一个渐近态，这个渐近态可能是不动点，也可能趋于某些更加复杂的行为，如周期振荡态，准周期振荡态，确定性混沌等. 也就是说，在相空间中存在一些子空间，随着系统的演化，所有的轨迹都会被吸引到这些子空间中去. 这些子空间就是系统的稳定不变流形，而某些稳定不变流形构成动力系统的**吸引子**. 非线性动力学系统渐近态的分类可以根据不变流形的维数进行. 由于不变流形的维数一定比描述系统动力学行为的维数(嵌入维数，embedding dimension)小，对不变流形的分类可以按照嵌入维数的大小进行.

单变量系统 单变量模型的嵌入维数为 1. 根据上一节介绍的唯一性定理，单变量无记忆自治系统中唯一可能的不变流形是零维的，即稳定不动点. 以上一章分析的种群生长模型(3.3.2)式为例，图 4.7 是这个系统的流形图. 可以看到流形图中有两个不动点$N=0$，$N=K$，第一个是不稳定的，任何距离这个不动点很近的状态都趋向于远离它，因而它是系统的一个零维不稳定不变流形；第二个是稳定的，对于所有初始值，系统在充分长时间演化后都会被吸引到这个唯一的不动点附近，因而这个不动点就是一个零维的稳定不变流形. 在单变量

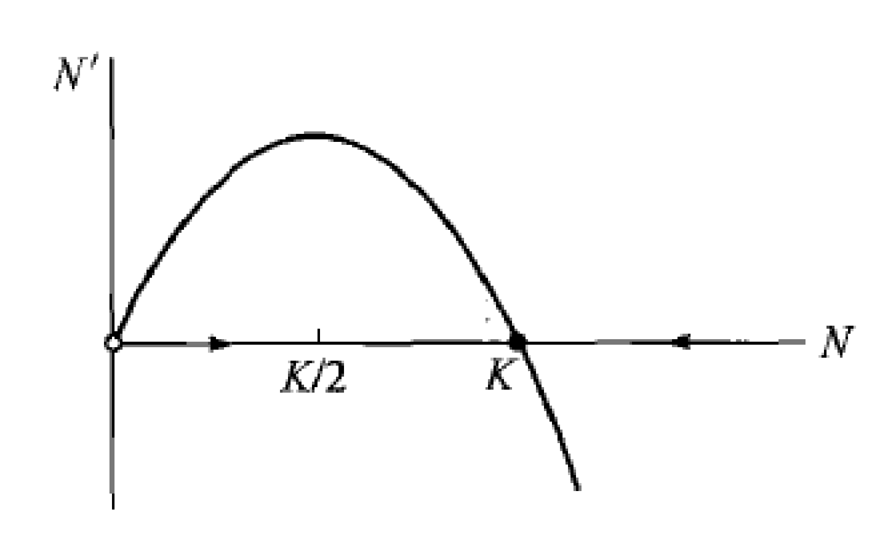


图 4.7　种群生长模型的流形图

系统中可能出现不止一个稳定不变流形，这对应于多稳态的情况. 下面以虫口模型为例描述这种情况. 虫口模型是单变量种群生长模型的延伸. 由于鸟吃虫子，虫口模型在种群生长模型(3.3.2)中要加入鸟类的影响 $p(N)$：

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = RN\left(1-\frac{N}{K}\right) - p(N). \tag{4.3.1}$$

其中函数 $p(N)$随 N 的变化可以经过定性分析大致了解. 当虫口数量很少时，鸟类主要以别的昆虫为食，因此 $p(N)$随 N 增加缓慢；当虫口数量达到一定值时，鸟类开始以此类昆虫为食，$p(N)$随 N 加速增加；当虫口数量足够大时鸟类的胃口开始饱和，$p(N)$随 N 增加缓慢，最后达到一个确定值. 最简单的描述此行为的函数为

$$p(N) = \frac{BN^2}{A^2+N^2}.$$

将上式代入方程(4.3.1)，得虫口模型

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = RN\left(1-\frac{N}{K}\right) - \frac{BN^2}{A^2+N^2}. \tag{4.3.2}$$

无量纲化后，方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = rx\left(1-\frac{x}{k}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}. \tag{4.3.3}$$

其中 $\tau=Bt/A, r=RA/B, k=K/A, x=N/A$. 很显然 $x=0$ 是方程(4.3.3)的一个解. 方程的其他不动点满足

$$r\left(1-\frac{x}{k}\right) = \frac{x}{1+x^2}.$$

这两条曲线在图 4.8 中画出，它们的交点即是不动点. 从图 4.8 可以看到当承载能力在一定范围内时该系统除了零解外存在三个不动点. 图 4.9 给出了系统的流形示意图. 其中两个不动点(a,c)是吸引点，即零维稳定不变流形，另两个

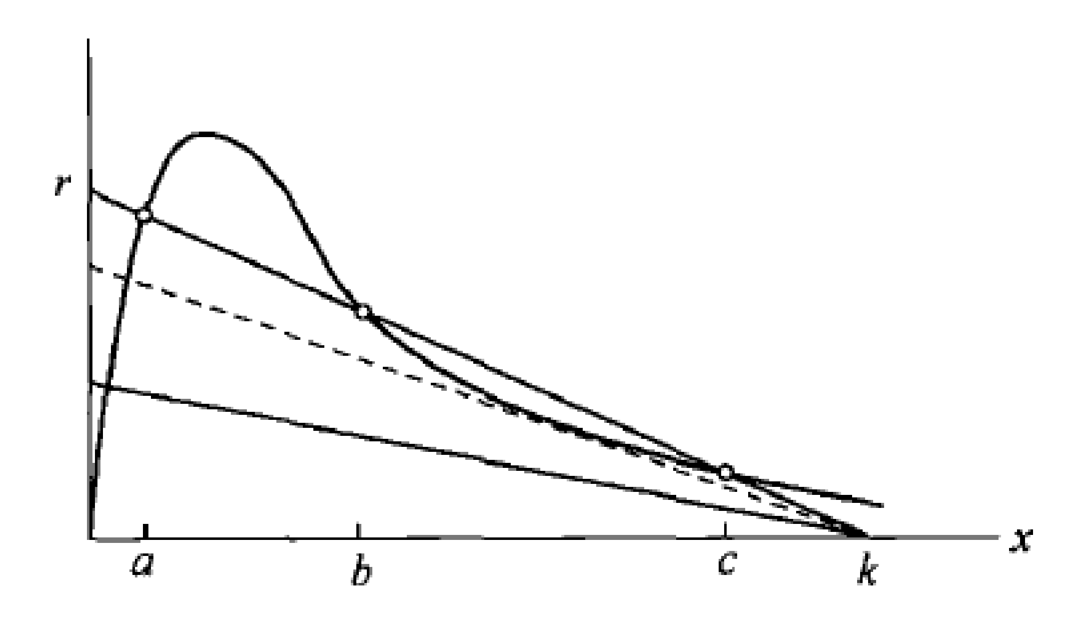


图 4.8 虫口模型的不动点

不动点是“排斥”子，它们是不稳定不变流形. 如果在相空间中有几个吸引子，那么每个吸引子都会有自己的一个吸引域(basin of attraction)，在吸引域中的点受吸引子的吸引向它们靠拢. 图 4.9 中的不动点 b 构成了两个吸引域的边界.

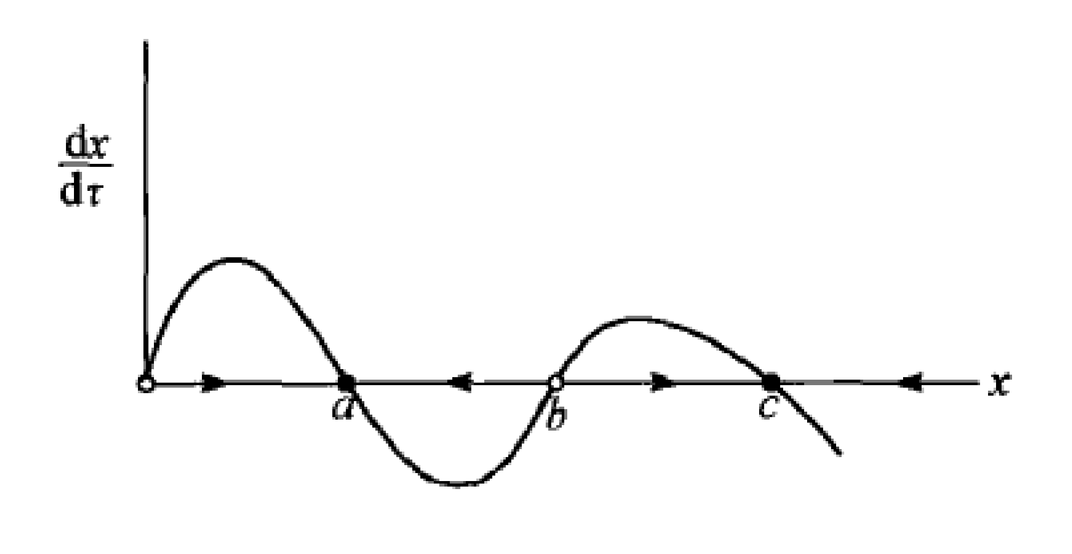


图 4.9 虫口模型的流形图

双变量系统 双变量系统的嵌入维数为 2，因而双变量系统的稳定不变流形可能有两种类型：零维与一维. 不同于单变量系统的是，双变量系统在相空间可能是闭合的，因而可能出现极限环. 但是受到唯一性定理的限制，这类系统不可能出现比闭合轨迹更复杂的流形结构，如非周期振荡现象. 在一维系统中流形的方向只有两个，而在二维以上的系统中流形方向有无穷多个. 因而在高维系统中的流形分析不像在一维系统中那样简单明了. 分析高维系统流形的一个有效方法，是首先对不动点附近的流形作局部分析，再把这些流线定性地连结起来，以得到系统在整个相空间的流形图. 所以分析的第一步是对系统不动点进行分类.

为了引起读者的兴趣，这里首先以一个“爱情”故事为例，讨论双变量系统中可能出现的不动点类型和与之相连的局部流形. 这个系统描述一对恋人罗密欧与朱丽叶之间的恩怨随时间的变化. 定义系统变量 $R(t)$ 为在 t 时刻罗密欧对

朱丽叶的感情指数；$J(t)$为在 t 时刻朱丽叶对罗密欧的感情指数. 变量为正表示爱慕，变量为负表示厌恶. 考虑以下爱情动力学方程：

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = aR + bJ, \tag{4.3.4a}$$

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = cR + dJ. \tag{4.3.4b}$$

方程中的系数可正可负. 如果 $a>0$ 表示罗密欧是“激情”型的；如果$a<0$则罗密欧是“自律”型的；$b>0$ 表示罗密欧对朱丽叶的感情以同样的方式回报，你对我好我就对你好，反之亦然；$b<0$ 表示罗密欧是“多变”型的，你越对我好我越跑，你越对我坏我越追. 当然爱情方程式一定不是线性的，如果真是这样的话，从下面的分析中会看到它的结局没有一个是令人满意的. 我们研究的只是故事开始的阶段，这时非线性效应可以被忽略.

此方程只有一个不动点(0,0). 不考虑简并情况，方程(4.3.4)有如下解的形式：

$$R = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$
$$J = c_3 e^{\lambda_1 t} + c_4 e^{\lambda_2 t}.$$

系数 c_1, c_2, c_3, c_4 不是独立的，它们的值由初始条件决定. 特征值 $\lambda_{1,2}$ 由下式决定：

$$\lambda_{1,2} = \frac{Tr \pm \sqrt{Tr^2 - 4\Delta}}{2}, \tag{4.3.5}$$

其中

$$Tr = a + d, \Delta = ad - bc. \tag{4.3.6}$$

特征值 $\lambda_{1,2}$决定了爱情故事的发展. 如果两个特征值都是实数，当 $\lambda_1<\lambda_2<0$ 时，系统的局部流形图由图 4.10(a)示意. R, J 随时间的增加趋于 0，两个人最后彼此没有感觉，这个不动点被称为稳定结点；如果 $\lambda_2>\lambda_1>0$，系统的局部流形会向相反的方向发展，两个人的感情在各个方向上都愈演愈烈，如图 4.10(b)所示，这时在相空间的不动点(0,0)被称为**不稳定结点**；如果 $\lambda_1<0<\lambda_2$，则系统的发展轨迹会向一个方向上靠拢而不是向各个方向“爆炸”，如图4.10(c)所示，这时不动点(0,0)被称为鞍点. 当特征值 $\lambda_{1,2}$是一对复数时，爱情的发展变成了“你跑我追”式. 这时如果特征值的实部 $\mathrm{Re}(\lambda)<0$，你追我跑的幅度会随时间越来越小，最后趋于 0，如图 4.10(d)所示，这时不动点(0,0)被称为**稳定焦点**；如果 $\mathrm{Re}(\lambda)>0$，这种你跑我追的运动会愈演愈烈，如图 4.10(e)所示，这时不动点(0,0)被称为不稳定焦点. 在 $\mathrm{Re}(\lambda)=0$ 时，两个人的感情在相空间中是一个闭路环，

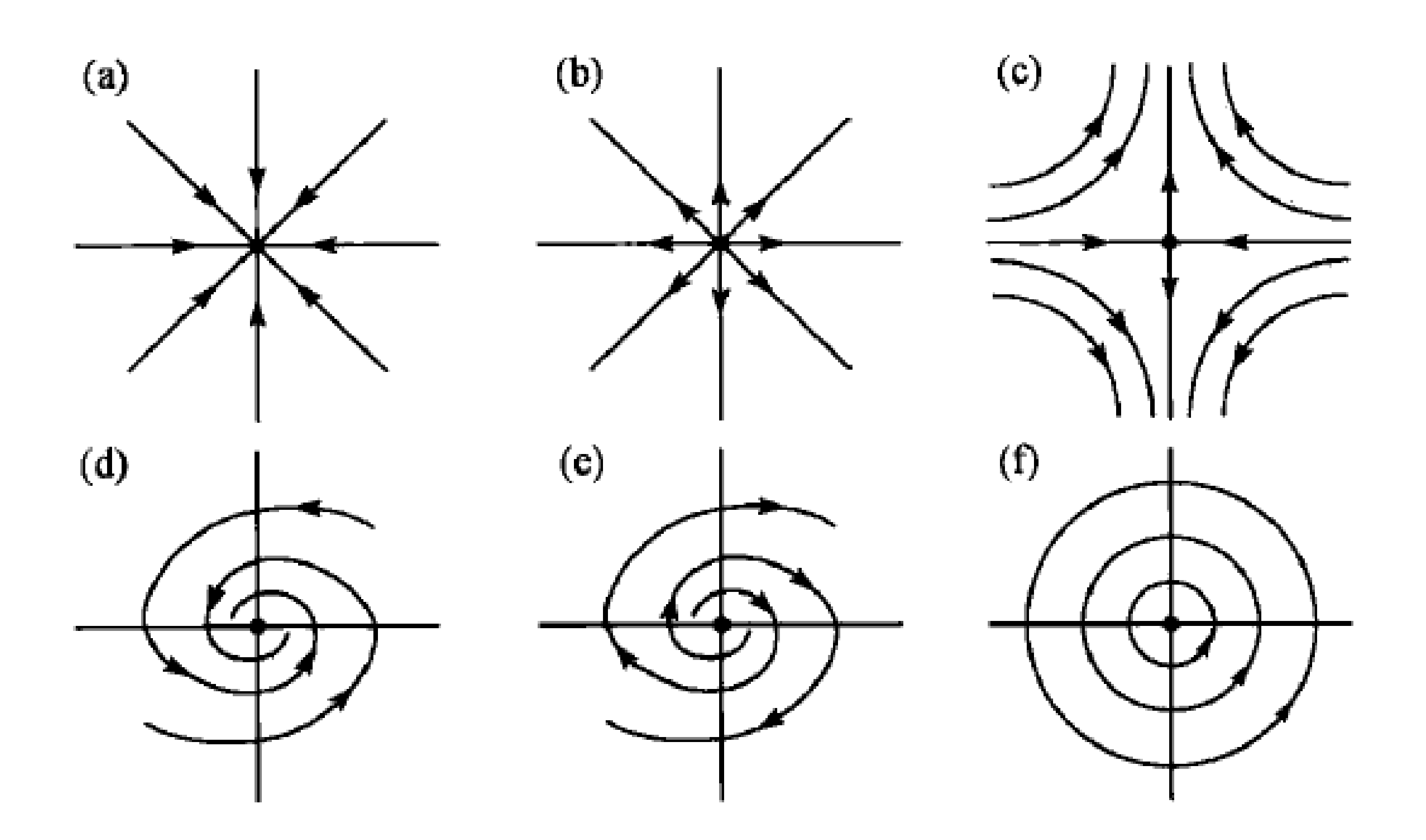


图 4.10 爱情方程式的局部流形示意图

如图 4.10(f)所示,这时不动点(0,0)被称为**中心点**. 图 4.11 给出了在参量空间(Tr,Δ)中各种行为的位置. 其中稳定结点与稳定焦点对它们临近的流形有吸引作用,因而它们是零维稳定不变流形. 除了这两个不变流形外,系统还可能存在一个一维流形. 从图 4.10(c)看到所有系统的轨迹都会向一条线上靠拢. 根据定义这条线是一个一维稳定不变流形.

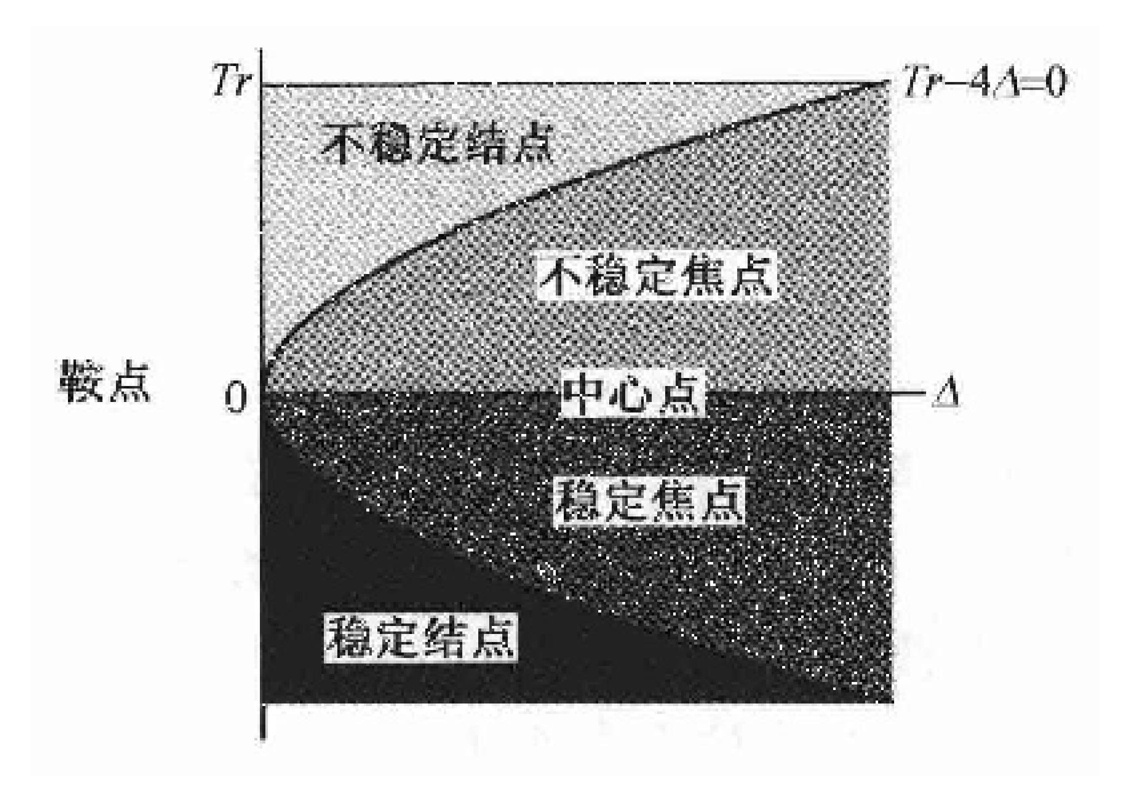


图 4.11 爱情方程式的参数空间图

在对不动点分类以后就可以建立系统在整个空间的流形图了. 下面以一个双变量生态竞争模型,羊兔模型演示这个过程. 假设在一个生态环境下初始时有两个种群: 羊与兔. 由于兔的生长率比羊快,单位面积的承载能力比羊高,按照 § 2.2 的讨论可以设兔与羊的生长率分别为 3 与 2,承载能力也分别为 3 与 2,群体生长模型为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3x\left(1-\frac{x}{3}\right)-p(x,y),$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2y\left(1-\frac{y}{2}\right)-q(x,y).$$

其中 x,y 是兔与羊的群体数量；$p(x,y),q(x,y)$代表竞争对群体数量增长的影响.由于羊的竞争能力比较高，令 $p(x,y)=2xy,q(x,y)=xy$代入上式，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(3-x-2y),\tag{4.3.7a}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(2-x-y).\tag{4.3.7b}$$

容易得到方程(4.3.7)有 4 个不动点：(0,0),(0,2),(3,0),(1,1).为了确定这些不动点的性质，将坐标平移到不动点上并去掉非线性项，就得到与方程(4.3.4)类似的线性方程.比如对于不动点(0,0)，对应的线性方程的矩阵为

$$\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix},$$

对应的特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=2$，因而不动点(0,0)是一个不稳定结点.对于不动点(0,2)，线性方程的矩阵为

$$\begin{pmatrix}-1&0\\-2&-2\end{pmatrix},$$

对应的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$，因而不动点(0,2)是一个稳定结点.同样的方法可以得到不动点(3,0)是稳定结点，不动点(1,1)是鞍点.将这些局部行为在相空间中画出，就得到了图4.12.

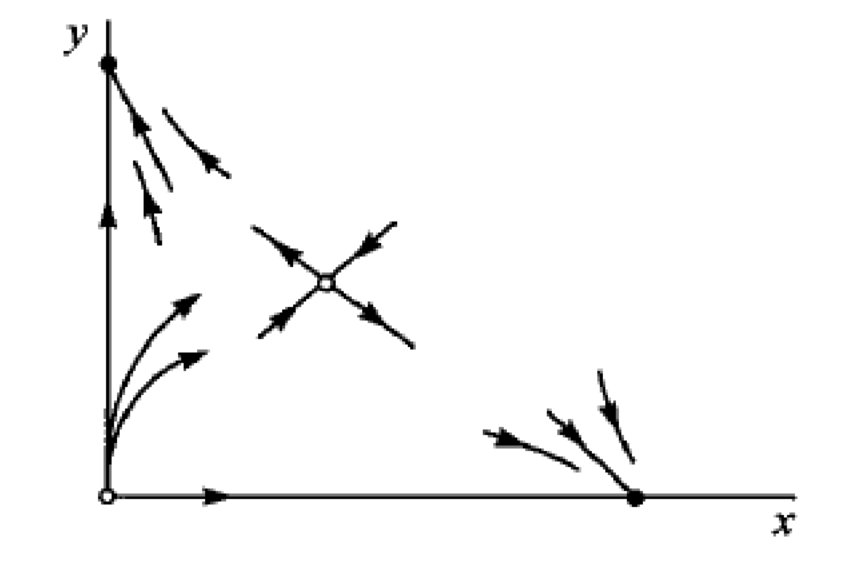


图 4.12　羊兔模型的局部流形图

下一步定性地分析整个流形图的形式.例如，不动点(0,0)是不稳定的，它邻近的流线应该向 x,y 方向运动，临近 y 轴的流线应该被 y 轴上的稳定结点(0,2)吸引，临近 x 轴的流线应该被 x 轴上的稳定结点(3,0)吸引.由于流形是致密的，在 x 与 y 轴之间一定会有一条流线不能决定向哪个稳定结点靠近，它会走向鞍点(1,1).这条轨迹被称为带鞍点的一维不变流形.从无穷远点出发的流线轨迹也有同样的运动形式：有一条过鞍点的一维不变流形将相空间分为两部分，不变流形的上部分向稳定结点(0,2)运动，下部分向稳定结点(3,0)运动.从鞍点出发的流线上面的一条与稳定结点(0,2)相连，下面的一条与稳定结点(3,0)相连.将这些连线在局部流形图上画出，就得到图 4.13 所示的整个流形图.其中两个零维稳定不变流形用实心点表示；一维不变流形用黑

粗线表示. 容易看到系统有两个吸引域,而带鞍点的不变流形是两个吸引域的边界. 流形图 4.13 表示了羊兔种群发展的归宿,即一个种群的发展最终导致另外一个种群的灭绝;哪一个种群会灭绝取决于初始条件.

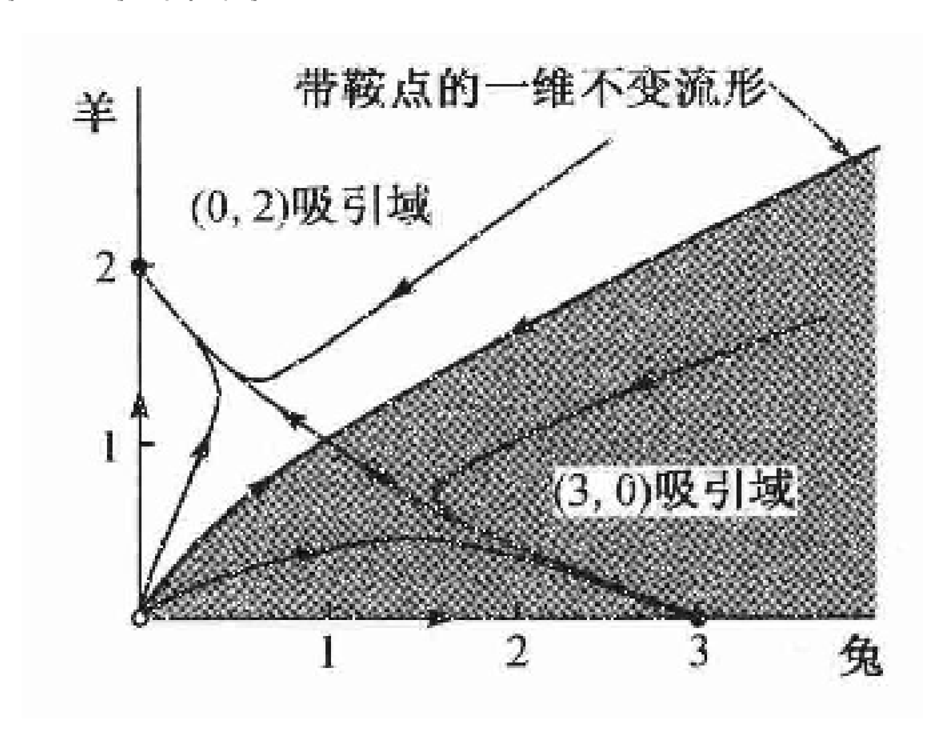


图 4.13　羊兔模型的全局流形图

带有鞍点的一维不变流形可能形成闭合轨道. 图 4.14 表示了这种闭合轨道的两个类型. 第一种被称为同宿轨道,它从一个鞍点出发又回到原来的鞍点;第二种被称为异宿轨道,它由两个鞍点组成,从一个鞍点出发的轨道进入另一个鞍点,从后者出发的轨道又回到前者. 同宿轨道与异宿轨道都是结构不稳定的,系统的控制参量稍有变化这类闭合轨道就可能打开.

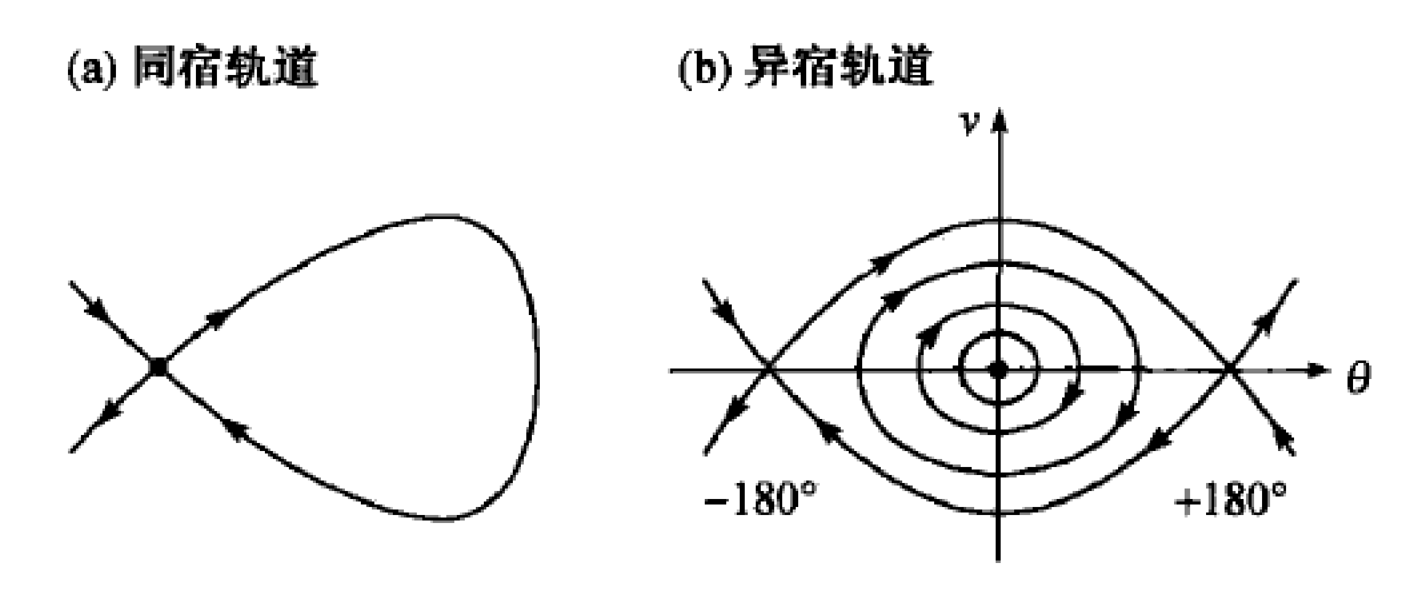


图 4.14　同宿轨道与异宿轨道示意图

在二维系统中还可能出现不带鞍点也不是中心点(如图 4.10(f))的闭合轨道,这个轨道对其邻近区域有吸引作用,被称为**极限环**. 下面以一个狗追鸭子的数学模型为例,讨论极限环的生成. 如图4.15 所示,在一个半径为 l 的池塘里一只狗在追一只鸭子. 由于狗的行动缺乏预见性(在实际情况中可能不是如此),它的追踪方向永远在狗与鸭子的连线上,而鸭子由于池塘的限制最终会沿池塘的边缘没命地跑. 假设鸭子沿逆时针方向以角速度 Ω 逃跑,狗的速度是鸭子速度的 k 倍,计算狗的运动轨迹.

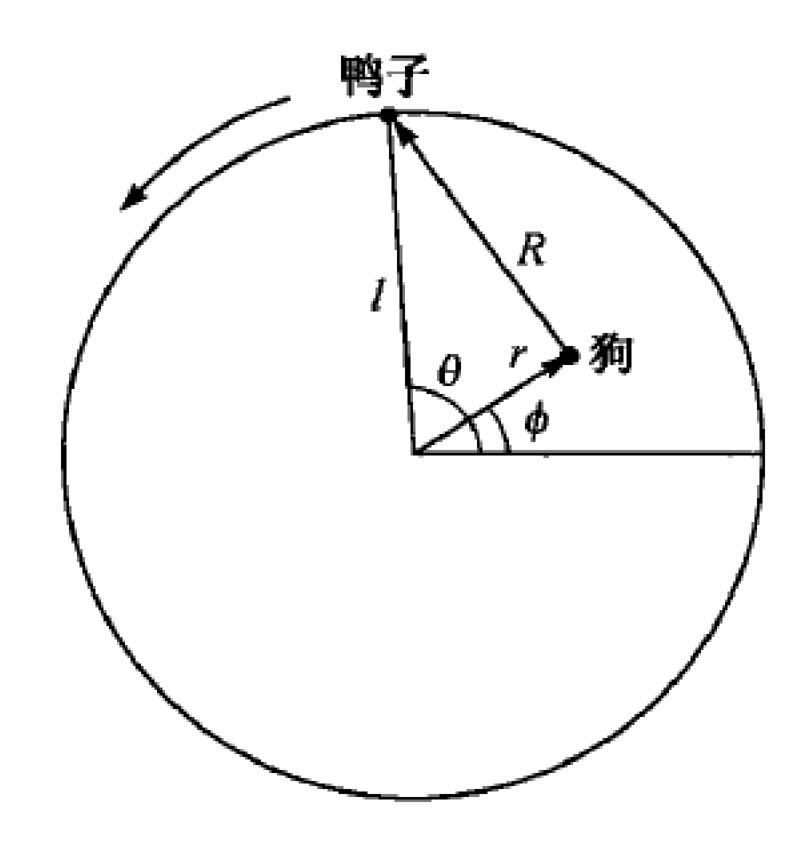


图 4.15 狗追鸭子问题示意图

下面在极坐标系中讨论这个问题. 设在 t 时刻鸭子的位置坐标是(l,θ),狗的位置坐标是(r,ϕ). 根据条件狗在 t 时刻向 R 方向运动,运动速度是 $k\Omega l$. 将狗的运动速度分解为径向速度与切向速度,得到以下三变量动力学方程:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=lk\Omega\,\frac{l\cos(\theta-\phi)-r}{R},$$

$$r\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=lk\Omega\,\frac{l\sin(\theta-\phi)}{R},$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\Omega.$$

其中

$$R^2=l^2+r^2-2rl\cos(\theta-\phi).$$

将以上方程无量纲化,令 $\tau=\Omega t,\rho=r/l,\gamma=R/l$,得

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\tau}=\frac{k}{\gamma}(\cos(\theta-\phi)-\rho),$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}=\frac{k}{\rho\gamma}\sin(\theta-\phi),$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}=1,$$

$$\gamma^2=1+\rho^2-2\rho\cos(\theta-\varphi).$$

为了将方程的维数降下来,可以作如下处理:将以上方程的第二式与第三式相减并令 $\alpha=\theta-\phi$,导出双变量方程

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\tau}=\frac{k}{\gamma}(\cos\alpha-\rho),\tag{4.3.8a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\tau}=1-\frac{k}{\rho\gamma}\sin(\alpha),\tag{4.3.8b}$$

$$\gamma^2 = 1 + \rho^2 - 2\rho\cos\alpha. \tag{4.3.8c}$$

可以想象当狗的速度大于鸭子的速度时($k>1$)问题类似于龟兔赛跑问题，狗会在有限时间内追上鸭子. 在这种情况下方程没有不动点，也没有渐近行为. 当$k<1$时方程(4.3.8)有一个定态解

$$\rho_0 = k,$$
$$\alpha_0 = \arccos k.$$

同上面的方法一样，可以在不动点附近将方程(4.3.8)做线性处理，其线性方程的矩阵为

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}} & -k \\ \dfrac{1}{k} & 0 \end{pmatrix},$$

对应的特征值为

$$\lambda_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{5k^2-4}}{2\sqrt{1-k^2}}.$$

$k<1$，所以该不动点为稳定焦点或稳定结点. 其中，当$0<k<\sqrt{4/5}$时，不动点为稳定焦点；当$\sqrt{4/5}\leqslant k<1$时，不动点为稳定结点. 不动点$(k, \arccos k)$在(r,ϕ)坐标系中是一个闭合的环：

$$r(t) = kl,$$
$$\phi(t) = \Omega t - \arccos k, \qquad k<1.$$

如图 4.16 所示. 很显然这个闭合环可以吸引临近领域的流线，因而它是一个一维稳定不变流形，这类一维稳定不变流形被称为极限环.

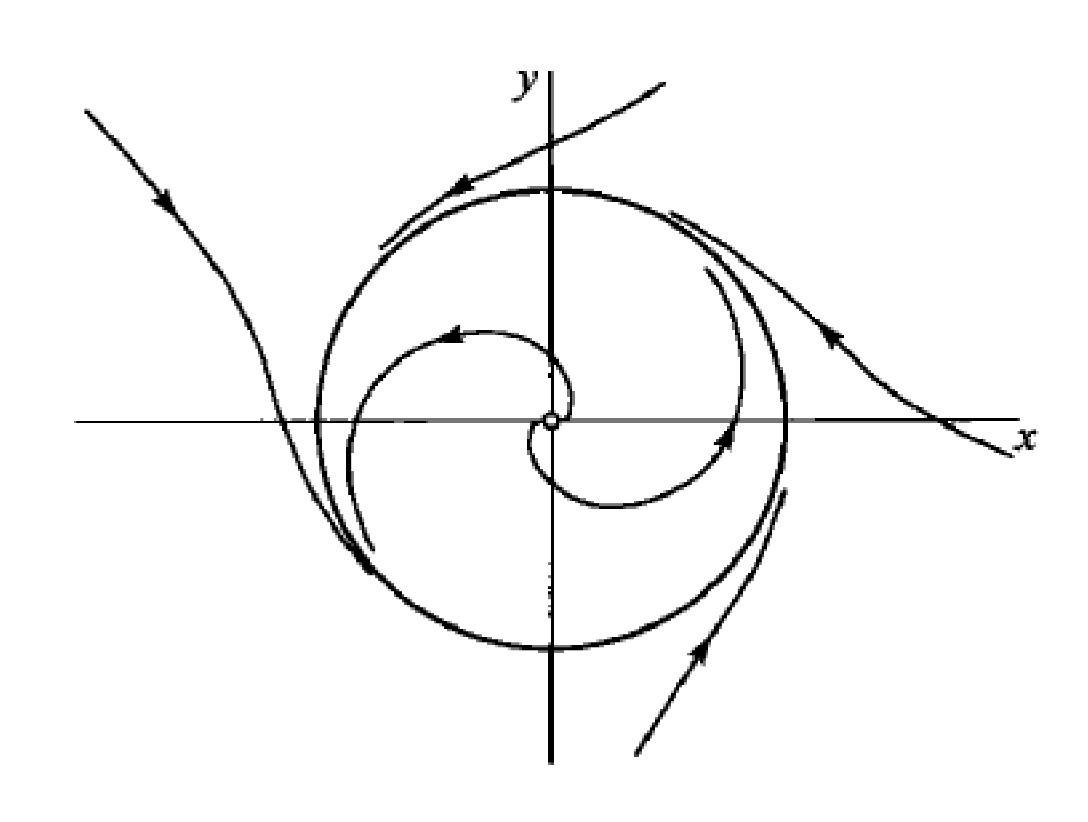


图 4.16 极限环

关于二维系统极限环的存在定理有庞加莱-本狄克森(Poincaré-Bendixson)定理,它是非线性动力学理论的重要定理之一.假设

- R 是相空间中的一个子空间,
- 动力学方程(4.1.1)在包含 R 的空间中是连续可微分的,
- R 中不包含任何不动点,
- 在 R 中的一个轨道 C 从任意一点出发都不能逃逸出 R,

则这个轨道 C 或者是一个闭合轨道,或者当时间趋于无穷大时趋于一个闭合轨道.不论哪种情况子空间 R 中都包含一个闭合轨道,这个闭合轨道就是极限环.庞加莱-本狄克森定理否定了在二维系统中存在非周期轨道的可能性.因为非周期轨道一定不是闭合的,而庞加莱-本狄克森定理要求闭合轨道.需要指出的是庞加莱-本狄克森定理不适用于维数大于 2 的动力系统.在这些系统中可能出现比闭合轨道复杂的不变流形结构.

三变量系统与更多变量系统　当嵌入维数为 3 时,不变流形的维数可能是 0,1 或 2.在上面的讨论中已知零维稳定不变流形对应于稳定不动点;一维稳定不变流形对应于带鞍点的一维轨道或极限环.值得指出的是在三维系统中极限环可以在相空间中绕许多圈再闭合,这样做不会违反唯一性定理.最简单的二维稳定不变流形(不带鞍点的二维不变流形)可能是一个**环面**(torus).分析一个含有两个周期函数的动力系统,函数的周期分别为 T_1,T_2.如果 $T_1/T_2=p/q$ (p,q 为正整数),则在相空间中这个轨道是闭合的,对应于一个一维不变流形,

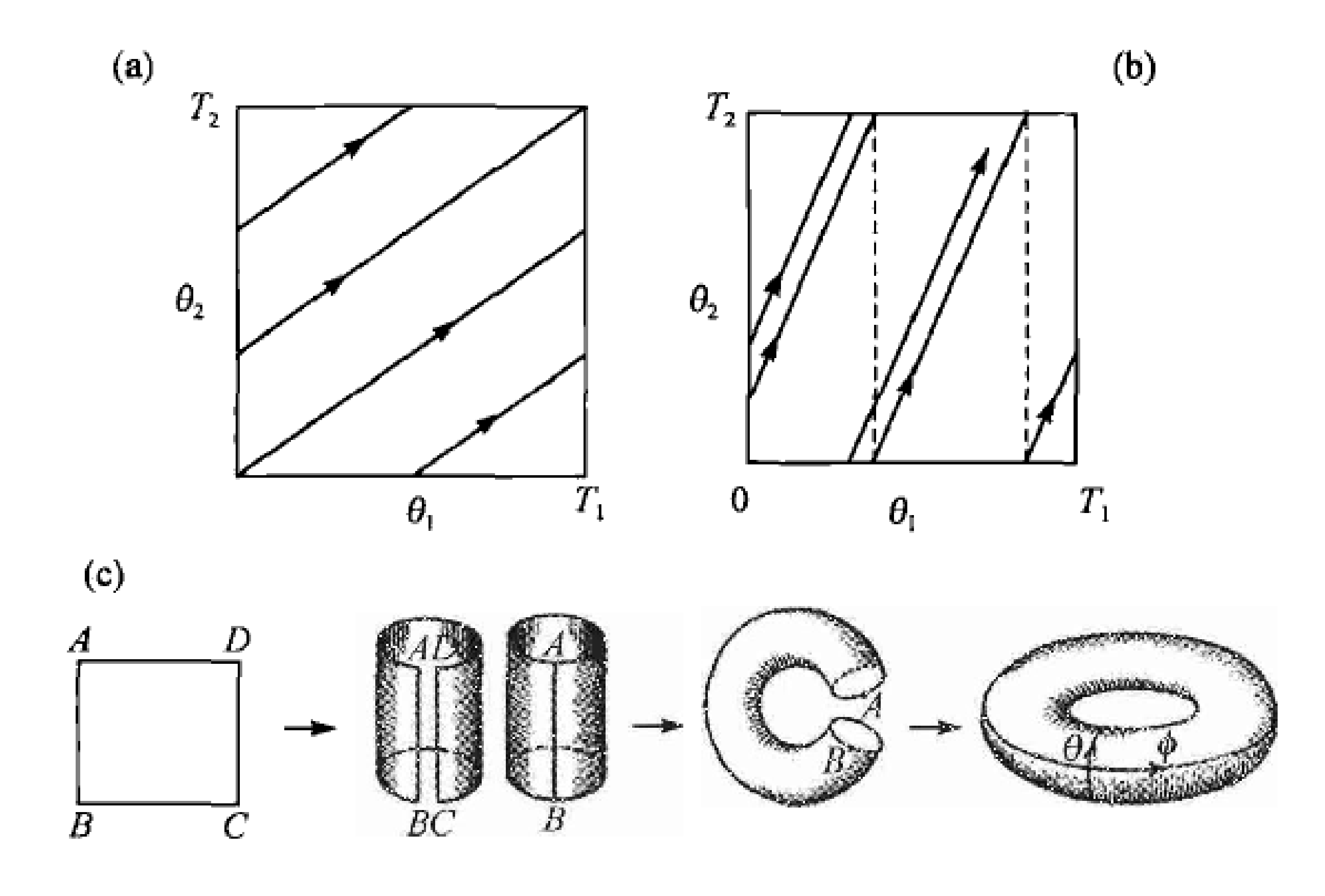


图 4.17　环面构造示意图

轨道的周期为 $T=T_1q=T_2p$，见图4.17(a). 如果 T_1/T_2 是一个无理数，则轨道在相空间中永远不闭合，这时系统表现出**准周期**振荡行为，见图 4.17(b). 这样的轨道可以映射到一个环面上，如图 4.17(c)所示. 假设第一个周期函数的变量为 ϕ，它在 A，B 两点做周期运动，周期为 T_1；第二个周期函数的变量为 θ，它在 A，D 两点间做周期运动，周期为 T_2. 用图 4.17(c)所示的作图方法可以将平面 $ABCD$ 变成一个环面. 系统的运动轨道被限制在环面上，但是轨迹在环面上永不相交，因而致密地覆盖整个环面. 这就是一个二维环面，如果这个二维环面对其邻近的流形有吸引作用，它就是一个二维稳定不变流形.

嵌入维数在三维以上的系统还可以支持分形结构的不变流形，分形结构的不变流形构成**奇异吸引子**，这时系统表现出确定性混沌运动. 数学上的分形结构是在一系列重复操作中构造的. 如图 4.18 所示，在一个尺度为 l 的 d 维数物

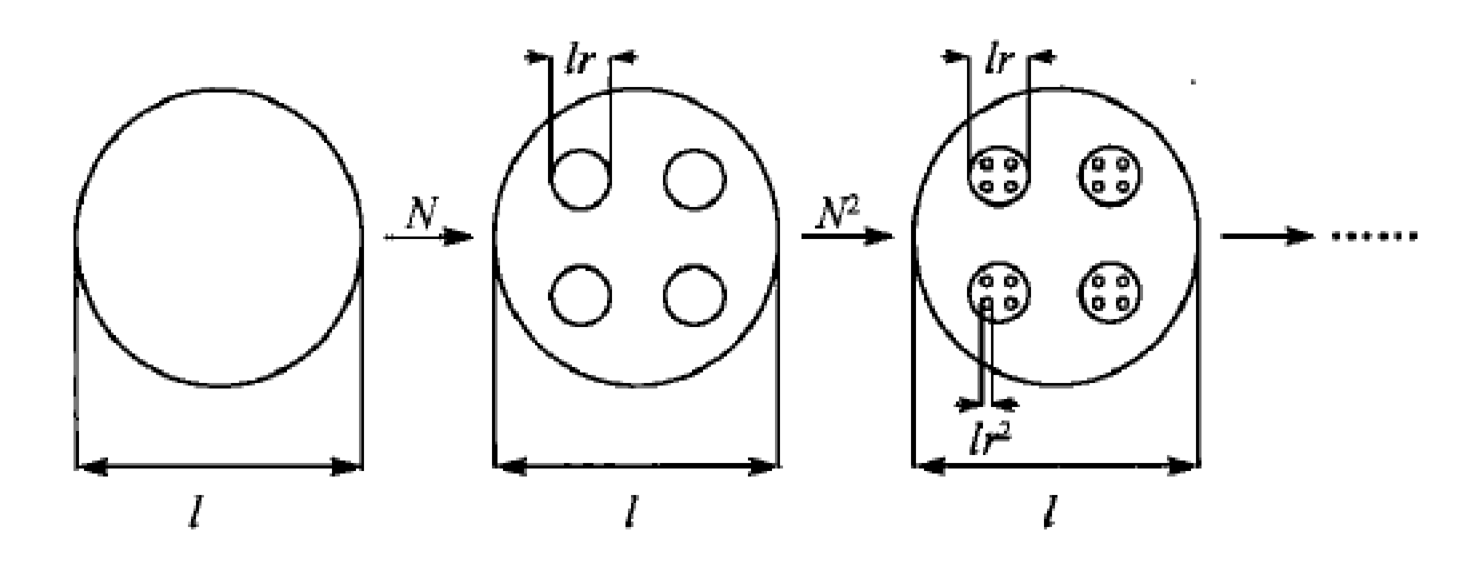


图 4.18 分形结构构造示意图

体中挖出 N 个尺度为 lr 的小物体($r<1$)，在每个新产生的小物体中再挖出 N 个尺度为 lr^2 的更小的物体，当这种操作不断重复并趋于无穷时，会留下无穷多个无穷小的物体. 这个集合的拓扑维数可以用拓扑维数的定义来计算：

$$N_\varepsilon=\left(\frac{l}{\varepsilon}\right)^{D_0},\qquad \varepsilon\to 0.$$

其意义是在一个线性尺度为 l 的体积中，用线性尺度为 ε 的尺子将该体积划分，然后数出包括小物体的格子的数目 N_ε. 当 $\varepsilon\to 0$ 时 N_ε 与 ε 有幂率关系，幂指数即为集合的拓扑维数. 根据这个定义，用图 4.18 构成的物体集合的拓扑维数为

$$D_0=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln N_\varepsilon}{\ln(l/\varepsilon)}=\frac{\ln N}{\ln(1/r)}.$$

比如当 $N=2r=0.5$ 时 $D_0=1$；当 $N=2r=0.2$ 时 $D_0=0.43$.

想象一个不变流形由无数个面组成，这些面在相空间某个方向上排列为自相似的分形结构. 在另外的方向上，面与面以一定规则相连接，如图 4.19 所示.

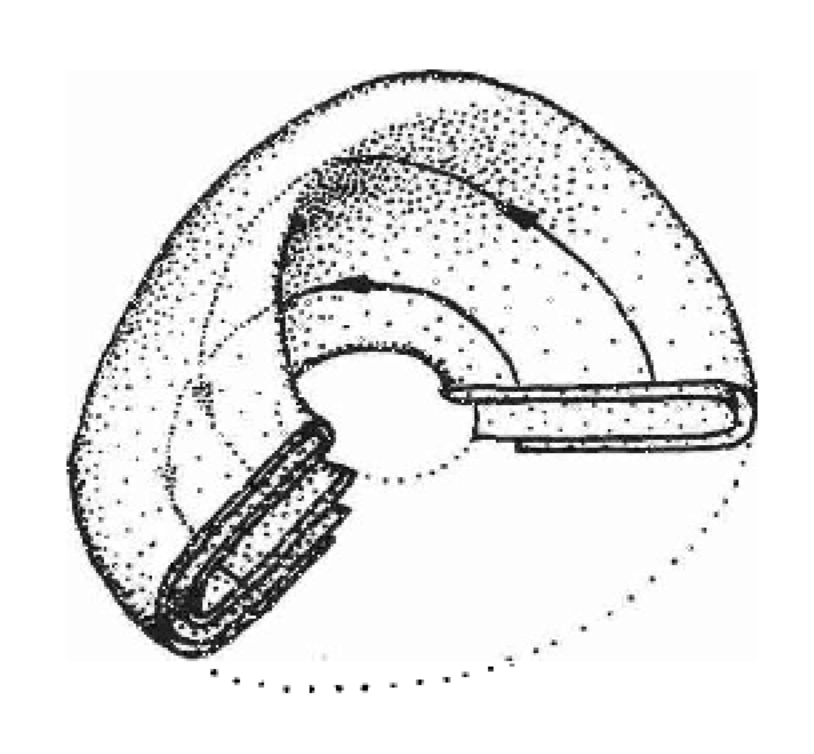


图 4.19　奇异吸引子

这个流形就是一个分形结构的流形，它的维数在 2 与 3 之间. 如果这个流形对其邻近区域有吸引性质，它就是一个不变流形，在混沌理论中被称为奇异吸引子. 关于分形结构与确定性混沌的性质需要专著专门介绍，这些内容超出了本书的范围.

§4.4　保守系统与耗散系统

上节的分析是研究动力学系统的渐近态行为. 根据渐近态的稳定不变流形对系统进行分类，从而得出了零维稳定不变流形，即不动点，一维稳定不变流形，如极限环，二维稳定不变流形，如环面，以及具有分形结构的稳定不变流形，如确定性混沌等. 本节从另外一个角度分析动力学系统的行为. 只考虑系统在一定初始条件下的暂态行为并以暂态行为对系统进行分类. 这样可以将动力学系统分为两大类：**保守系统**(conservative system)与**耗散系统**(dissipative system). 用系统的暂态行为对系统进行分类有它的物理意义. 从数学角度出发，当一个系统的动力学方程被确定以后，给定一个初始条件(对偏微分方程还要给定边界条件)，系统的演化路径就被确定了. 但从物理角度出发，由于存在测量误差，初始条件是不能完全确定的. 人们只能在一定精度下给出系统的初始条件. 因而在相空间表示中，更有物理意义的做法不是研究一个点的演化轨迹，而是研究一个体积的演化轨迹，这个体积的线性尺度是由测量精度决定的. 对于一个动力学方程，如果这个初始体积随着时间不断增大，那么虽然我们能够精确预测任何一个点的演化轨迹，我们还是不能对系统进行有效预测. 保守系统是指在相空间中的一个空间的总体积不随时间变化；耗散系统是指它们的总体积随时间减少. 只有在这两种类型的系统中预测才可能是有意义的. 但是必须指出，不是

所有的保守系统和耗散系统都是可预测的. 如图 4.20 所示，在总体积不变的情况下系统在某些方向上仍然可以发散.

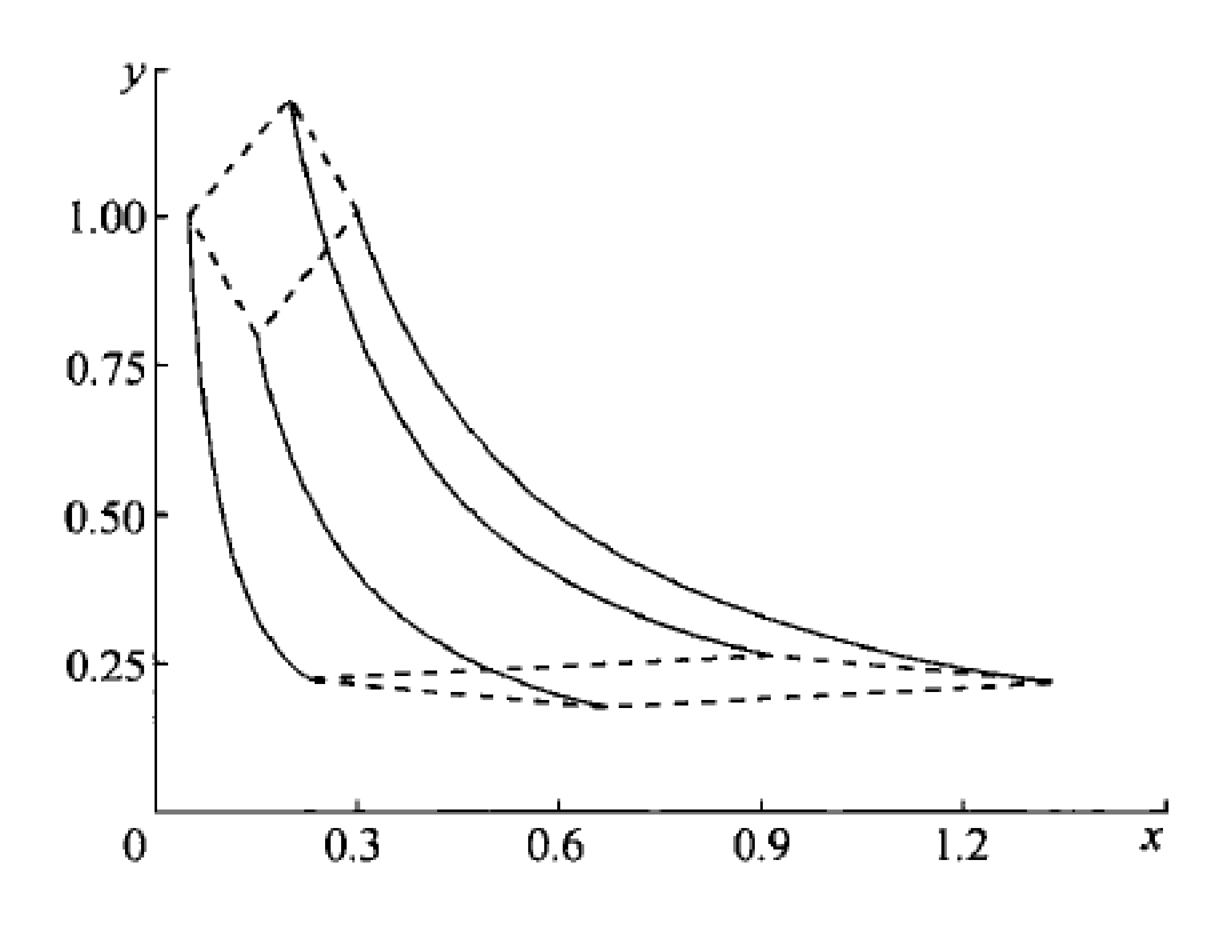


图 4.20 保守系统在 x 方向上发散的例子

根据在本章第一节介绍的微分方程的唯一性定理，在相空间中的流形除了奇异点以外是不可交叉的. 从这个意义上说动力学系统的演化路径在相空间中具有流体力学系统的一些一般性质，可以将流形对应于流体的流动轨迹，速度场对应于流场，奇异点对应于流体系统中的源与汇等. 下面复习一下流体系统的一般性质. 设 ρ 为流体的密度，根据质量守恒定律，流体密度随时间的变化服从以下方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=\delta_{\rho}-\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{v}), \tag{4.4.1}$$

方程右边第一项是源的贡献，第二项是流的贡献. 如果流体密度还是位置的函数：$\rho=\rho(x,y,z,t)$，则对流体密度的全微分为

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial \rho}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial \rho}{\partial z}=\frac{\partial \rho}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho. \tag{4.4.2}$$

假设流体系统是无源的，即 $\delta_{\rho}=0$，将(4.4.1)代入(4.4.2)，得

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial \rho}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho=-\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho=-\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}. \tag{4.4.3}$$

在一个动力学系统的相空间中，我们也可以相应地定义一个流形密度 ρ：

$$\rho=\frac{1}{N_{\mathrm{tot}}}\lim_{\Delta\Gamma\to 0}\frac{\Delta N}{\Delta\Gamma}. \tag{4.4.4}$$

其中 $\Delta\Gamma$ 是相空间中的一个小体积，ΔN 为通过这个小体积的流形条数，N_{tot} 是系统的总流形数. 当然，在相空间中流形是连续的，流形条数不可能在连续条件

下定义，只能将系统适当离散以后才能计算. 但流形密度这个量是有物理意义的，正如电场密度、磁场密度无法数出来，但还是有确定的物理意义. 动力学系统相空间的流形密度可以对应于流体系统中的流体密度，所以方程(4.4.3)在相空间仍然成立，只是把流体系统中的空间坐标(x,y,z)变成n维空间的坐标$(x_1,\cdots,x_n)$. 因而有

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\quad\rightarrow\quad\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}).\tag{4.4.5}$$

代入(4.4.3)，得

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=-\rho\nabla\cdot\boldsymbol{F},\tag{4.4.6}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}\ln\rho}{\mathrm{d}t}=-\nabla\cdot\boldsymbol{F}.\tag{4.4.7}$$

对(4.4.7)进行从0到t积分：

$$\frac{1}{t}\ln\frac{\rho_t}{\rho_0}=\frac{-1}{t}\int_0^t\nabla\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}t=-\langle\nabla\cdot\boldsymbol{F}\rangle t.\tag{4.4.8}$$

为了计算在空间中初始体积随时间的演化，令式(4.4.4)中的$\Delta N=\mathrm{const}$. 代入(4.4.8)，得

$$\frac{1}{t}\ln\frac{\rho_0}{\rho_t}=\frac{1}{t}\ln\frac{\Delta\Gamma_t}{\Delta\Gamma_0}=\langle\nabla\cdot\boldsymbol{F}\rangle t,$$

上式中$\Delta\Gamma_0$，$\Delta\Gamma_t$分别为初始条件所占体积与时间t时的体积，两者的关系为

$$\Delta\Gamma_t=\Delta\Gamma_0\mathrm{e}^{\langle\nabla\cdot\boldsymbol{F}\rangle_t\cdot t}.\tag{4.4.9}$$

式(4.4.9)决定了初始条件在相空间中的一个小体积随时间的变化，如果$\langle\nabla\cdot\boldsymbol{F}\rangle_t=0$，初始体积在平均意义下保持不变，根据本节开始的定义，对应的动力系统为保守系统. 如果$\langle\nabla\cdot\boldsymbol{F}\rangle_t<0$，初始体积在平均意义下变小，则对应的系统为耗散系统.

根据上面的定义可以证明所有哈密顿系统都是保守系统. 哈密顿系统的形式为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial q_i}{\partial t}&=\frac{\partial H}{\partial p_i},\\ \frac{\partial p_i}{\partial t}&=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}\right.\quad(i=1,\cdots,3N).$$

写成(4.4.1)一般的动力学方程形式：

$$\boldsymbol{F}=\left(\frac{\partial H}{\partial p_1}\cdots\frac{\partial H}{\partial p_{3N}}-\frac{\partial H}{\partial q_1}\cdots-\frac{\partial H}{\partial q_{3N}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

因而

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial}{\partial q_{3N}} \frac{\partial}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial}{\partial p_{3N}}\right) \boldsymbol{F}$$

$$= \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i}\right) = 0.$$

应当指出，虽然哈密顿系统一定是保守系统，但保守系统不一定是哈密顿系统. 比如，一个保守系统中的变量数不一定是哈密顿系统所要求的偶数.

一个带摩擦的力学系统一定是一个耗散系统. 以一维力学系统

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = f(x) - k \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

为例说明这种情况，其中 $k > 0$ 是摩擦系数. 令 $y = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 得动力系统的一般形式：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(x) - ky.$$

容易得出 $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = -k < 0$，所以这个系统是耗散系统. 另一个重要的耗散系统是洛伦茨系统：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sigma(-x + y), & (4.4.10\text{a}) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = r(x - y - xz), & (4.4.10\text{b}) \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy - bz, & (4.4.10\text{c}) \end{cases}$$

其中 $\sigma, r, b > 0$. 对于洛伦茨方程有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = -(\sigma + r + b) < 0,$$

所以它是一个耗散系统.

有必要强调的是一般来说一个耗散系统不是在相空间中的每一个点都有体积压缩的性质，只要在平均意义上有这种压缩性质系统就满足耗散系统的条件. 例如，对于 § 3.2 推导的 BZ 反应动力学方程(3.2.4)有：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{\varepsilon_1}(1 - 2x - y) - \frac{q + x}{\varepsilon_2} - 1.$$

由于

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \approx 100 \gg 1 \gg \frac{q}{\varepsilon_2} \approx 0.02,$$

当 $x=0, y=0$ 时 $\nabla \cdot \boldsymbol{F}>0$. 但是对 $x, y(x, y>0)$ 做平均后 $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ 是小于零的. 所以 BZ 反应是耗散系统.

§4.5　稳定性与线性稳定性

在本章第二节中曾经提到了“稳定”一词,但对其物理意义并没有做详细的解释. 本节将对系统稳定性做严格的定义,并介绍非线性动力学的一个重要定律：线性稳定性原理. 这个原理使得我们能够将非线性方程在局部上做线性化处理,得到的结论对于原非线性方程同样适用. 它构成了下一章线性稳定性分析的基础. 但是线性稳定性分析只是在系统中的局部区域有效,如果分析系统离开这些局部区域的动力学行为就要用非线性分析,这在本书第六章详细讨论.

对于一个确定性的动力学方程,如果我们不考虑系统与外界的随机涨落效应,则系统的所有不动点都不会随时间变化. 但是在真实系统中系统总是存在着涨落. 这种涨落有些是系统本身的,如系统中参数的涨落;有些是外界的,表现为系统变量的涨落. 考察系统稳定性问题就是研究系统在涨落下的抗干扰能力. 只有抗干扰系统才是稳定的系统,只有抗干扰的系统状态才是可能被观测者观察到的系统状态. 如果一个系统对系统参数的涨落是抗干扰的,这个系统具有结构稳定性;如果一个系统对变量的涨落是抗干扰的,这个系统具有状态稳定性. 在研究非线性动力学中遇到最多的是系统的状态稳定性问题,本节主要讨论这类稳定性.

首先从直观图像上解释稳定性的意义. 设 $\boldsymbol{X}_s$ 是系统在相空间的一个不动点. 在这个状态上加上一个扰动,

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_s + \boldsymbol{x}(t),$$

研究系统稳定性就是研究扰动随时间的变化. 根据扰动的演化结果可以将这个不动点分为三类：

- 如果 $\boldsymbol{x}(t)$ 无界,也就是说它的大小会随时间无限增大,则这个状态是不稳定的. 例如本章第三节讨论的不稳定结点、不稳定焦点和鞍点都是不稳定状态.

- 如果 $\boldsymbol{x}(t)$ 有界,但它的大小既不随时间无限增大也不随时间趋于零,也就是说这个扰动的效应会永远保留在系统中,则这个不动点在李雅普诺夫(Lyapunov)意义上是稳定的. 在本章第二节讨论的中心点属于这类情况.

• 如果扰动的大小随时间的增加趋于零，也就是说扰动的效应不会永远保留在系统中，则不动点是渐近稳定的. 第三节讨论的稳定结点与稳定焦点都是渐近稳定的.

用数学分析中的 δ-ε 语言，可以对系统的稳定性做如下定义：在 $\boldsymbol{X}_s$ 附近定义两个域 U_ε，$U_{\delta(\varepsilon)}$，其中 $U_{\delta(\varepsilon)}$ 决定于 U_ε. 如果在 $\boldsymbol{X}_s$ 附近可以找到一个域 U_ε 与一个域 $U_{\delta(\varepsilon)}$ 使得任何出发于 $U_{\delta(\varepsilon)}$ 的轨迹永远不会越过 U_ε，则 $\boldsymbol{X}_s$ 在李雅普诺夫意义上是稳定的；如果找不到这样一个域，则 $\boldsymbol{X}_s$ 是不稳定的；如果可以找到一个域 $U_{\delta(\varepsilon)}$，使得出现于 $U_{\delta(\varepsilon)}$ 的状态在 $t\to\infty$ 时趋于 $\boldsymbol{X}_s$，则 $\boldsymbol{X}_s$ 是渐近稳定的.

根据上面的定义谐振子方程在李雅普诺夫意义上是稳定的. 如图 4.21 所示，任意给定一个包括不动点(0,0)的域 U_ε，我们可以找到一个椭圆域 $U_{\delta(\varepsilon)}$，其长轴与 U_ε 的边相等，而它的边界是谐振子方程的一个闭合椭圆轨道. 由于流形是不相交的，在 $U_{\delta(\varepsilon)}$ 内的任何轨迹都跑不出 $U_{\delta(\varepsilon)}$，也就跑不出 U_ε. 所以谐振子方程在李雅普诺夫意义上是稳定的. 如果谐振子方程变成双曲方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=\omega_0^2\theta,$$

则不动点(0,0)是不稳定的. 因为该方程的解是双曲线，任何一个有限的域都不能把这个轨迹包进去.

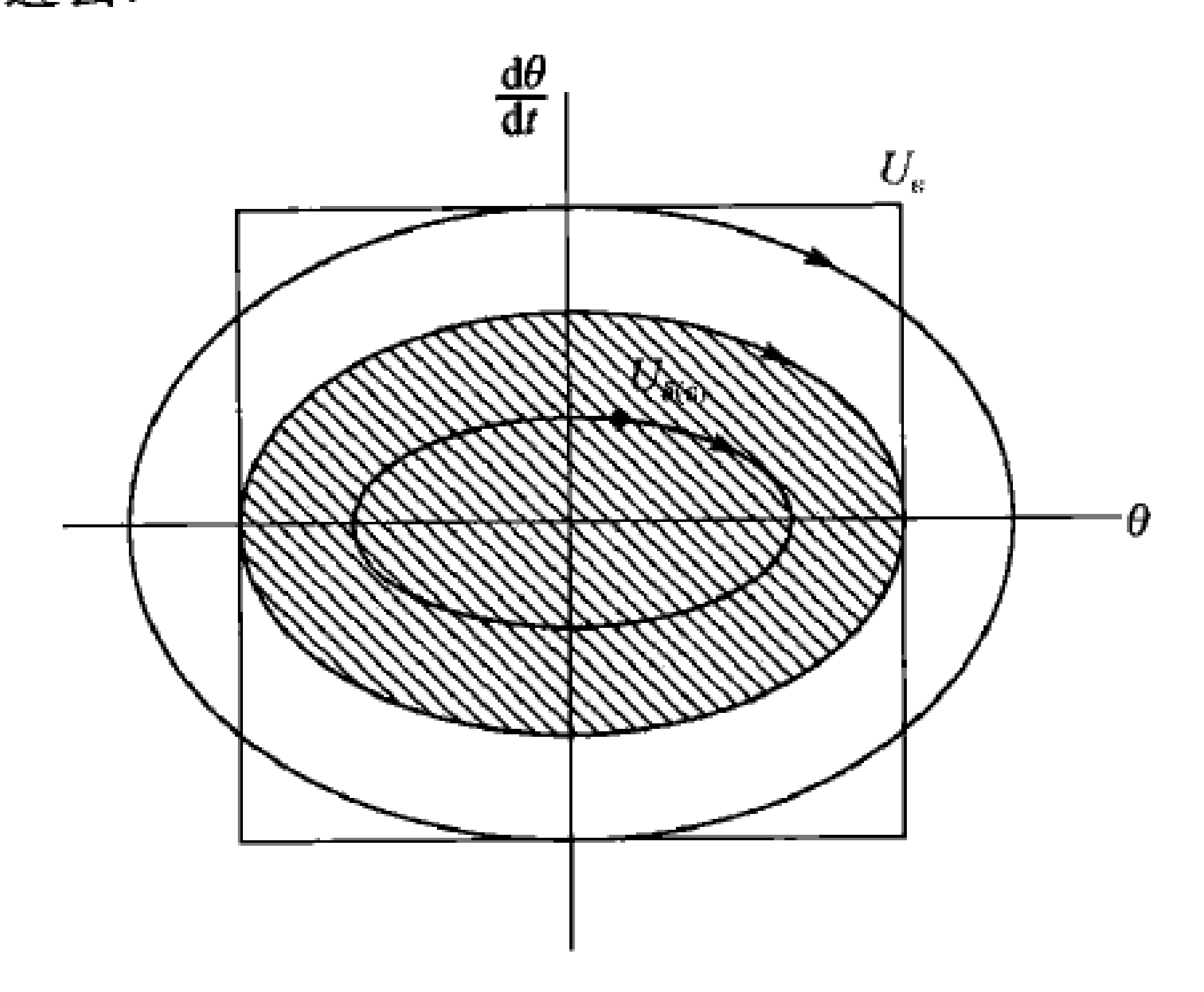


图 4.21 谐振子方程在不动点附近的行为

如果一个不变流形(不动点，极限环等)随系统的控制参数变换从稳定的变为不稳定的，则系统会经历一个渐变或突变的过程到达另一个不变流形，这个过程一般会伴随着系统的对称性破缺，这个过程被称为非平衡态相变. 本章第

一节分析的铁环问题就是非平衡相变的一个例子. 如图 4.5 所示，当 $\lambda<1$ 时不动点(0,0)是一个稳定结点，整个系统保持镜像对称；当 λ 慢慢增加并超过1 时，这个点变为不稳定结点. 系统会跃变到 $\theta\neq 0$ 的定态点上，这个状态没有镜像对称.

稳定性问题研究系统的扰动随时间演化的行为，如果这个扰动很小，则扰动方程可以化为线性方程. 设方程(4.1.1)存在不动点 $\boldsymbol{X}_s$，则在 $\boldsymbol{X}_s$ 附近做一个小的扰动后系统的状态为 $\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}_s+\boldsymbol{x}(t)$，代入原方程并作泰勒级数展开：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}&=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_s+\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_s)\\&=\left(\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)\boldsymbol{X}_s\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{X}^2}\right)\boldsymbol{X}_s\boldsymbol{x}^2+\cdots,\end{aligned}\tag{4.5.1}$$

所以微扰方程的一般形式为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=L\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}).\tag{4.5.2}$$

方程右边第一项为线性，第二项为非线性项.

以另一个在非线性动力学研究中占有重要地位的系统——布鲁塞尔子(Brusselator)的推导演示这个过程. 布鲁塞尔子是一个虚拟的化学反应系统：

$$\mathrm{A}\xrightarrow{k_1}\mathrm{X},$$

$$\mathrm{B}+\mathrm{X}\xrightarrow{k_2}\mathrm{Y}+\mathrm{C},$$

$$2\mathrm{X}+\mathrm{Y}\xrightarrow{k_3}3\mathrm{X},$$

$$\mathrm{X}\xrightarrow{k_4}\mathrm{D}.$$

应用质量作用定律写出反应的动力学方程：

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=k_1A-k_2BX+k_3X^2Y-k_4X,$$

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=k_2BX-k_3X^2Y.$$

其中 X,Y 是方程的变量，A,B 是方程的控制参量. 将以上方程无量纲化，令

$$t'=k_4t,\ X'=\sqrt{\frac{k_3}{k_4}}X,\ Y'=\sqrt{\frac{k_3}{k_4}}Y,\ A'=\frac{k_1k_3^{1/2}}{k_4^{3/2}}A,\ B'=\frac{k_2}{k_4}B,$$

代入以上方程并去掉无量纲量上的撇号，得

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=A-(B+1)X+X^2Y,\tag{4.5.3a}$$

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=BX-X^2Y.\tag{4.5.3b}$$

首先找出方程(4.5.3)的所有不动点.容易看出该方程只有一个不动点$(A,B/A)$.在此不动点附近作微扰,令

$$X(t)=A+x(t),$$
$$Y(t)=B/A+y(t),$$

代入方程(4.5.3)就得到(4.5.2)形式的方程.其中$\boldsymbol{L}$是线性方程部分的矩阵

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}B-1 & A^2\\ -B & -A^2\end{pmatrix}, \tag{4.5.4}$$

$\boldsymbol{h}$是非线性向量函数

$$\boldsymbol{h}=\left(\frac{B}{A}x^2+2Axy+x^2y\right)\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}. \tag{4.5.5}$$

如果微扰量很小,我们可以舍去高阶项而只分析方程的线性部分.线性方程稳定性与原非线性方程稳定性的关系可以由线性稳定性原理决定.下面是线性稳定性原理的一个表述形式:

设动力学方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \tag{4.5.6}$$

存在不动点$\boldsymbol{X}_s$,则在$\boldsymbol{X}_s$附近有微扰方程(4.5.2).如果线性系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{x} \tag{4.5.7}$$

是渐近稳定的,由此定义的非线性系统(4.5.2)也是渐近稳定的;如果线性系统(4.5.7)是不稳定的,由此定义的非线性系统(4.5.2)也是不稳定的;如果线性系统(4.5.7)在李雅普诺夫意义上是稳定的,由此定义的非线性系统(4.5.2)的稳定性不能确定.

这个定理保证了在绝大部分情况下可以用线性微扰方程代替非线性微扰方程来分析一个非线性系统在不动点附近的状态稳定性.一般来讲,非线性方程是没有解析解的,所以很难对它的稳定性做分析.而一个线性方程总是有解析解的,它的稳定性可以很容易得到.线性稳定性原理在非线性动力学分析中的实用意义,就是将一个复杂的非线性问题变成了一个简单的线性问题.

如果线性稳定性分析得到的稳定性是李雅普诺夫意义上的,则这种分析就不能对相应的非线性方程的状态稳定性做出判断.这种情况一般出现在相变边界上,在参数空间中属于测度为零的面.图 4.22 给出了这种情况的例子.图中的实线是方程(4.5.3)的一个数值模拟,虚线是对应的线性方程的数值模拟.控

制参量为$A=2$，$B=5$. 我们看到线性系统的轨迹是一个闭合环，而对应的非线性系统的轨迹是一个趋向不动点的螺旋线，两者在稳定性上有本质的差别.

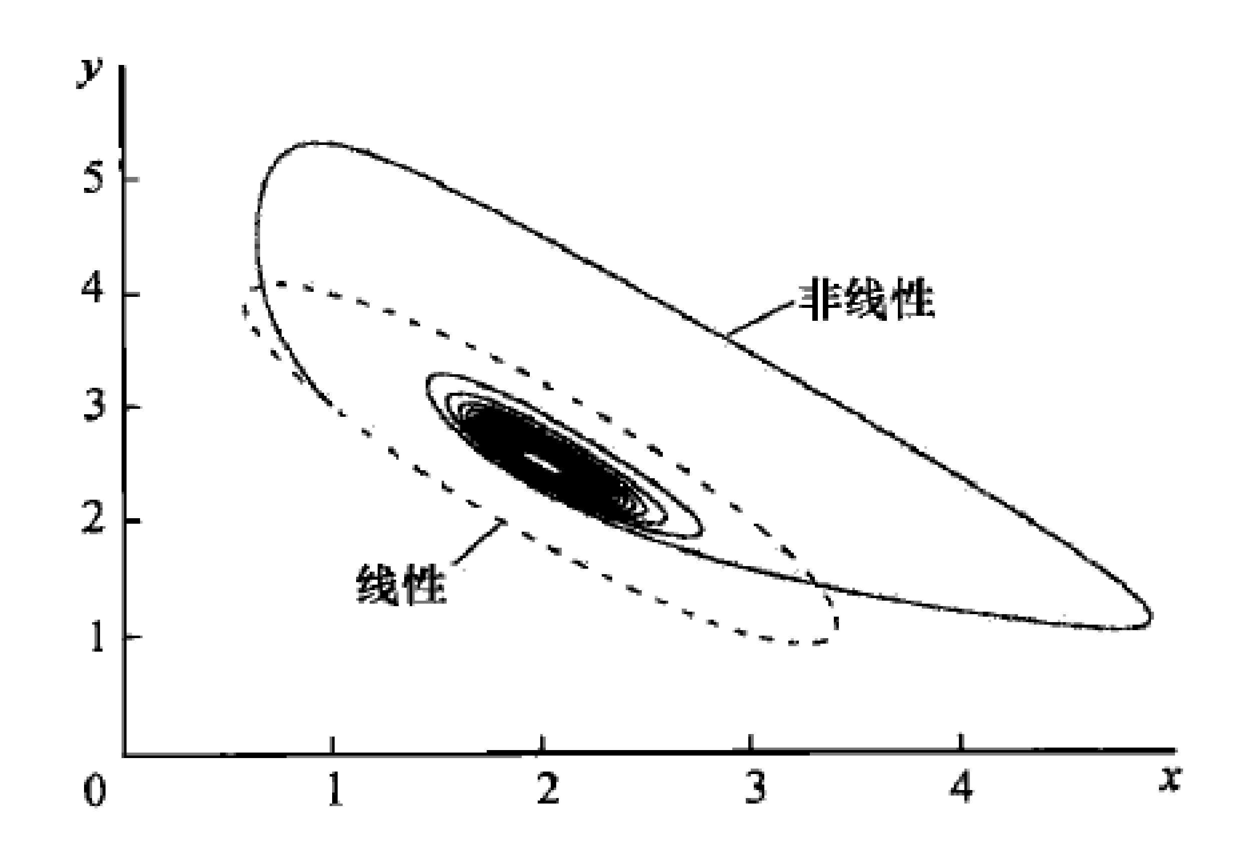


图 4.22　非线性方程与对应的线性方程在临界点上的差别

第五章　不动点的线性稳定性分析

本章讨论线性稳定性分析在非线性动力学研究中的应用. 根据上一章介绍的线性稳定性原理，一个非线性系统在不动点附近的局部行为与它所对应的线性系统有密切关系. 因此，在分析中可以将非线性系统局部行为的研究转化为对相应的线性系统的研究. 研究的主要方向集中在相变点附近的行为. 在相变点附近线性系统局部行为的改变，很大程度上决定了所对应的非线性系统在相变点附近局部行为的改变，并进一步决定了系统以后的发展. 当然，分析线性系统不能得出系统发生相变以后产生的新状态的性质，对这个问题的讨论要放在下一章进行. 另外，对于一些系统知道它在不动点附近的行为会帮助了解系统的全局性质，这种情况在本章中也要有所讨论.

§5.1　中心流形定理

对于一个不含记忆的动力系统(4.1.1)，如果它存在不动点 $\boldsymbol{X}_s$，根据上一章最后一节的讨论，可以在不动点附近将系统所对应的微扰方程写成(4.5.2)的形式. 其中微扰方程的线性部分为：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}. \tag{5.1.1}$$

令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}\mathrm{e}^{\omega t}$ 并将此关系代入方程(5.1.1)，问题变为代数方程

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{u} = \omega\boldsymbol{u}. \tag{5.1.2}$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 与 ω 分别为矩阵 $\boldsymbol{L}$ 的特征向量与特征值. 通过这样的处理，系统在不动点的稳定性问题转变为特征值问题. 值得注意的是，这时系统的动力学性质已经与特征向量 $\boldsymbol{u}$ 没有关系，特征值 ω 提供了系统在不动点附近的所有动力学信息. 将特征值 ω 的实部与虚部分开有

$$|\boldsymbol{x}| \sim \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\omega)t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Im}(\omega)t}.$$

如果 $\mathrm{Re}(\omega)<0$，$|x|$将以指数形式衰减，因而微扰量随时间趋于0，不动点 $\boldsymbol{X}_s$ 是渐近稳定的；如果 $\mathrm{Re}(\omega)>0$，微扰量随时间呈指数型增加，因而不动点 $\boldsymbol{X}_s$ 是不稳定的. 在两者之间，存在着一个特殊的情况 $\mathrm{Re}(\omega)=0$，这个情况被称为临界

稳定性. 注意到对于保守系统与耗散系统,不稳定与临界稳定都是可能存在的,而渐近稳定只有在耗散系统中才可能存在.

一般来讲,当系统的控制参量 λ 发生变化时,线性方程(5.1.1)的矩阵元也会相应地发生变化,而矩阵元的变化会使系统的特征值发生改变. 特征值随系统控制参量的改变有两种典型的可能性,如图 5.1 所示. 第一种情况(a),随着控制参量的变化特征值越过特征值平面的虚轴,系统的不动点在 $\lambda=\lambda_c$ 时从渐近稳定的变为不稳定的,这时不动点 $\boldsymbol{X}_s$ 就不再是物理系统中的一个可观测状态,系统会经过一个渐变或突变的过程到达新的渐近态. 这个过程对应于一个非平衡态相变,λ_c 被称为相变的临界值. 第二种情况(b),不论控制参量怎样变化,不动点 $\boldsymbol{X}_s$ 总是渐近稳定的. 在这种情况下,任何新的状态都不可能自发地从系统中产生. 对于一个 n 维动力系统来说,它所对应的矩阵 $\boldsymbol{L}$ 有 n 个特征值. 它们随控制参量的变化行为有些像(b),有些像(a),只要有一个特征值的行为有(a)的性质,系统就可能出现一个非平衡相变.

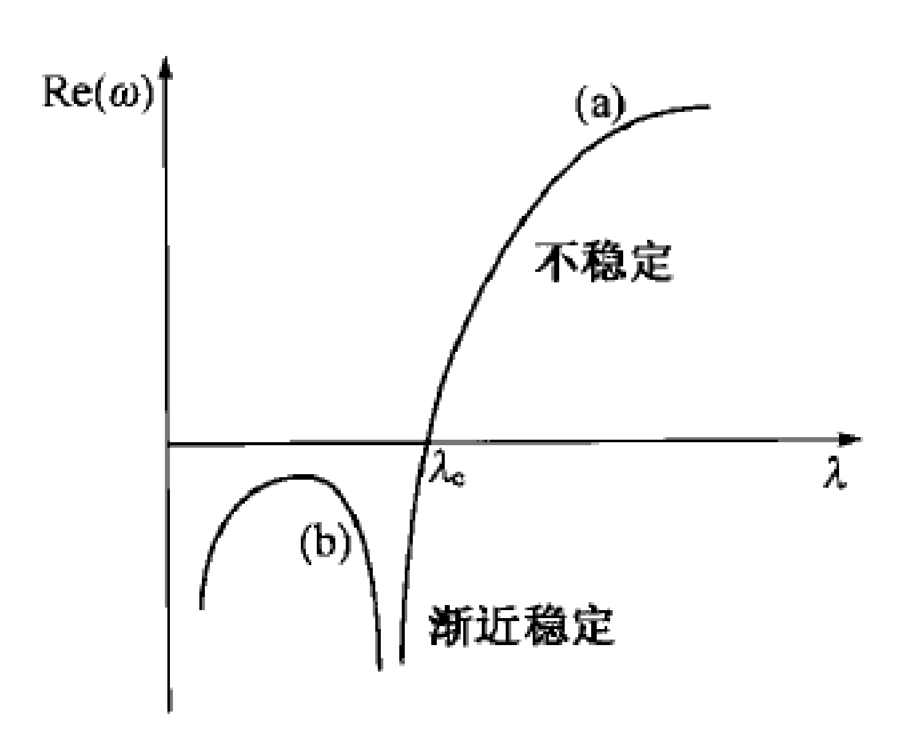


图 5.1　相变(a)与非相变(b)的情况

根据线性代数的计算方法,代数方程(5.1.3)有非平庸解的条件是:

$$\det\left|L_{ij}-\omega_m\delta_{ij}\right|=0. \tag{5.1.3}$$

这里引入指标 m 来表示代数方程(5.1.3)不同的特征值. 一般来说,对于一个典型的控制参量,在系统不存在特别的对称的情况下,ω_m 是各不相同的,因而对于 $n\times n$ 的矩阵有 n 个不同值的 ω_m,如果系统本身有一些对称限制,或当系统控制参量取一特定值时,特征值会发生简并现象. 这里以方程(4.3.4)说明这两种情况. 第一种情况,方程式的矩阵为:

$$\begin{pmatrix} a-b & b \\ -b & a+b \end{pmatrix}.$$

对于这种情况 $\omega_{1,2}=a$,这时不论控制参量怎样变化,特征值都是简并的,这是系统本身的结构引起的简并. 第二种情况,方程的矩阵为:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

当控制参量 b 变为 0 时,系统出现简并,这是控制参量变化所引起的简并. 对于简并的情况,在本书中所讨论的范围内不会引起系统定性的改变,因而不做更

细致的分析. 如果研究混沌理论,在一些情况下必须考虑简并态的影响.

把线性方程(5.1.3)中的所有特征值计算出来后,系统的时间尺度就会一目了然. 将特征值代入 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}\mathrm{e}^{\omega t}$,得到微扰方程的解:

$$\boldsymbol{x}=\sum_{m=1}^{n}C_m\boldsymbol{u}_m\mathrm{e}^{\omega_m t}. \tag{5.1.4}$$

很明显,ω_m 代表了微扰在相空间变化的时间尺度. 在一些 $\mathrm{Re}(\omega)\ll 0$ 对应的方向上,微扰会在系统中很快消失,而在另一些 $\mathrm{Re}(\omega)\approx 0$ 对应的方向上,微扰会在系统中长久保留. 换句话说,在经过一个短暂的时间之后,微扰的流形会被压缩到由 $\mathrm{Re}(\omega)\approx 0$ 对应的特征向量所组成的子空间附近. 如果我们关心的是微扰的渐近行为,就可以在这个子空间进行讨论. 这样研究的对象就从一个高维空间转变为一个低维空间,这个低维空间叫中心流形,将高维系统转化到低维中心流形的基本理论,叫中心流形定理.

下面介绍中心流形的计算思路. 对于线性方程(5.1.1),如果系统不存在简并态,则 $\boldsymbol{L}$ 可以经过一个相似变换变成一个对角矩阵:

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{T},\quad D_{ij}=\omega_i\delta_{ij},\quad i,j=1\cdots n.$$

如果系统存在简并态,则 $\boldsymbol{L}$ 可以经过一个相似变换变成一个约当矩阵. 简并的情况在非线性系统中不多见,同时计算起来比较复杂,下面只讨论不存在简并的情况,根据特征值的大小,可以将系统分为两部分(见图 5.2). 第一部分:

$$\omega_{c,j}:\ \mathrm{Re}(\omega_j)\approx 0,$$

这些特征值对应的向量记为 $\boldsymbol{z}$;第二部分:

$$\omega_{nc,j}:\ \mathrm{Re}(\omega_i)\ll 0,$$

这些特征值所对应的特征向量记为 $\boldsymbol{w}$. 在经过相似变换后,非线性微扰方程(4.5.2)可以写成两部分:

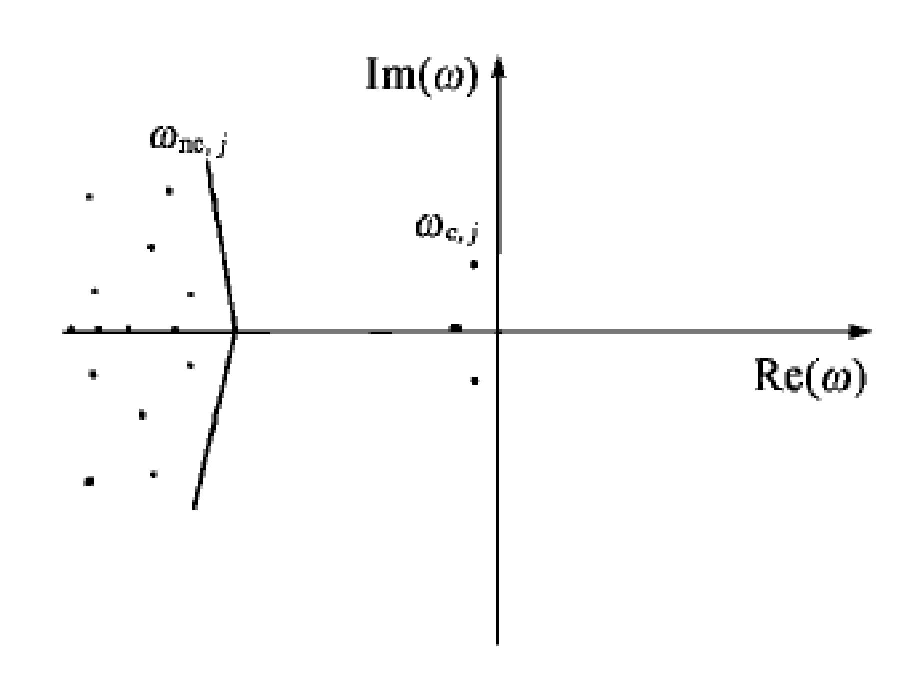


图 5.2 特征根在特征值空间的分布

$$\frac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}t}=\omega_{\mathrm{c},i}z_i+f_i(\{z_i\},\{w_j\}),\quad i=1,\cdots,m,\tag{5.1.5a}$$

$$\frac{\mathrm{d}w_j}{\mathrm{d}t}=\omega_{\mathrm{nc},j}w_j+g_j(\{z_i\},\{w_j\}),\quad j=m+1,\cdots,n.\tag{5.1.5b}$$

由于 $\omega_{\mathrm{nc},j}\ll 0$,可以认为经过一个很短的暂态过程后 $\mathrm{d}w_j/\mathrm{d}t\approx 0$,在此情况下,方程(5.1.5b)变成一个代数方程,解得

$$\omega_j=\omega_j(\{z_i\}).\tag{5.1.6}$$

从动力学角度解释,快变量的运动被慢变量所决定. 这种情况在哈肯的书中[23]被称为**奴役原理**(slave principle). 将式(5.1.6)代入(5.1.5(a)),得

$$\frac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}t}=\omega_{\mathrm{c},i}z_i+q_i(\{z_i\}),\qquad i=1,\cdots,m.\tag{5.1.7}$$

这样非线性微扰方程(4.5.2)就被转化成(5.1.7)的形式. 方程右边第一项是线性项,第二项是非线性项. 这里需要提醒注意的是方程(5.1.7)在相空间的流形就是在欧几里得坐标系的流形,但在原坐标系中它对应于由式(5.1.6)规定的超平面上的流形,这个超平面就是中心流形.

下面以过阻尼铁环系统(3.1.7)为例,具体演示计算中心流形的过程. 令 $\Omega=\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$,方程(3.1.7)变为:

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\Omega,\tag{5.1.8a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\varepsilon}\Omega+\frac{1}{\varepsilon}\sin\theta(\lambda\cos\theta-1).\tag{5.1.8b}$$

在不动点(0,0)附近将方程分成线性与非线性两个部分. 注意到 $\sin\theta(\lambda\cos\theta-1)$ 中包含线性部分: $\sin\theta(\lambda\cos\theta-1)=(\lambda-1)\theta+O(\theta^2)$. 因而有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\theta\\ \Omega\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \dfrac{\lambda-1}{\varepsilon} & -\dfrac{1}{\varepsilon}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\ \Omega\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{1}{\varepsilon}\sin\theta(\lambda\cos\theta-1)-\dfrac{1}{\varepsilon}(\lambda-1)\theta\end{pmatrix}.\tag{5.1.9}$$

定义新的控制参量 $a=\lambda-1$,方程(5.1.9)线性部分的特征值为

$$\omega_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\varepsilon a}}{2\varepsilon}.$$

在临界值 $a=0$ 附近,特征值可近似写为

$$\omega_{1,2}=\frac{-1\pm(1+2\varepsilon a)}{2\varepsilon}.$$

因而有 $\omega_1=a$, $\omega_2=-(a+1/\varepsilon)$. 两个特征值对应的特征向量组成相似变换矩阵:

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1 & \varepsilon \\ a & -(1+\varepsilon a)\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{T}^{-1}=\frac{1}{1+2\varepsilon a}\begin{pmatrix}1+\varepsilon a & \varepsilon \\ a & -1\end{pmatrix}.$$

对方程(5.1.9)做相似变换，得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=az+\frac{1}{1+2\varepsilon a}[\sin\theta(\lambda\cos\theta-1)-a\theta], \tag{5.1.10a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=-\left(\frac{1}{\varepsilon}+a\right)\omega-\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{1+2\varepsilon a}[\sin\theta(\lambda\cos-1)-a\theta]. \tag{5.1.10b}$$

这里 z,ω 与 θ,Ω 的关系由相似变换矩阵决定：

$$\begin{pmatrix}z \\ \omega\end{pmatrix}=\boldsymbol{T}^{-1}\begin{pmatrix}\theta \\ \Omega\end{pmatrix}=\frac{1}{1+2\varepsilon a}\begin{pmatrix}(1+\varepsilon a)\theta+\varepsilon\Omega \\ a\theta-\Omega\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\theta \\ \Omega\end{pmatrix}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}z \\ \omega\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z+\varepsilon\omega \\ az-(1+\varepsilon a)\omega\end{pmatrix}.$$

由于$-(a+1/\varepsilon)\ll 0$，令 $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t=0$，得中心流形

$$\omega=\frac{-1}{(1+\varepsilon a)(1+2\varepsilon a)}[\sin\theta(\lambda\cos\theta-1)-a\theta], \tag{5.1.11a}$$

$$\theta=z+\varepsilon\omega. \tag{5.1.11b}$$

方程(5.1.10)变成一维非线性方程：

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=az+\frac{1}{1+2\varepsilon a}[\sin\theta(\lambda\cos\theta-1)-a\theta]. \tag{5.1.12}$$

其中 θ 由下式决定：

$$\theta=z-\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon a)(1+2\varepsilon a)}[\sin\theta(\lambda\cos\theta-1)-a\theta].$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，$z=\theta,\omega=a\theta-\Omega$. 代入(5.1.11)，中心流形变为

$$\Omega=\sin\theta(\lambda\cos\theta-1),$$

与§4.2式(4.2.2)一致. 而方程(5.1.3)变为

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\sin\theta(\lambda\cos\theta-1),$$

与(4.1.4)式一致.

在实际情况中，应用中心流形定理可以大大简化研究非线性动力系统的复杂性. 当考察一个 n 维动力系统不动点附近的临界行为时，由于随着控制参量的变化，只有几个特征值可能同时从特征值平面的虚轴穿过(见图 5.2)，所以只需考虑几个变量的微扰方程就够了. 一般的动力系统的中心流形都是一维或二维的. 在研究混沌现象时，要考虑三维或更高维的中心流形. 由于本书不讨论混沌行为，以下将集中讨论一维、二维流形的动力学系统在分岔点附近的行为.

§5.2 单变量系统

单变量系统是动力系统中最简单的. 其非线性方程所对应的线性方程为：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_{X_s}x. \tag{5.2.1}$$

所以特征值只有三种情况：$\omega<0$，$\omega>0$，$\omega=0$. 第一种情况说明不动点 X_s 是渐近稳定的，第二种情况说明不动点 X_s 是不稳定的，第三种情况很少出现，对应于临界稳定情况. 例如，对于方程(4.1.2)，其不动点为：$X_s=k\pi$，k 为正整数. 各不动点的特征值为

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{X_s}=\cos k\pi=\begin{cases}1, & k=\text{偶数};\\ -1, & k=\text{奇数}.\end{cases}$$

因而当 k 为偶数时不动点是不稳定的，当 k 为奇数时不动点是稳定的. 这个结论与图4.1的分析结果一致. 对于种群生长模型(3.3.2)，方程有两个不动点 $N_s=0$ 与 $N_s=K$. 两个不动点的特征值分别为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial N}\right|_{N_s=0}=r-\frac{2rN_s}{K}=r,\qquad \left.\frac{\partial f}{\partial N}\right|_{N_s=K}=-r.$$

因而不动点 0 是不稳定的，不动点 K 是稳定的. 另外，从线性稳定性分析还可以得到系统在不动点附近的动力学特征时间尺度. 对(5.2.1)式积分得：$x=x_0\mathrm{e}^{t/\tau}$，所以特征时间尺度为：

$$\tau=1/\omega=1/\left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X_s}.$$

当系统的控制参量变化时，系统不动点的动力学行为也会发生相应的变化. 如果系统的特征值从负数变为正数，则对应的不动点会从稳定的变为不稳定的，这种情况对应于非平衡相变的情形. 以过阻尼铁环系统(4.1.4)为例分析非平衡相变的情况. 重写方程如下：

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\sin\theta(\lambda\cos\theta-1).$$

首先计算方程的所有不动点. 从§4.1 的分析知道(见图 4.3)，当 $\lambda<1$ 时，方程有两个不动点 $0,\pi$，当 $\lambda>1$ 时方程有四个不动点：$0,\pi,\pm\arccos(1/\lambda)$. 接着计算各个不动点所对应的特征值：

$$\frac{\partial f}{\partial\theta}=\lambda(2\cos^2\theta-1)-\cos\theta, \tag{5.2.2}$$

对于 $\lambda<1$，

$$\omega = \lambda - 1 < 0, \ \theta = 0;$$
$$\omega = \lambda + 1 > 0, \ \theta = \pi.$$

所以 $\theta=0$ 是稳定不动点,$\theta=\pi$ 是不稳定不动点. 当控制参量增加到 $\lambda>1$ 时,系统出现了两个新的不动点. 同时 $\theta=0$ 对应的特征值$(\lambda-1)$从负数变为正数,因而不动点 $\theta=0$ 从稳定的变为不稳定的. 不动点 $\theta=\pi$ 的稳定性不随 λ 的增加而改变. 现在分析新产生的不动点的线性稳定性. 将不动点 $\pm\arccos(1/\lambda)$ 代入(5.2.2)式,得

$$\omega = \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right).$$

由于 $\lambda>1$,两个不动点的特征值都是负值,因而两个不动点都是稳定的. 将所有的不动点随控制参量 λ 的变化画在一张图中,用实线表示稳定不动点,用虚线表示不稳定不动点,就得到了如图 4.5 所示的系统动力学分岔图,这是一个典型的叉型分岔.

除了叉型分岔会产生一对新的稳定不动点以外,一维动力系统中还存在着另一种产生不动点的方式,上一章讨论的虫口模型就属于这种情况. 重新写出虫口模型的无量纲形式:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}.$$

如图 4.8 所示,当控制参量增加到一个临界值 r_c 时,系统的不动点从两个变为四个. 现在分析这四个不动点的局部稳定性.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = r - \frac{2rx_s}{k} - \frac{2x_s}{(1+x_s^2)^2}. \tag{5.2.3}$$

显然 $x_s=0$ 是一个不稳定不动点. 我们可以将其他不动点代入式(5.2.3)得到这些不动点的稳定性质. 但是对于一维系统有更简洁的方法. 从图 4.9 分析看到,一维系统不动点的稳定性肯定是沿 x 轴交替变化的. 如果 $x=0$ 是不稳定的,那么图 4.9 中的 a 点一定是稳定的,b 是不稳定的,c 又是稳定的. 就是说新产生的不动点一个一定是稳定的,一个一定是不稳定的. 在两个不动点产生的临界状态时,直线 $r(1-x/k)$ 与曲线 $x/(1+x^2)$ 相切,如图 4.8 所示,因而有

$$r\left(1 - \frac{x}{k}\right) = \frac{x}{1+x^2}, \tag{5.2.4}$$

与

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[r\left(1 - \frac{x}{k}\right)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{x}{1+x^2}\right]. \tag{5.2.5}$$

将(5.2.4)与(5.2.5)式代入(5.2.3)式,得到在临界点上系统的特征值等于 0.

总结上面的分析，我们看到另一类分岔现象：在控制参量到达临界点之前，系统在相空间某个局部不存在不动点；当控制参量移动到临界点位置时，系统在此局部产生一个不动点，它是临界稳定的；当控制参量越过临界点后，此不动点一分为二，其中一个是稳定的，一个是不稳定的．这类分岔在一维系统中被称为极限点分岔(limit point bifurcation)，在二维系统中被称为鞍-结点分岔(saddle-node bifurcation)．鞍-结点分岔的动力学行为会在下一节介绍．在下一章会讨论这两类分岔的正则形式．

极限点分岔或鞍-结点分岔是灾变理论的基本形式．进一步分析虫口模型动力学行为随控制参量的变化可以得到灾变理论的基本思想．首先建立虫口模型的相图．经过微分后从(5.2.5)式可以得到

$$-\frac{r}{k}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}. \tag{5.2.6}$$

将此式代入(5.2.4)式得到控制参量 r 与 x 的函数关系：

$$r=\frac{2x^3}{(1+x^2)^2}. \tag{5.2.7}$$

将(5.2.7)式代入(5.2.6)式，得到控制参量 k 与 x 的函数关系：

$$k=\frac{2x^3}{x^2-1}. \tag{5.2.8}$$

虫口模型要求 $k>0$，这意味着 $x>1$，以 x 作为参量，可以在控制参量空间中画出虫口模型的相图，如图 5.3 所示．这个相变图将控制参量空间分为三部分，避难态，虫口数量很少；爆发态，虫口数量很大；双稳态，两个状态共存．对于一个固定的 k 值(例如 $k=20$)，如果我们逐渐增加控制参量 r，虫口数量会从避难态进入双稳态，这时避难态仍然存在，所以系统在没有大的扰动的情况下仍会保持在避难态，而不会跳到爆发态．但是如果扰动的强度超过了图 4.9 中的 b 点，避难态就会跳到爆发态．同样，爆发态在双稳区时经过一个扰动(过图 4.9 中的 b 点)会跳回到避难态．当控制参量 r 继续增加到达双稳态与爆发态的边界时，避难态与不稳定点经过一个极限点分岔一起消失，系统会经过一个突变过程到达爆发态．当系统在爆发态时，如果控制参量向相反的方面调节，系统不会马上回到原来的避难态．只有控制参量下降到另一个临界值时，系统才会经过一个极限点分岔，通过一个突变过程回到避难态．图 5.4 表示定态 X_s 随控制参量 k 与 r 的变化．注意到当 k 足够大时，x 随 r 的变化是一条 S 形的曲线，这种形式的曲线在磁学中被称为磁滞回线．曲线的两个关于 r 的极值点就是极限点分岔的分岔点，在分岔点的两侧，一边是单稳态，一边是双稳态．当系统从双稳态向单稳态过渡时，系统要经过一个跃变过程从一个状态跳到另一个状态．从

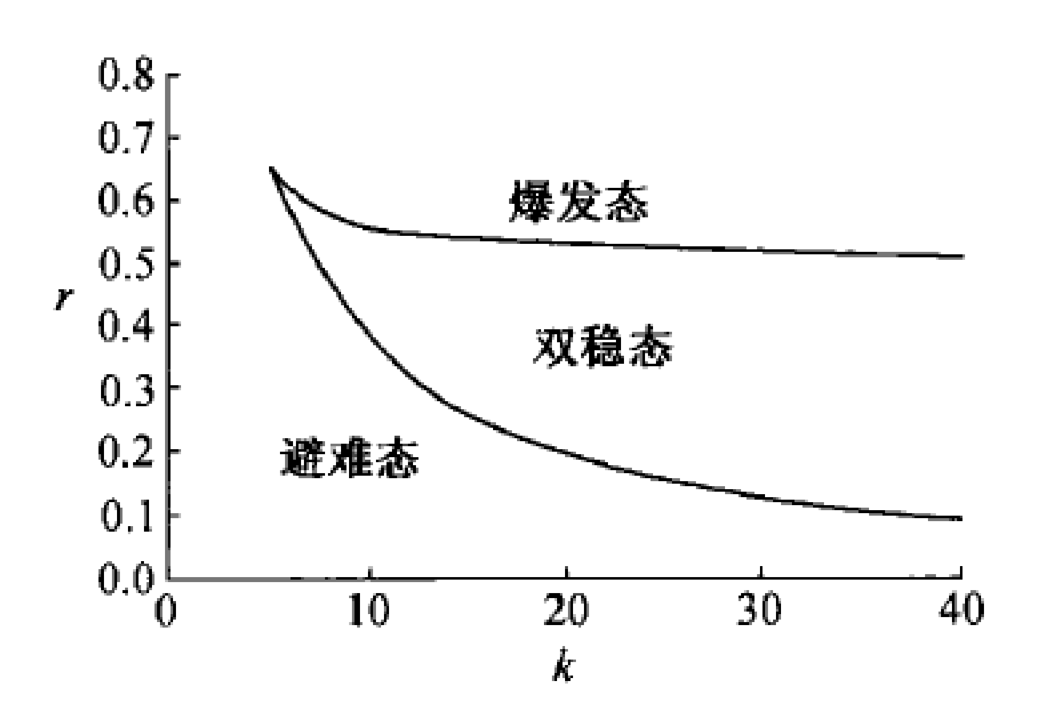


图 5.3 虫口模型的相变图

图 5.4 可以看到，由于非线性效应，在某些情况下系统会出现极限点分岔，在这个分岔点附近，系统控制参量的一个小的变化会引起系统状态的突变. 这类性质是在线性系统中看不到的. 顺便提到，类似图 5.4 的分岔图在生态系统与大气系统中经常会碰到. 目前人们激烈讨论的温室效应的热点问题之一就是：决定大气系统是否存在极限点分岔或鞍-结点分岔？现阶段的状态离极限点分岔或鞍-结点分岔还有多远？

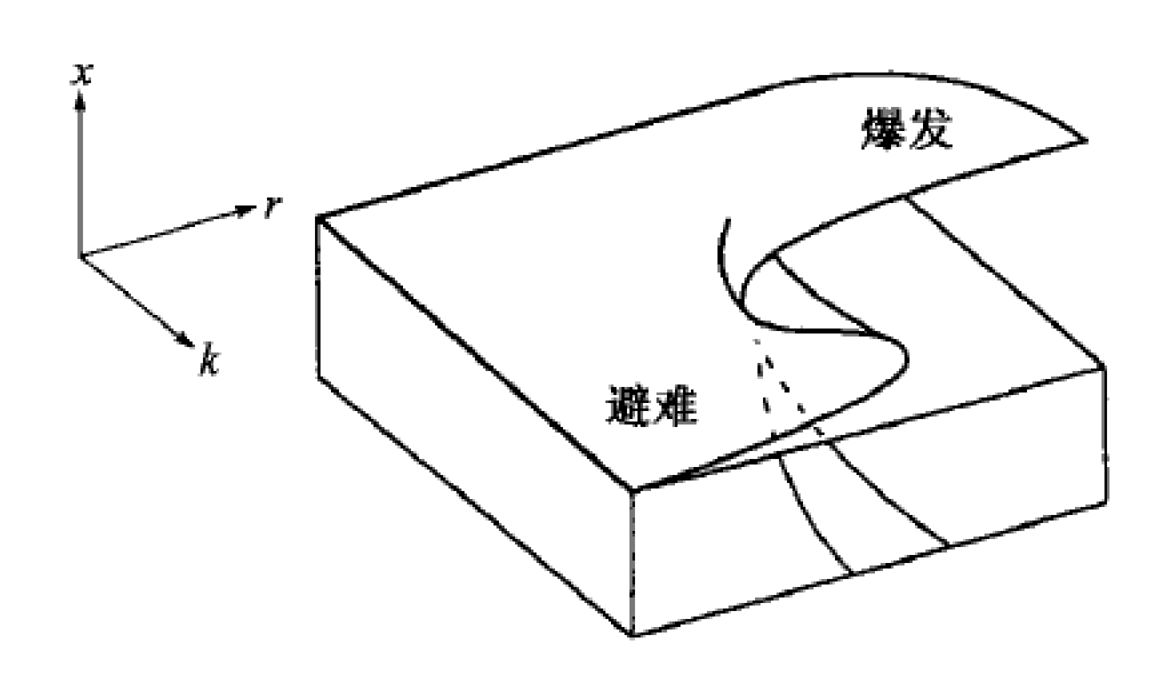


图 5.4 虫口模型的分岔图

单变量体系不仅能讨论在线性坐标中的一维问题，还可讨论具有周期性质的二维问题. 在以前的分析中，方程(4.1.1)都是在欧几里得空间中定义的，对于某些周期函数问题，考虑环形空间是比较方便的. 下面介绍环形相空间的向量场问题. 我们把系统限定为一维环形空间. 这时方程的一般形式为

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = f(\theta). \tag{5.2.9}$$

由于受到解的唯一性定理的限制，在环形空间中系统对(5.2.9)右边的函数形式有严格的限制，例如 $f(\theta)=\theta$ 不能是一个向量场. 因为当变量 θ 在绕环形空间

一周后回到原来的位置，这个位置的向量应该是唯一的. 所以在环形相空间中向量场应该满足 $f(\theta)=f(\theta+2\pi)$. 下面在环形相空间中分析带扭矩的单摆问题，从中可以体会到在环形相空间分析周期流形的优越性. 如图 5.5 所示，一个带摩擦的单摆受到一个逆时针方向的恒定扭矩 Γ 的作用. 设 m 为单摆小球的质量，L 为单摆长度，g 为引力常数. 根据牛顿第二定律，得方程

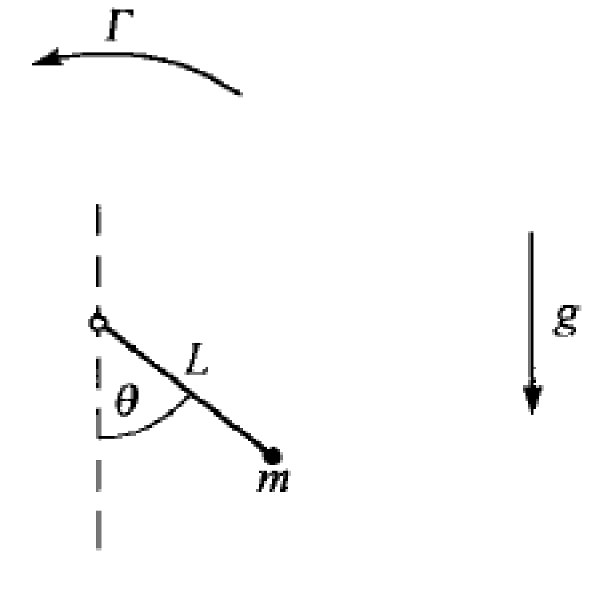


图 5.5　带扭矩的单摆问题

$$mL^2\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+mgL\sin\theta=\Gamma. \tag{5.2.10}$$

如果系统的惯性力远小于摩擦力，根据以前讨论的中心流形定理，方程(5.2.10)可以简化为

$$b\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+mgL\sin\theta=\Gamma. \tag{5.2.11}$$

将此方程无量纲化，令

$$\tau=\frac{mgL}{b}t,\quad \gamma=\frac{\Gamma}{mgL},$$

得无量纲方程

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}=\gamma-\sin\theta. \tag{5.2.12}$$

显然此方程的右端是一个周期为 2π 的周期函数，满足环形向量场的要求. 此方程当 $\gamma>1$ 时没有不动点，由于方程右端总大于 0，变量 θ 会无限增加. 这种行为在欧几里得空间中，状态轨迹在 θ 方向是一个周期函数，在环形相空间中对应为一个闭合环. 由于环形力场 Γ 是均匀的，小球的运动速度会随小球的位置变化，当 $0<\theta<\pi$ 时，小球减速运动，当 $\pi<\theta<2\pi$ 时，小球加速运动，如图 5.6(a)、(d)所示. 如果 $\gamma=1$，系统会出现一个不动点 $\theta=\pi/2$，这个不动点是临界稳定的，见图 5.6(b)、(e). 如果 $\gamma<1$，方程(5.2.12)会出现两个不动点：$\theta_{s1}=\arcsin\gamma$，$\theta_{s2}=\pi-\arcsin\gamma$. 用线性稳定性分析考查这两个不动点的稳定性：

$$\frac{\partial f}{\partial\theta}=-\cos\theta_s=\mp\sqrt{1-\gamma^2}.$$

因而 $\theta_{s1}=\arcsin\gamma$ 是渐近稳定的，$\theta_{s2}=\pi-\arcsin\gamma$ 是不稳定的. 如图 5.6(c)、(f)所示. 这里我们又看到了极限点分岔. 不同的是随着一对不动点的产生或消灭，系统由振荡态变成定态，或从定态变成振荡态. 极限点分岔是极限环产生的一种形式，在下一章中会作进一步的分析.

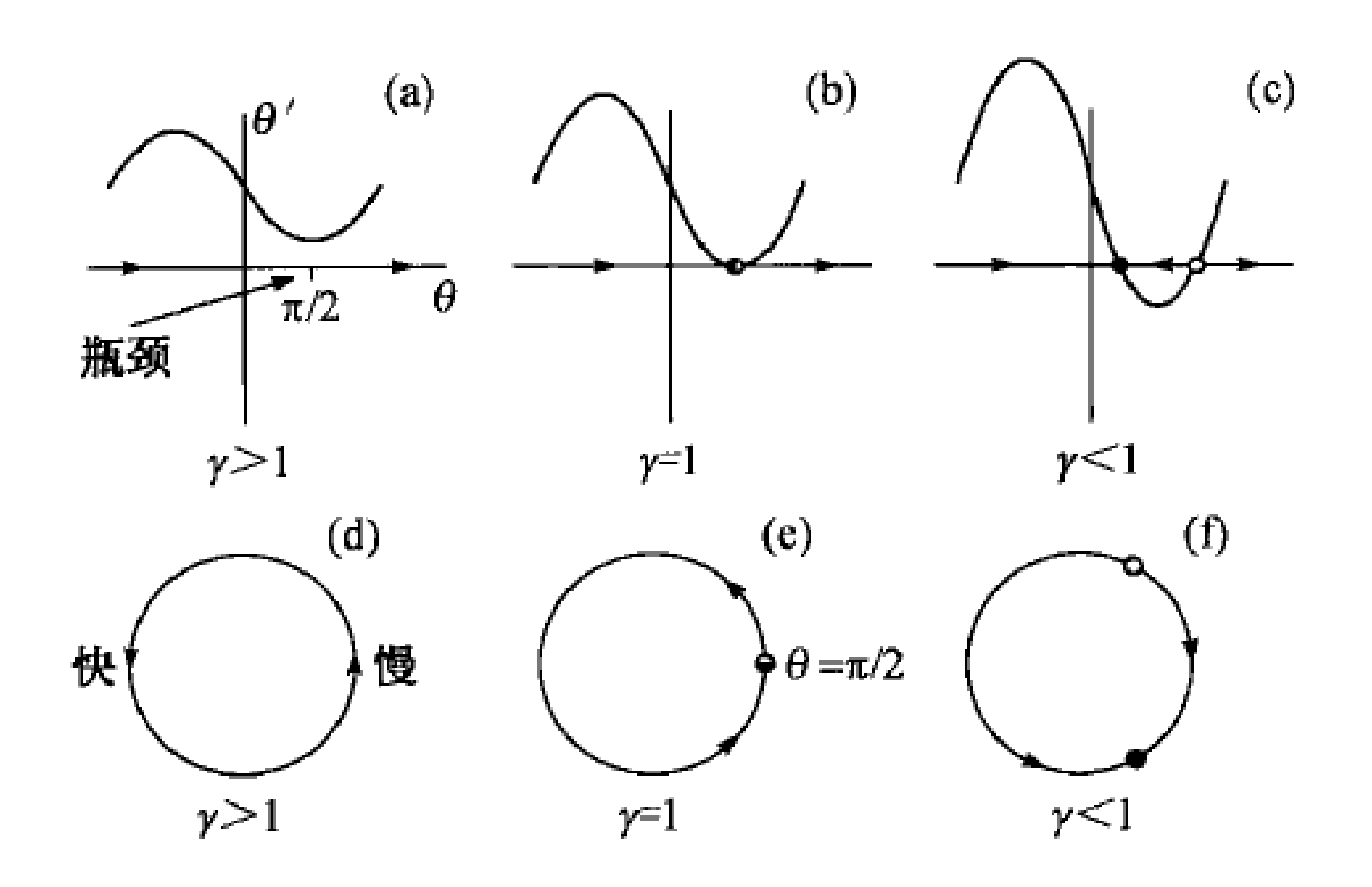


图 5.6 在直角坐标与环坐标中的系统流形图

经极限点分岔而产生的极限环的周期函数不是正弦函数，这从图 5.6 中可以容易看出. 每当系统状态趋于 $\pi/2$ 时，系统的运动会放慢；在临界点附近它的运动速度趋于 0. 对于方程(5.2.12)容易计算出系统的运动周期：

$$T=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\gamma-\sin\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{\gamma^2-1}}. \tag{5.2.13}$$

可以以此估计系统在临界点 $\gamma_c=1$ 附近的周期：

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\gamma^2-1}}=\frac{2\pi}{\sqrt{\gamma+1}\sqrt{\gamma-1}}\approx\sqrt{2}\pi(\gamma-\gamma_c)^{-1/2}.$$

上式所示的极限环周期的平方根反比律，在极限点分岔或鞍-结点分岔附近是一个普适性的定律. 这一点将在下一章的非线性系统正则方程中详细讨论. 在临界点附近周期延长现象出现的原因是两个不动点碰撞消失后的“剩余”效应. 由于这时这两个不动点已经不存在了，而它的作用好像还存在，所以这种效应又被称为“鬼魂”效应(ghost effect). 鬼魂效应从图 5.6(a)中很容易理解. 当 γ 只比 $\gamma_c=1$ 稍大时，两个不动点已经消失，但流形仍然会感觉到它们鬼魂的影响. 如果考察变量 θ 随时间的变化，我们会发现系统状态会在 $\pi/2$ 附近停留很长时间，如图 5.7 所示，这种现象被称为瓶颈效应.

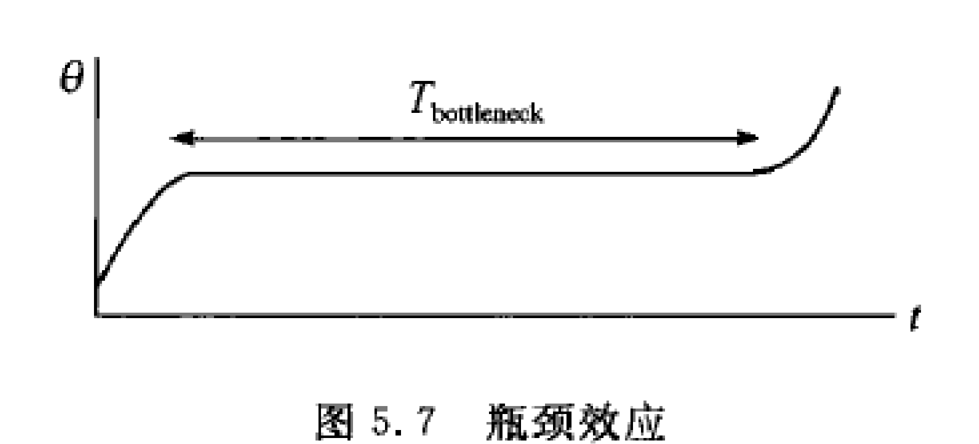


图 5.7 瓶颈效应

在本节的最后，我们在一维环形相空间中分析非线性科学中的一个普遍存在的现象：同步行为与锁频现象. 自然中同步现象最突出的例子是萤火虫. 在南亚的一些地区，入夜以后成千上万的雄性萤火虫会聚集在树丛中同步地闪现它

们的萤光，而雌性萤火虫会在这个“大合唱”中寻找它们的最爱. 当然，这个大合唱是没有指挥的，那么萤火虫怎样使它们一明一暗的萤火变得同步呢？回答这个问题的关键是萤火虫会相互影响. 当一个萤火虫看到其他萤火虫的闪光时，它会放慢或加快自己的闪光速度使其与其他萤火虫的闪光频率同步. 1978 年，一个非线性实验科学家对萤火虫的闪光行为进行了研究[24]. 他用人工闪光刺激萤火虫，并观察萤火虫的闪光频率与激发频率的关系. 他的研究结果显示，当刺激频率接近于萤火虫闪光的自然频率(大约为 0.9 秒)时，萤火虫会改变自身的闪光频率使其与刺激频率同步；当刺激频率太快或太慢时，这种锁频行为消失. 在这时，光刺激与萤火虫闪光的相位差并不是匀速增加，在周期的一些相位，相位差增加非常缓慢. 这时萤火虫尽自己最大努力试图与刺激同步；当这种努力失败以后，相位差会迅速增加 2π 左右，以后萤火虫再次进行它的努力，这种现象在动力学中被称为相漂移.

根据这个实验，我们可以建立一个简单的动力学模型，来描述萤火虫的闪光节律以及它与外界刺激的关系. 设 θ 是萤火虫闪光的相位，$\theta=0$ 对应于萤火虫闪光的状态. 假设在没有外部刺激时萤火虫闪光的频率为 ω，因而有 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t=\omega$. 现在对萤火虫加一个外界刺激，它的相位用 Θ 表示，$\Theta=0$ 是外界的闪光状态，刺激频率为 Ω. 根据实验，当刺激在萤火虫闪光之前一点发生，萤火虫会加快自己的萤光频率；反之，当刺激发生在萤火虫闪光之后一点发生，萤火虫会减慢自己的闪光频率. 描述这个行为最简单的方程为：

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega+A\sin(\Theta-\theta),\quad A>0. \tag{5.2.14}$$

定义相位差 $\phi=\Theta-\theta$，相位差方程为

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\Theta-\theta)}{\mathrm{d}t}=\Omega-\omega-A\sin\phi.$$

将此方程无量纲化，令 $\tau=At$，$\mu=(\Omega-\omega)/A$ 得

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\gamma}=\mu-\sin\phi. \tag{5.2.15}$$

此方程与带扭矩的单摆方程完全一致，不同的是控制参量可正可负. 极限分岔点有两个：1，−1. 当控制参量在两个分岔点中间，系统处在锁频状态，萤火虫的闪光频率与外界刺激频率相同，且相位差是固定的；当控制参量在两个分岔点的外边，锁频状态消失. 这个简单模型的预测可以得到实验验证. 首先，相变点在有量纲方程中为 $|(\Omega-\omega)/A|=1$，因而锁频区应为：$\omega-A<\Omega<\omega+A$. 在实验中测量了锁频区后，很容易推导出系数 A. 另外，相漂移的周期可以通过(5.2.13)式得到. 将(5.2.13)式换成有量纲的形式，得相漂移周期

$$T_{\mathrm{drift}} = \frac{2\pi A}{\sqrt{(\Omega-\omega)^2 - A^2}}.$$

根据试验中 T_{drift} 随 Ω 的变化可以得到系数 A. 两个推导的结果应该在误差范围内一致. 总结上面一段的讨论, 我们看到锁频与同步现象的产生机理是系统出现一个极限点分岔或鞍-结点分岔. 分岔后产生了稳定不动点, 使系统的相漂移行为得到控制, 从而引起锁频.

§5.3 双变量系统

非线性方程在双变量系统的一般表达式为

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = f(X,Y), \tag{5.3.1a}$$

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = g(X,Y). \tag{5.3.1b}$$

如果方程存在不动点 (X_s, Y_s), 则双变量所对应的线性微扰方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a_{11}x + a_{12}y, \tag{5.3.2a}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a_{21}x + a_{22}y. \tag{5.3.2b}$$

其中 x, y 为微扰量, a_{ij} 由下式决定:

$$a_{11} = \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X_s,Y_s}, \quad a_{12} = \left.\frac{\partial f}{\partial Y}\right|_{X_s,Y_s},$$

$$a_{21} = \left.\frac{\partial g}{\partial X}\right|_{X_s,Y_s}, \quad a_{22} = \left.\frac{\partial g}{\partial Y}\right|_{X_s,Y_s}.$$

线性方程(5.3.2)与上一章(4.3.4)的形式相同. 因而可以照搬该方程分析的结果. 特征值满足如下代数方程:

$$\omega_{1,2} = \frac{Tr \pm \sqrt{Tr^2 - 4\Delta}}{2},$$

其中

$$Tr = a_{11} + a_{22}, \quad \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

如果 $Tr^2 - 4\Delta > 0$, 则特征方程有两个实根, 方程(5.3.2)解的形式为

$$x = c_1 \mathrm{e}^{\omega_1 t} + c_2 \mathrm{e}^{\omega_2 t},$$

$$y = c_1 \mu \mathrm{e}^{\omega_1 t} + c_2 \nu \mathrm{e}^{\omega_2 t}.$$

如果 $\omega_1 \neq \omega_2$, 则 $\mu = \nu$. 做线性变换

$$\hat{x} = \frac{1}{\mu - \nu}(-\nu x + y), \quad (\mu \neq \nu),$$
$$\hat{y} = \frac{1}{\mu - \nu}(\mu x - y)$$

得

$$\hat{x} = c_1 e^{\omega_1 t},$$
$$\hat{y} = c_2 e^{\omega_2 t}.$$

因而当 $\omega_2 < \omega_1 < 0$ 时，不动点(X_s, Y_s)是稳定结点，它是渐近稳定的，如图 4.10(a)所示. 当 $\omega_1 < 0 < \omega_2$ 时，不动点(X_s, Y_s)是鞍点，在 $\hat{y}$ 方向上系统的流形分散，在 $\hat{x}$ 方向上系统的流形收缩，所以 $\hat{x}$ 是带鞍点的一维流形在不动点的方向，如图 4.10(c)所示. 当 $0 < \omega_1 < \omega_2$ 时，不动点(X_s, Y_s)是不稳定结点，如图 4.10(b)所示.

如果 $Tr^2 - 4\Delta = 0$，即系统出现简并时，方程(5.3.2)解的一般形式为：

$$x = (c_1 + c_2 t)e^{\omega t},$$
$$y = (c_1 \mu + c_2 \nu t)e^{\omega t}, \qquad \mu \neq \nu.$$

做线性变换

$$\hat{x} = x,$$
$$\hat{y} = -\frac{c_2}{c_1}\frac{1}{\mu - \nu}(\nu x - y),$$

得

$$\hat{x} = (c_1 + c_2 t)e^{\omega t},$$
$$\hat{y} = c_2 e^{\omega t}.$$

因而当 $\omega < 0$ 时不动点(X_s, Y_s)是稳定结点，当 $\omega > 0$ 时不动点(X_s, Y_s)是不稳定结点.

如果 $Tr^2 - 4\Delta < 0$，特征值为一对共轭复数. 方程(5.3.2)解的一般形式为

$$x = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t),$$
$$y = c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t + \phi).$$

其中 $\alpha = \mathrm{Re}(\omega)$，$\beta = \mathrm{Im}(\omega)$. 做线性变换

$$\hat{x} = x,$$
$$\hat{y} = -\frac{c_2}{c_1}\tan\phi x + \frac{1}{\cos\phi}y,$$

得

$$\hat{x} = c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t,$$
$$\hat{y} = c_2 e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

当 $\alpha < 0$ 时不动点(X_s, Y_s)是稳定焦点，如图 4.10(d)所示；当 $\alpha > 0$ 时不动点

(X_s,Y_s)是不稳定焦点，如图 4.10(e)所示；当 $\alpha=0$ 时，不动点(X_s,Y_s)是中心点，如图 4.10(f)所示.

二维动力系统中不动点的线性稳定性只有以上所列的六种类型. 将系统的所有不动点的线性稳定性分析清楚，并在二维流形图上标出，再经过一些定性分析，就会知道系统全局流形图的大致结构. 对于简单的不动点类型，如结点与鞍点构成的系统，我们在上一章中分析羊兔模型时已经作过介绍，见图 4.13. 现在对更复杂的流形结构做进一步分析.

以单摆模型为例，无量纲的单摆模型为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\sin\theta=0. \tag{5.3.3}$$

方程的时间尺度是$\sqrt{g/L}$. 将该方程写成(4.1.1)的形式：

$$\frac{d\theta}{dt}=\Omega, \tag{5.3.4a}$$

$$\frac{d\Omega}{dt}=-\sin\theta, \tag{5.3.4b}$$

其中 Ω 是无量纲的角速度. 该系统有无穷多个不动点$(\theta_s,\Omega_s)=(k\pi,0)$，其中 k 是整数. 将方程(5.3.4)在不动点附近线性化，对应的特征方程为

$$\omega^2+1=0,\qquad 当\ k\ 为偶数,$$
$$\omega^2-1=0,\qquad 当\ k\ 为奇数.$$

因而，不动点$(k\pi,0)$是中心点. 当 k 为奇数时，不动点$(k\pi,0)$是鞍点. 容易得到鞍点的稳定方向是$(1,-1)$，不稳定方向是$(1,1)$. 将这些局部行为画在一张二维流形图上，得图 5.8. 为了找出这个系统的全局流形图，必须对系统作一些分析. 注意到方程(5.3.4)是一个保守系统，因而该系统应该有一个守恒量. 在方程(5.3.3)两端同乘 $d\theta/dt$ 并积分，得

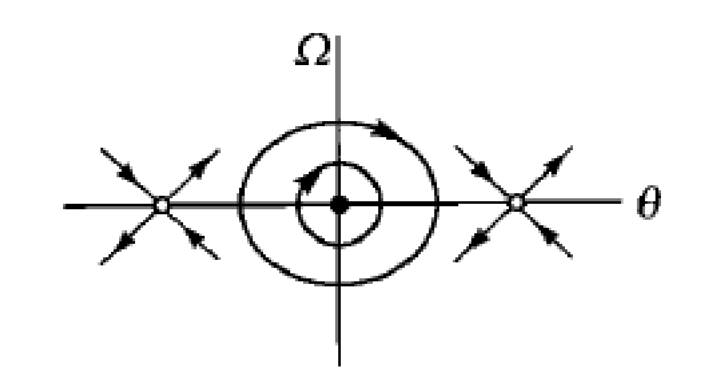


图 5.8 单摆模型的局部流形图

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-\cos\theta=\text{const}.$$

这个量对应于系统的总能量. 由于能量守恒，经过 2π 周期后相空间中的任何一点都会回到它的原始位置. 考虑到这种对称，两个鞍点应该通过一条流线相连接，因而系统中应该存在异宿轨道. 异宿轨道的内部是一个中心点，围绕中心点应该是闭合轨道. 由于相空间中的流线不相交，所以异宿轨道内部是围绕着中心点的闭合轨道的集合. 异宿轨道的外部流形是周期变化的. 将这些因素都考虑进去，我们可以大致画出相空间的流形结构，如图 5.9 所示. 图 5.9 的流形图

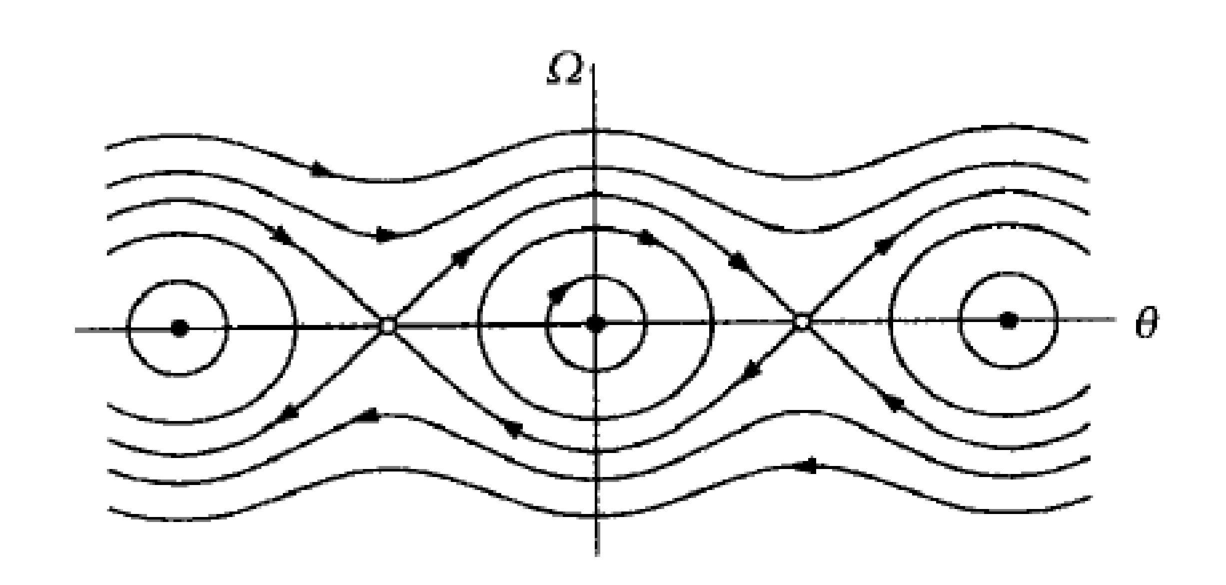


图 5.9　单摆模型的全局流形图

有明确的物理意义. 系统能量的最低值是 −1，它对应于(0,0)点，这个点是中心点. 当系统能量增加时，单摆开始以中心点位置为中心作摆动，这对应于异宿轨道内部的闭合轨道. 如果系统能量继续提高到临界态 $E=1$ 时，闭合环变成异宿轨道. 越过这个闭合轨道单摆开始围绕中心轴转动，这种行为在相空间中对应于周期轨道. 对于这个系统，可以用一个柱空间表示系统的流形. 将 $\theta=-\pi$ 与 $\theta=\pi$ 经过如图 5.10 所示的过程连接起来，就得到系统的柱形相空间图. 用柱空间表示周期轨道系统有几点优越性. 首先，周期轨道在柱空间中变成闭合的，这更清楚地表明了周期轨道的性质. 另外，从上面的分析中知道，所有鞍点与中心点的性质都是一样的，这在柱空间中一目了然，因为在这种表示下系统只有一个中心点与一个鞍点. 注意到在柱形相空间中异宿轨道变成了同宿轨道. 对于保守系统，我们还可以将守恒量作为柱形相空间的一维来代替角速度 Ω，如图 5.11 所示. 这时相空间的形状变为一个 U 形，系统轨道的物理意义更加清楚. 当能量小时，系统呈现摆动，在图中是一个单一的闭合轨道；当能量大时，系统呈现旋转态，旋转的方向可正可负，在图中是两个镜像对称的闭合轨道.

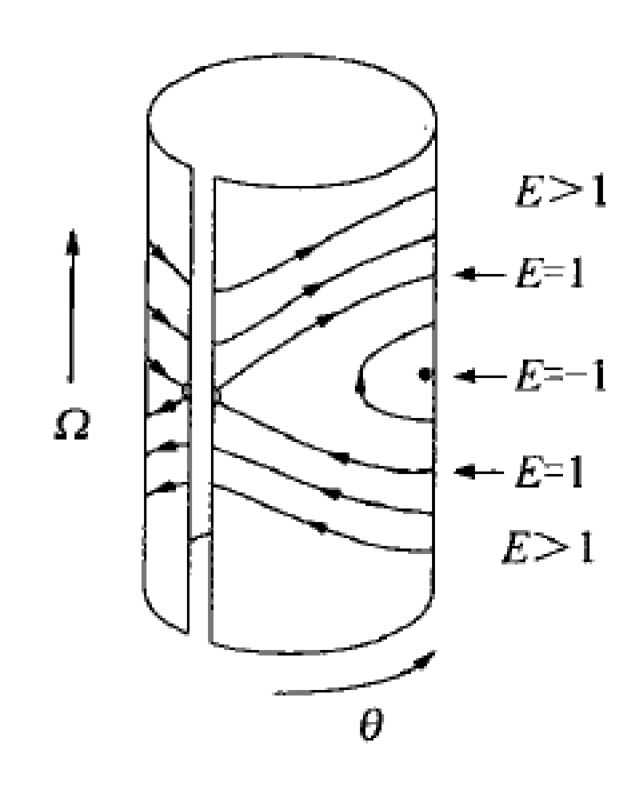


图 5.10　单摆模型在柱空间的流形图

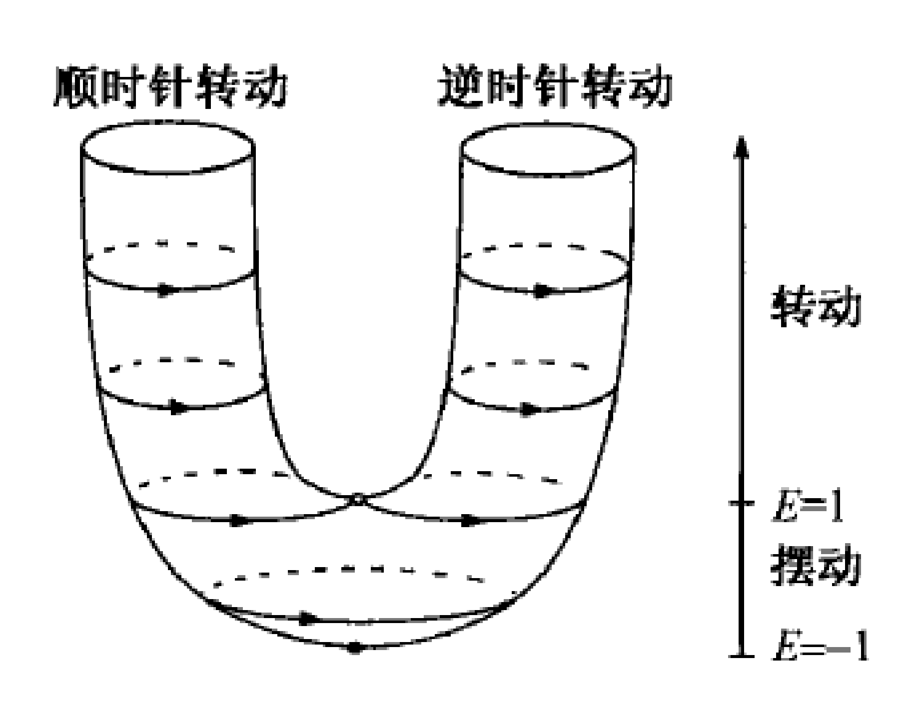


图 5.11　单摆模型在 U 形空间的流形图

如果在单摆中加上一个小的摩擦力，则系统的中心点变成稳定焦点，而系统的鞍点性质不变.这时单摆系统不再是保守系统，所以原来的闭合轨道都不存在了，图 5.12(a)表示了这种情况下系统在(θ,Ω)空间的流形图，对应的(θ,E)柱形流形图由 5.12(b)给出.注意到由于系统是耗散的，它的总能量随时间下降.

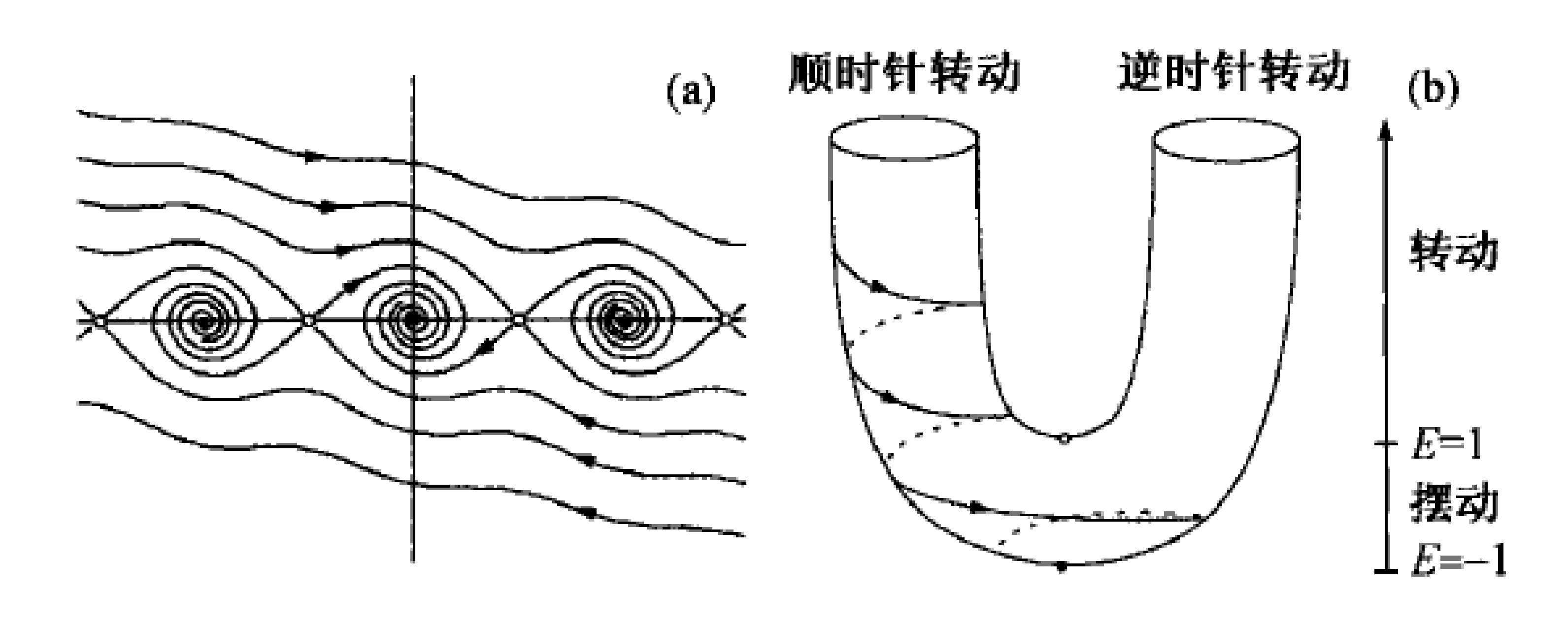


图 5.12 有摩擦单摆模型的流形图

当系统的控制参量发生变化时，系统的不动点及它们附近的动力学行为都会相应地发生变化.如果控制参量的变化引发了某个不动点从稳定的变为不稳定的，就会引起非平衡相变.在上一节讨论了极限点分岔对应的非平衡相变.现在讨论鞍-结点分岔引起的相变.我们能看出两者之间的差别是很小的.以分子生物学中基因控制动力系统为例[25].在一些基因调控网络中，基因表达的蛋白质会对基因表达本身起促进作用，这个网络被称为正反馈网络.在无量纲的形式中，这个正反馈网络动力学行为可以由下面的微分方程描述：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-ax+y, \tag{5.3.5a}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{x^2}{1+x^2}-by. \tag{5.3.5b}$$

这里 x 与 y 分别正比于蛋白质与 mRNA 的浓度，$a,b>0$ 是 x 与 y 的分解速率，基因表达速率的形式为希尔函数形式，这反映了当蛋白质浓度到达一定值时才能引起基因转录，当蛋白质浓度太高时，转录速率饱和，这个形式与 §4.3 讨论的虫口模型中鸟对虫口数量的影响相同.首先寻找系统的所有不动点.从图5.13 可知，不动点是直线 $y=ax$ 与曲线 $y=x^2/b(1+x^2)$的交点.当 a 充分大时，系统存在唯一的不动点(0,0)，当 a 逐渐下降到一定值时，系统会有三个不动点，其中一个仍是(0,0)，另外两个由方程 $ab(1+x_s^2)=x_s$ 决定.这两个不动点在相空间的坐标为

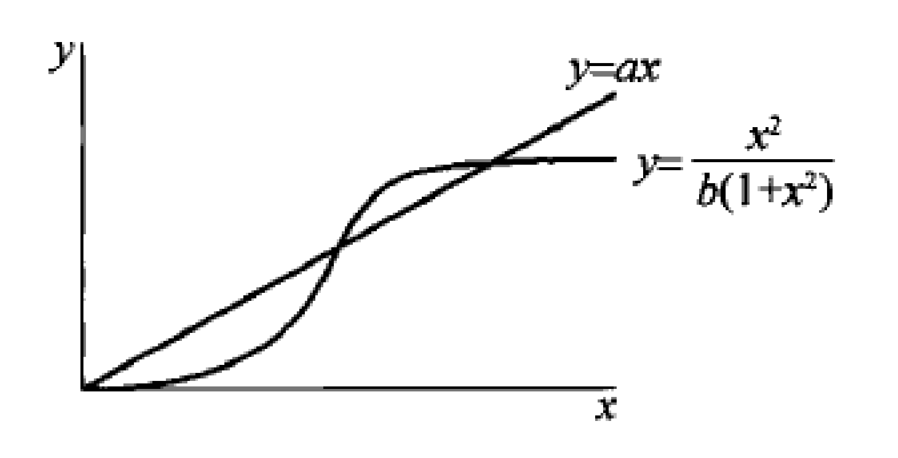


图 5.13 基因控制模型中的不动点

$$x_s = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a^2 b^2}}{2ab},$$

$$y_s = a x_s.$$

因而当 $2ab<1$ 时，有两个不动点产生；临界点为 $2ab=1$，这时对应的不动点为 $x_s=1$.

下一步分析各个不动点的线性稳定性. 方程(5.3.5)对应的雅可比矩阵有如下形式：

$$\begin{pmatrix} -a & 1 \\ \dfrac{2x_s}{(1+x_s^2)^2} & -b \end{pmatrix}. \tag{5.3.6}$$

特征值为

$$\omega_{1,2} = \frac{-(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab + \dfrac{8x_s}{(1+x_s^2)^2}}}{2}. \tag{5.3.7}$$

容易看出上式根号内部的值大于 0，所以系统的不动点只可能是两类：稳定结点或鞍点. 对于不动点(0,0)，$\omega_1=-b$，$\omega_2=-a$，由于 $a,b>0$，所以不动点(0,0)不论 a,b 取任何正数时都是稳定结点. 对于临界值时的不动点$(1,a)$，$\omega_1=0$，$\omega_2=-(a+b)$，所以这时的不动点有临界稳定性. 对于新产生的一对不动点，它们的性质可以由矩阵(5.3.6)对应的行列式值 Δ 决定. 当 $\Delta>0$ 时对应的不动点是稳定结点，反之是鞍点. 利用 $ab(1+x_s^2)=x_s$，可得

$$\Delta = ab - \frac{2x_s}{(1+x_s^2)^2} = ab\left[1 - \frac{2}{1+x_s^2}\right] = ab\left[\frac{x_s^2 - 1}{1+x_s^2}\right]. \tag{5.3.8}$$

所以 $x_s<1$ 对应的不动点是鞍点，$x_s>1$ 对应的不动点是稳定结点. 知道了所有不动点的性质后，可以画出如图 5.14 所示的相空间图. 当控制参量 $ab>1/2$ 时，系统只有一个稳定态(0,0)，对应的物理状态是基因不表达的状态. 如果控制参量 ab 降低到 1/2 以下，一对新的不动点从系统中产生，其中一个是稳定

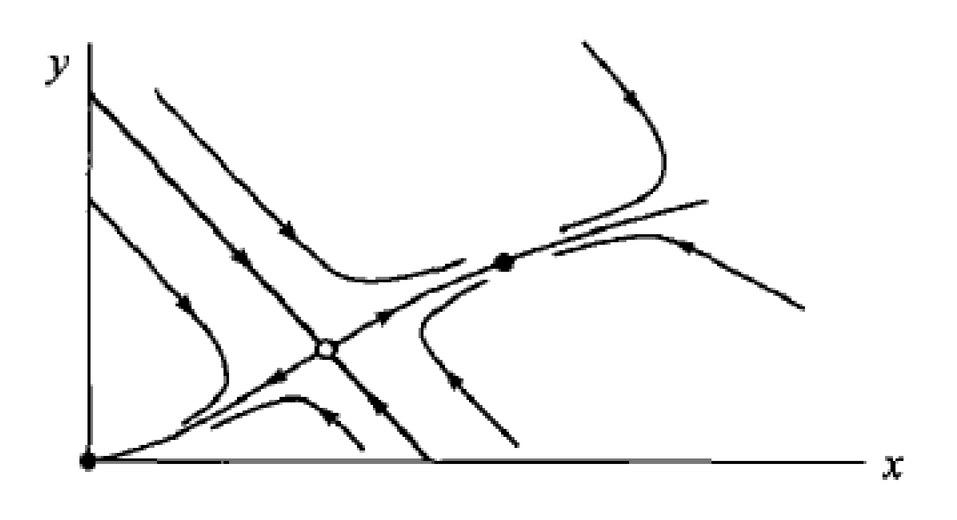


图 5.14　基因控制模型中的流形图

的，对应于基因表达的启动态；另一个是鞍点，它组成一个带鞍点的一维流形，将两个稳定点的吸引域分开. 在这种情况下，整个系统像一个生物学过程的开关，一个暂态的外界刺激可以将系统打开(基因表达)或关闭(基因不表达)，一旦系统进入这个双稳态的任何一个状态，在没有外界帮助下，系统会稳定在它的现有状态. 当然，只有当$ab<1/2$ 时系统才有开关作用，这个要求对应于蛋白质与 mRNA 的分解速率足够低.

图 5.15 是一个鞍-结点分岔的示意图，μ 是控制参量，$\mu=\mu_c$是临界点. 我们看到，鞍-结点分岔是在极限点分岔的基础上加上一维稳定流形，所以鞍-结点分岔是极限点分岔在二维空间的表示形式.

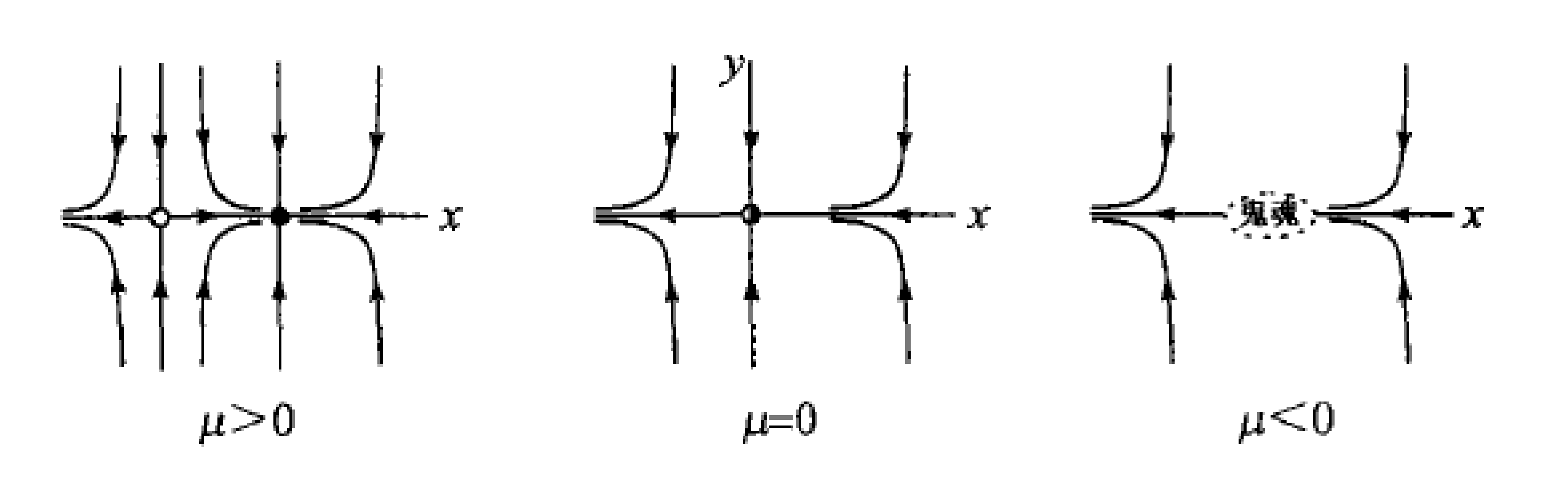


图 5.15 鞍-结点分岔

在二维系统中还可能存在极限环. 如果知道系统不动点的性质，可以利用庞加莱-本狄克森定理判断极限环的存在. 现在以生物中新陈代谢系统的糖酵解循环说明这个过程. 糖酵解循环是细胞分解糖得到能量的一个过程. 不论在生物体内还是在试管实验中，糖酵解过程总是呈现振荡现象：不同的反应中间物浓度会随时间有规律地上下周期运动，周期一般是几分钟. 糖酵解循环的机理已经被了解得比较透彻，有兴趣的读者可以参考文献[26,27].

一个简单的描述这个过程的动力学方程如下：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-x+ay+x^2y, \qquad (5.3.9a)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=b-ay-x^2y. \qquad (5.3.9b)$$

这里 x 与 y 分别是反应物 ADP(adenosine diphosphate)与 F5P(fructose-5-phosphate)的浓度. $a,b>0$ 是反应常数. 由图 5.16 看出. 曲线 $y=x/(a+x^2)$(对应于 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=0$)与 $y=b/(a+x^2)$(对应于 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=0$)只有一个交点，也就是说系统只有一个不动点. 根据庞加莱-本狄克森定理，系统存在极限环的必要条件是在相空间存在一个吸引域. 考察由图 5.16 虚线包围的区域的流形，我们会发现区域边界的流场都是向里的. 对于两条水平线与垂直线来说，结论一目了

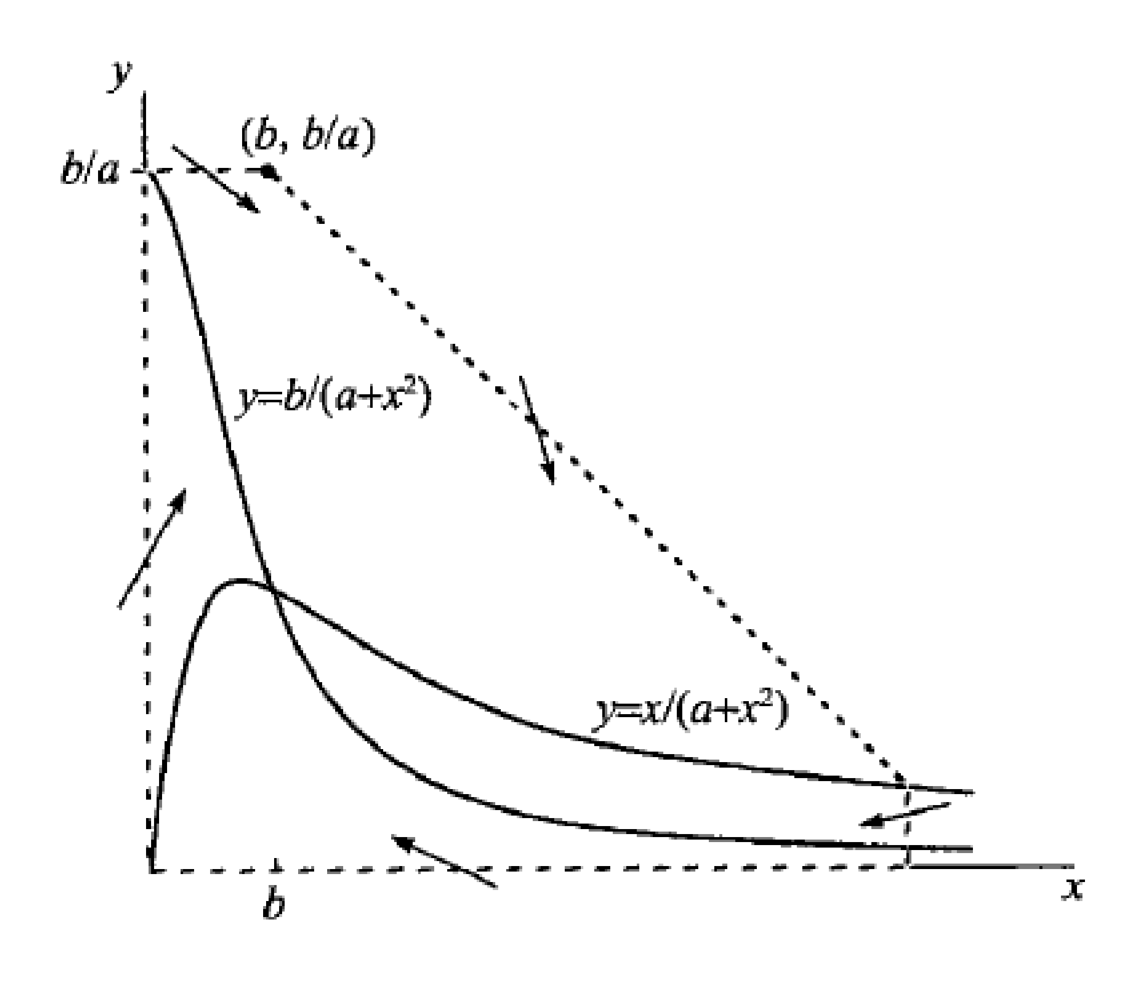


图 5.16　糖酵解系统在相空间中的吸引域

然. 例如，在不动点上方的水平线上，由于 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t<0$, $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t>0$，流场的方向是向右下方；对于不动点下方的水平线，由于 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t>0$, $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t<0$，流场的方向是左上方. 对于过点 $(b,b/a)$ 斜率为 -1 的直线考虑如下关系：根据方程(5.3.9)，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=b-x.$$

因而当 $x>b$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}<0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}<-1.$$

所以在这条线上的流场也是向里的. 因为这个区域中还包含一个不动点，所以庞加莱-本狄克森定理的要求还不能被满足. 但是，我们可以将包含这个不动点的充分小的区域从吸引域中"抠"出. 如果这个不动点是一个不稳定结点或不稳定焦点，那么新构造的区域仍然是一个吸引域，见图 5.17. 这时吸引域内部的流线是连续可微分的，又没有不动点，庞加莱-本狄克森定理的条件都被满足. 可以断定在这个域中一定存在一个极限环. 在这种情况下，系统有无极限环取决于系统的不动点是否是不稳定的. 容易得到系统不动点的解析式 $x_s=b$, $y_s=b/(a+b^2)$,

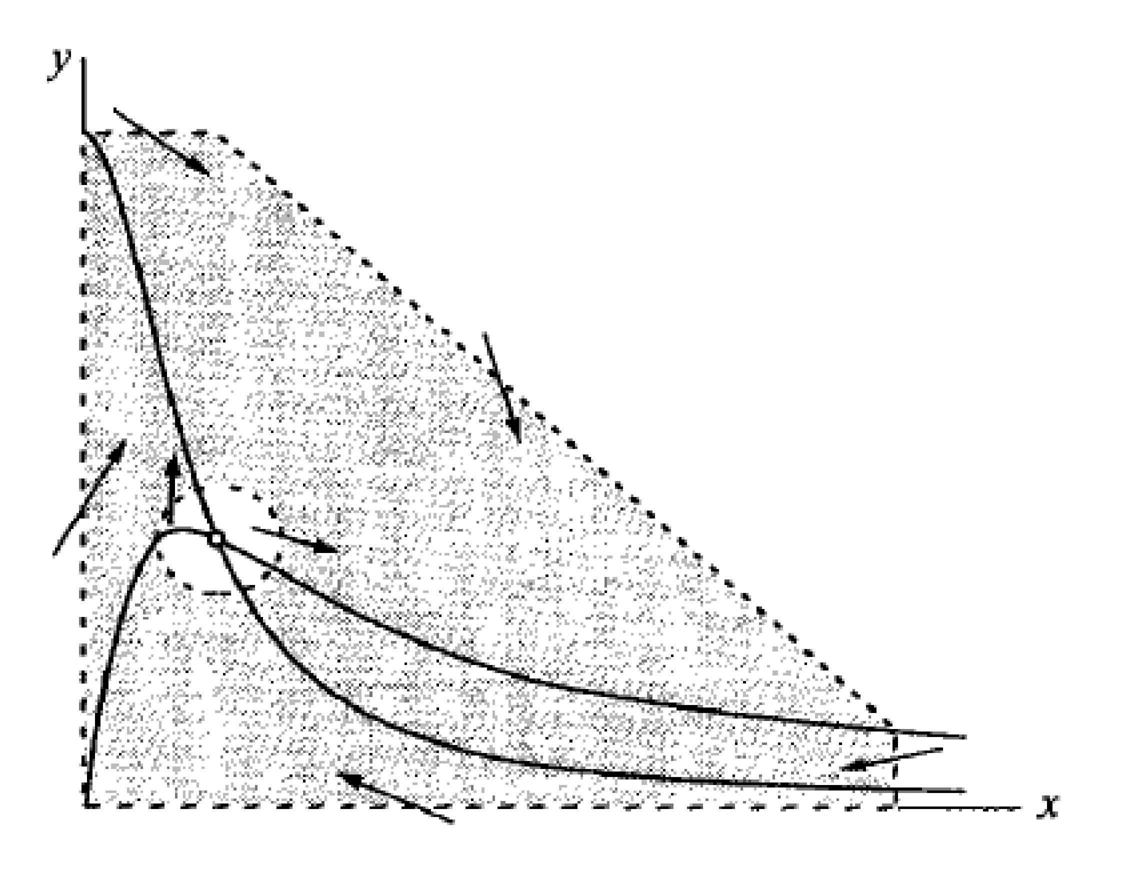


图 5.17　满足庞加莱-本狄克森定理条件的吸引域

方程(5.3.9)对应的线性方程的雅可比矩阵为

$$\begin{pmatrix} -1+2x_s y_s & a+x_s^2 \\ -2x_s y_s & -(a+x_s^2) \end{pmatrix}.$$

它的行列式值为 $\Delta=a+b^2>0$,因而不动点不会是鞍点.如果

$$Tr=-\left(\frac{b^4+(2a-1)b^2+(a+a^2)}{a+b^2}\right)>0,$$

不动点是不稳定的,反之是稳定的.在相变点有 $Tr=0$,得到相变边界:

$$b^2=\frac{1}{2}(1-2a\pm\sqrt{1-8a}).$$

图 5.18 给出了系统的相图.

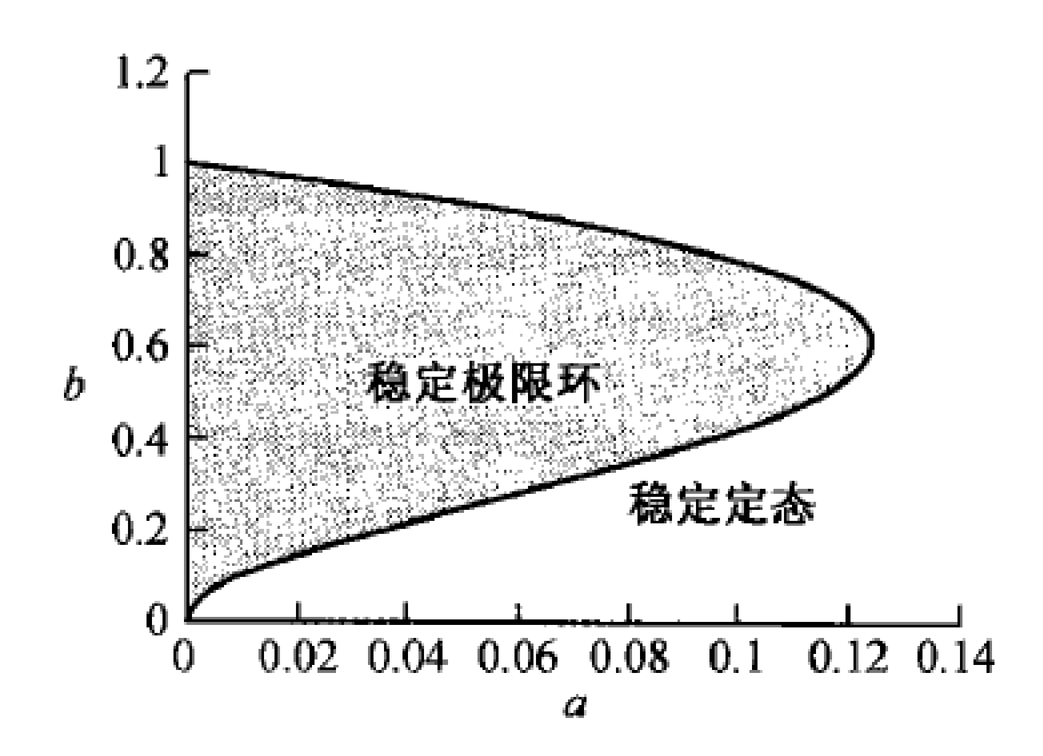


图 5.18 糖酵解系统的相变图

有些极限环的动力学行为存在两个特征时间尺度,这两个时间尺度交替出现在极限环的轨道上,考虑范德坡(Van der Pol)方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\mu(x^2-1)\frac{dx}{dt}+x=0. \tag{5.3.10}$$

做强非线性假定 $\mu\gg1$,注意到

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\mu(x^2-1)\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\frac{dx}{dt}+\mu\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\right],$$

如果令

$$F(x)=\frac{1}{3}x^3-x,\quad w=\frac{dx}{dt}+\mu F(x),$$

则

$$\frac{dw}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}+\mu(x^2-1)\frac{dx}{dt}=-x.$$

方程(5.3.10)变为如下二维动力系统:

$$\frac{dx}{dt}=w-\mu F(x),$$

$$\frac{dw}{dt}=-x.$$

再令 $y=w/\mu$，得

$$\frac{dx}{dt}=\mu[y-F(x)], \tag{5.3.11a}$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{\mu}x. \tag{5.3.11b}$$

由于 $\mu\gg1$，所以 x 是一个快变量，y 是一个慢变量. 容易得出系统存在唯一不动点(0,0)，它是一个不稳定结点. 用上面介绍的庞加莱-本狄克森判别法也可以证明系统存在一个极限环. 现在分析极限环的流形行为. 如图 5.19 所示，由于x 是一个快变量，从除了不动点以外的任何地方出发的流形都会很快地被压缩到 $y=F(x)$(对应于 $dx/dt=0$)的曲线上. 如果流形在 $y=F(x)$的右边分支，由于这时 $dy/dt<0$，它会慢慢向下移动到曲线的极值点 B 处，然后经过一个快过程跳跃到曲线的左边分支 C 点. 这时由于 $dy/dt>0$，它会慢慢上升到 D 点的位置，然后跳回到曲线右边分支 A 点的位置，重新向下运动. 整个流形的运动呈现出快慢过程的交替. 图5.20 给出了变量 x 随时间的振荡行为. 这类振荡被称为弛豫振荡. 弛豫振荡在自然界普遍存在，从化学振荡反应到神经细胞的放电都可能出现弛豫振荡. 另外，弛豫振荡系统与可激发系统有密不可分的关系. 对于这个问题我们会在讨论可激发化学波时详细讨论.

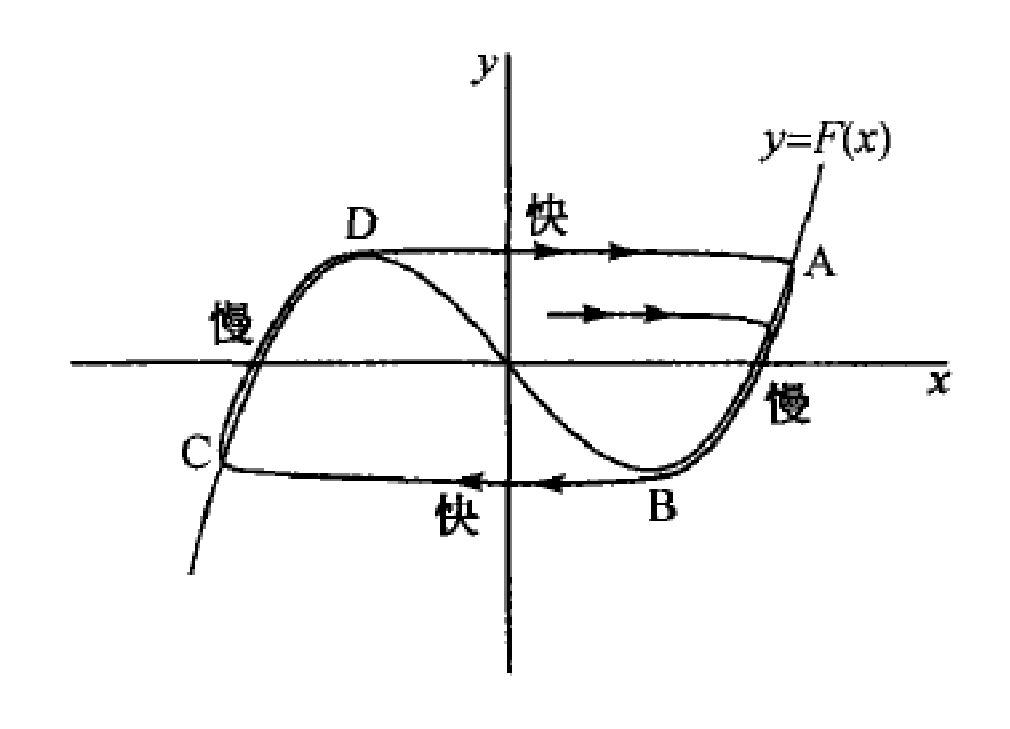


图 5.19　弛豫振荡在相空间的流形图

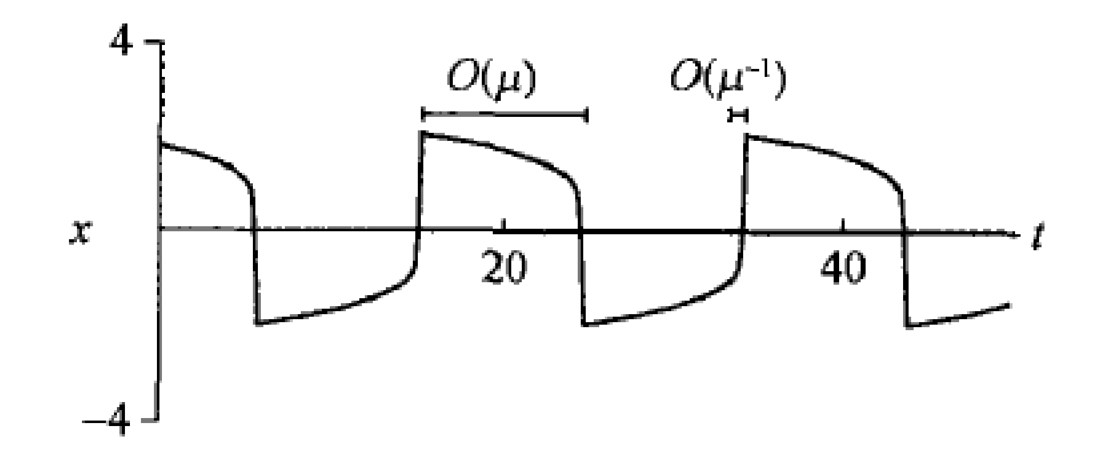


图 5.20　弛豫振荡

§5.4 三变量与多变量

对于一个三变量动力系统，在不动点附近的线性方程有三个特征值，三个特征值可能都是实数，也可能有一对复数与一个实数. 特征值在复平面的分布有 10 种不同的组合，图 5.21 给出了其中的 5 种，另外 5 种可以通过原图的一个关于虚轴的镜像映射得到. 除了这 10 种一般形式外，系统在某些情况下可能出现简并态，一般来说这些简并态是在相变点上出现的，在这里暂时不考虑这种特殊状态，而把分析的焦点放在当系统的维数从二维变为三维后，系统的流形结构会出现哪些新的形态. 从这个角度出发，图 5.21(a)与(b)可以直接对应于二维结点与鞍点. 这里不再进行讨论. (c)与(d)是两种新型的流形结构，它们是一个结点和一个焦点的组合. 对应微扰方程的解为：

$$\boldsymbol{x} = C_1 \boldsymbol{u}_1 e^{\omega_1 t} + C_2 \boldsymbol{u}_2 e^{\omega_2 t} + C_3 \boldsymbol{u}_3 e^{\omega_3 t}.$$

如果将线性微扰方程在三个特征向量上投影，我们可以将其写为一个复变量方程和一个实变量方程：

$$\frac{dz}{dt} = (\mu + i\Omega) z, \tag{5.4.1a}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \omega_3 \xi. \tag{5.4.1b}$$

这个方程表示不动点在($\boldsymbol{u}_1$,$\boldsymbol{u}_2$)组成的平面上是一个焦点，在 $\boldsymbol{u}_3$ 方向上是一个结点. 图 5.22(a)、(b)分别给出了图 5.21(c)、(d)两种情况的流形示意图. 对于

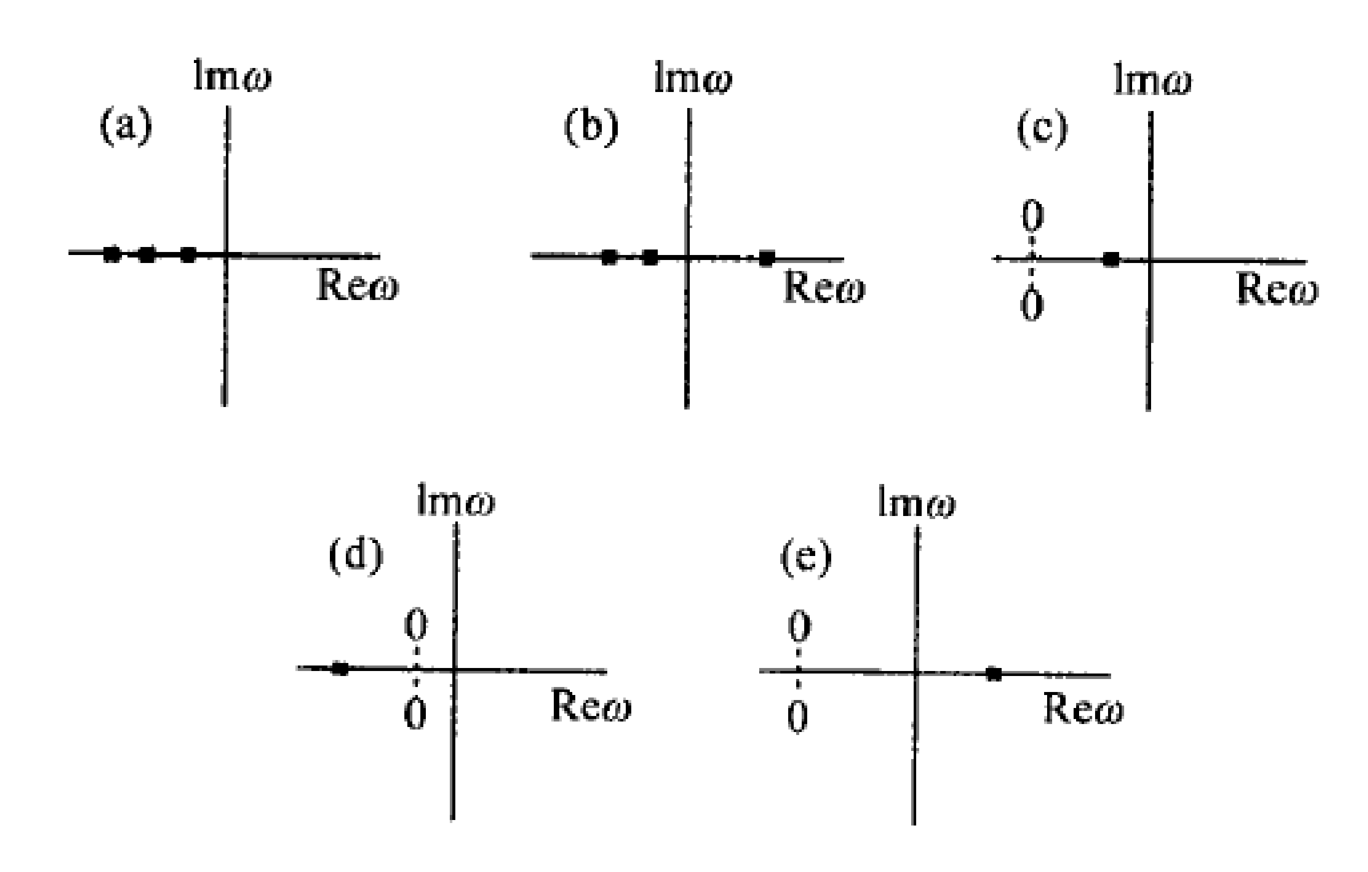


图 5.21 三变量系统特征值分布的类型

(c),$\mathrm{Re}(\omega_{1,2})<\omega_3<0$,流形呈漏斗状螺旋趋向不动点;对于(d),$\omega_3<\mathrm{Re}(\omega_{1,2})<0$,流形是呈抛物面状螺旋趋向不动点.

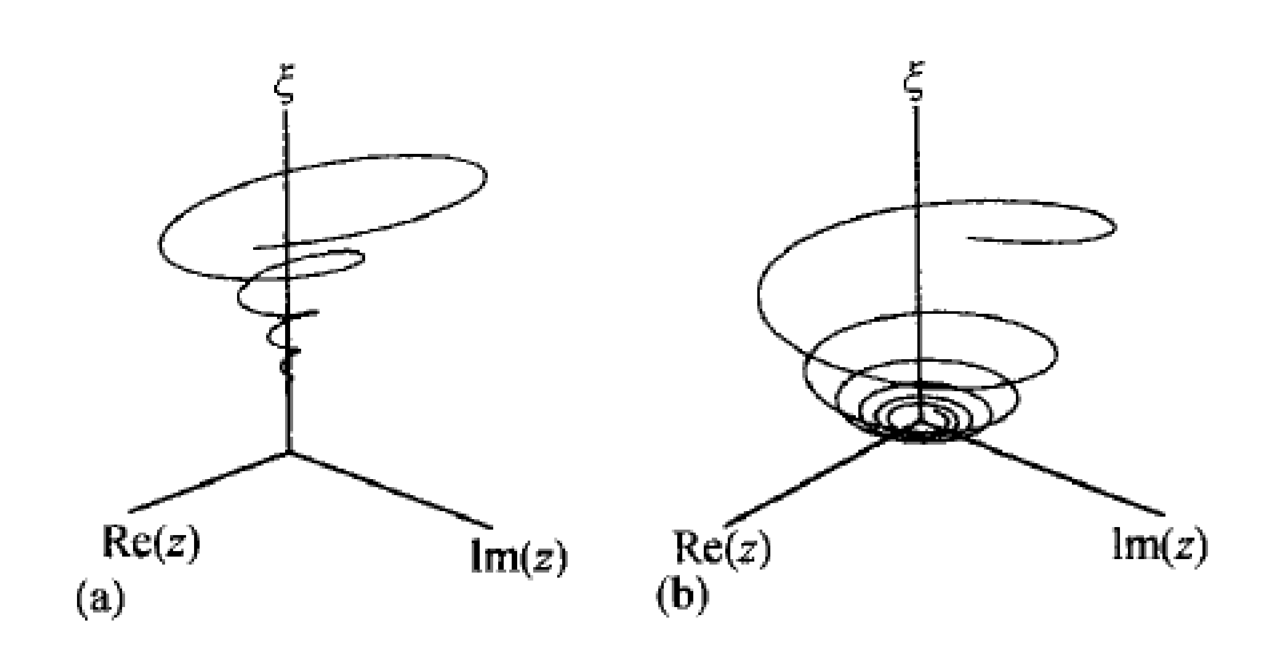


图 5.22　两种结焦点的流形

三维系统新的相变行为是图 5.21 中从(c)到(e)或从(d)到(e)的镜像的过程.对于(e)的情况,在($\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$)平面上流形是一个稳定焦点,而在 $\boldsymbol{u}_3$ 方向上流形趋于离开不动点.总的流形形状是系统呈漏斗状离开不动点.如图 5.23 所示,这种结构既像二维系统中的鞍点,又像焦点,所以被称为鞍焦点.对于图 5.21(e)的情况,流形在两个方向($\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$)是稳定的,在一个方向($\boldsymbol{u}_3$)是不稳定的,不动点包含一个带鞍焦点的一维不变流形;对于(e)的镜像的情况,流形在两个方向($\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$)是不稳定的,在一个方向($\boldsymbol{u}_3$)是稳定的,不动点也包含一个带鞍焦点的一维不变流形.鞍焦点的新异之处在于它将系统的不稳定性质与稳定性质在一个简单动力系统中结合,同时又使系统具有振荡行为.在线性系统中从这类不动点出发的流线会远离这个不动点.但是对于非线性系统,尤其是有物理背景的非线性系统,系统趋于无穷是不可能的.这使得这个带鞍焦点的不变流形会以某种方法回转,使其限制在一个有限的相空间区域中.如果这个相空间区域不存在其他的吸引子,这个不变流形可能构造出复杂的动力学行为.例如,一个非周期现象可以这样构

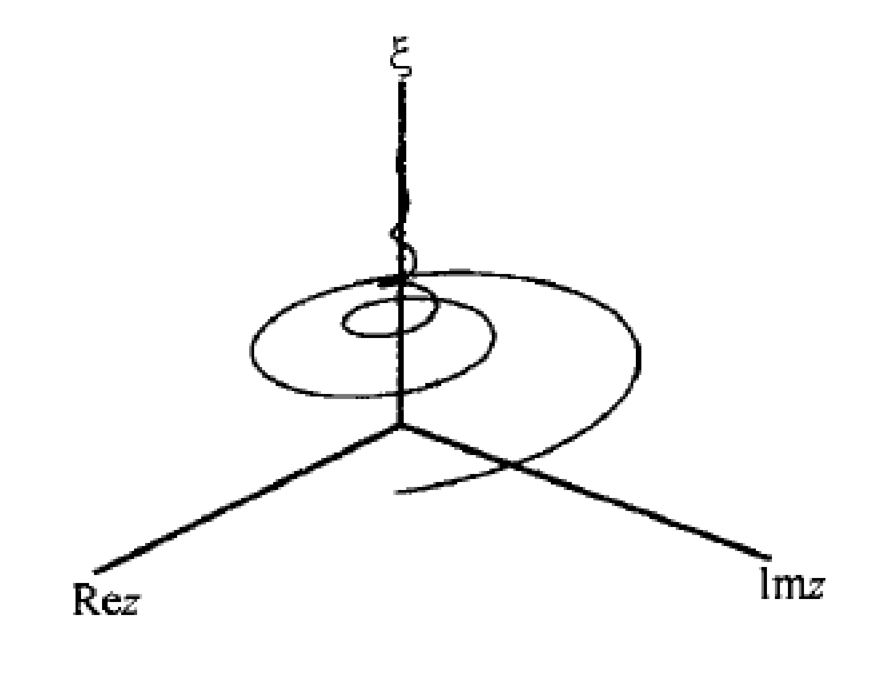


图 5.23　鞍焦点流形

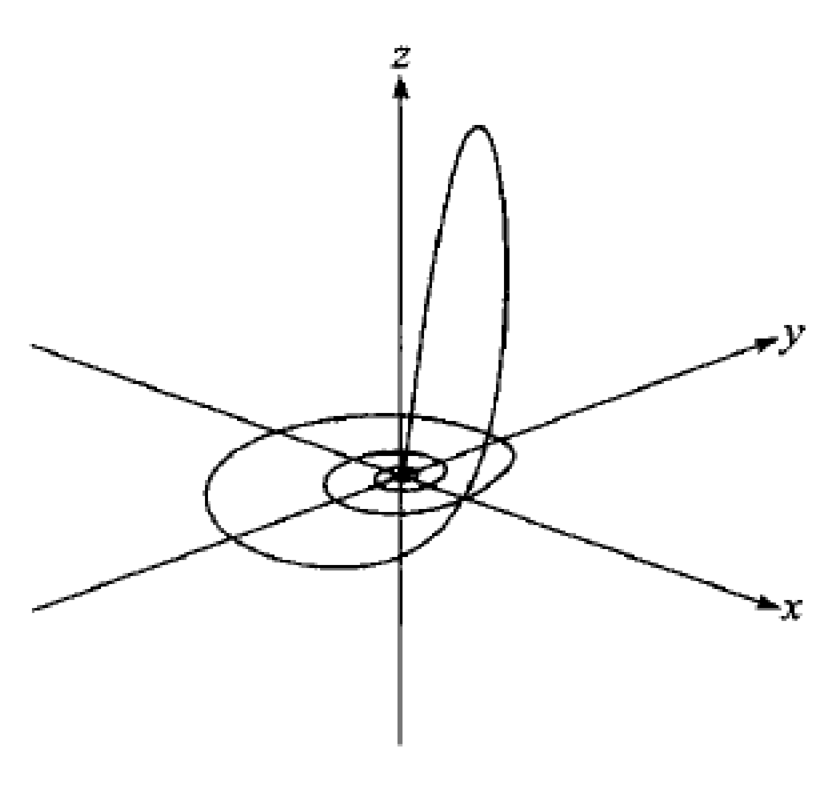


图 5.24　带鞍焦点的同宿轨道

成：一条轨道以螺旋形式离开不动点，又在第三维上重新回到不动点附近的一个区域. 这意味着在特殊条件下系统可能出现同宿轨道，如图 5.24 所示. 这样的轨道从系统结构上说是不稳定的，一个小的结构改变就可以使同宿轨道消灭. 这类情况在上一节分析单摆模型时曾经碰到过：保守的单摆系统加上一个小的摩擦力项时，同宿轨道就被打开. 混沌理论的一个重要结论是，当同宿轨道由于系统的控制参量的变化而消失后，系统会构造出更为复杂的不变流形，这个不变流形不包含不动点，具有分形结构，在时间上表现为确定性混沌. 因而由鞍焦点组成的同宿轨道被看成是在三维以上系统中的一个重要的确定性混沌组织中心. 这里要着重指出的是鞍焦点同宿轨道只能在三维以上的系统中存在. 在二维系统中的流形在以螺旋形式离开不动点后不会再回到不动点附近，因为这样做的话不可避免地要出现无穷多个轨道交叉，这是唯一性定理所不允许的.

同宿轨道的一个例子是在 § 4.5 中提到的洛伦茨模型，另一个典型的模型是罗斯勒(Rössler)系统[28]，它表现了鞍焦点同宿轨道附近混沌轨道的产生. 罗斯勒系统是一个三变量常微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y-z, \tag{5.4.2a}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+ay, \tag{5.4.2b}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=bx-cz+xz. \tag{5.4.2c}$$

在不动点(0,0,0)附近的特征方程为：

$$\omega^3+(c-a)\omega^2+(1+b-ac)\omega+c-ab=0. \tag{5.4.3}$$

当系统的控制参量在一定范围时，该不动点可以是一个鞍焦点，如果取 $a=0.38$，$b=0.30$，$c=4.82$，系统的相空间会出现一个带鞍焦点的同宿轨道如图 5.24 所示；当控制参量 c 下降时，这个同宿轨道破裂，同时混沌吸引子产生，图 5.25 是当 $c=4.5$ 时的一个混沌轨道. 由同宿轨道引发的混沌态在高于三维的系统中也同样存在. 在这些系统中，一些稳定流形与一些不稳定流形发生碰撞后会产生出新的动力学现象，这些新现象要在高于三维的嵌入维数中才能存在，对于这类系统的分析已经超出了本书想要介绍的内容.

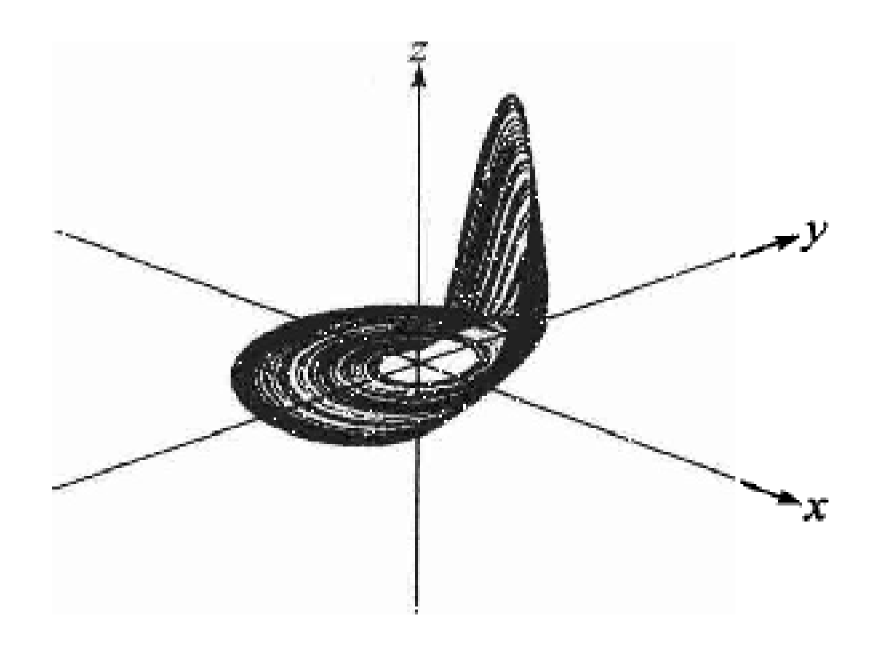


图 5.25 鞍焦点同宿轨道解体后形成的混沌轨道

在本节的最后简单介绍庞加莱映射方法. 这个方法是研究混沌现象的有力工具，也可以用来分析周期轨道的稳定性. 考虑一个 n 变量的微分方程(4.1.1)，在相空间中设定一个 $n-1$ 维的断面，这个断面与流形相交而不与任何流线相切，见图 5.26. 庞加莱映射是从 S 面向自身的影射，它表示流线与 S 面的交点之间的关系. 如果 $\boldsymbol{x}_k \subset S$ 为流线与 S 面的第 k 次相交的交点，则庞加莱映射的定义是：

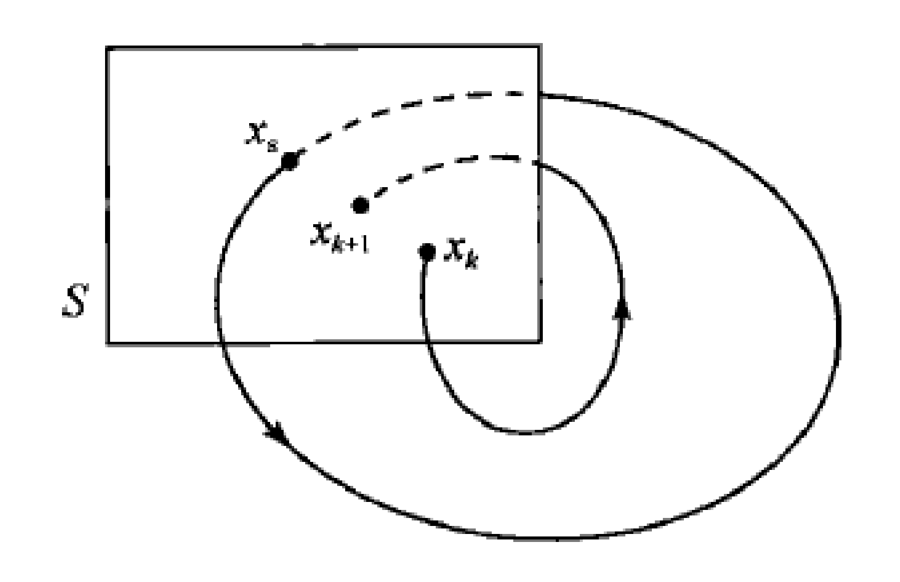


图 5.26　庞加莱映射

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = P(\boldsymbol{x}_k). \tag{5.4.4}$$

如果 $\boldsymbol{x}_s$ 是映射的一个不动点，即 $P(\boldsymbol{x}_s)=\boldsymbol{x}_s$，对应于系统(4.1.1)，它代表出发于 $\boldsymbol{x}_s$ 的流线在经过一段时间后回到自身. 因而离散系统(5.4.4)的不动点对应于连续系统(4.1.1)的闭合轨道. 研究映射在 $\boldsymbol{x}_s$ 点附近的行为就可知道这个闭合轨道的稳定性. 这样就把研究闭合轨道稳定性问题，变为研究在映射中不动点的稳定性问题，而后者是比较容易处理的.

判断庞加莱映射不动点的稳定性也可以用线性稳定性分析. 设 $\boldsymbol{x}_s$ 是映射的一个不动点，$\boldsymbol{v}_0$ 是对不动点的一个微扰. 则当流形经过一个循环回到 S 面上时，应该有

$$\boldsymbol{x}_s + \boldsymbol{v}_1 = P(\boldsymbol{x}_s + \boldsymbol{v}_0) = P(\boldsymbol{x}_s) + [DP(\boldsymbol{x}_s)]\,\boldsymbol{v}_0 + O(\|\boldsymbol{v}_0\|^2). \tag{5.4.5}$$

这里 $DP(\boldsymbol{x}_s)$是$(n-1)\times(n-1)$矩阵，被称为在 $\boldsymbol{x}_s$ 附近的线性庞加莱映射，由于 $\boldsymbol{x}_s=P(\boldsymbol{x}_s)$，去掉高阶项 $O(\|\boldsymbol{v}_0\|^2)$，得到线性映射关系

$$\boldsymbol{v}_1 = [DP(\boldsymbol{x}_s)]\,\boldsymbol{v}_0. \tag{5.4.6}$$

不动点 $\boldsymbol{x}_s$ 的线性稳定性取决于线性庞加莱映射的特征值λ_j. 当且仅当所有的特征值$|\lambda_j|<1$ 时，一个庞加莱映射的不动点才是稳定的. 用非简并的线性庞加莱映射说明这个论断. 这时特征值对应的特征向量组成一个正交系$\{\boldsymbol{e}_j\}$. 任意一个在 S 面上的扰动可以在这个正交系展开，

$$\boldsymbol{v}_0 = \sum_{j=1}^{n-1} v_j \boldsymbol{e}_j.$$

因而，在这个正交系上有

$$\boldsymbol{v}_1 = [DP(\boldsymbol{x}_s)]\sum_{j=1}^{n-1} v_j \boldsymbol{e}_j = \sum_{j=1}^{n-1} v_j \lambda_j \boldsymbol{e}_j.$$

将这个过程重复 k 次，得

$$\boldsymbol{v}_k = \sum_{j=1}^{n-1} v_j \lambda_j^k \boldsymbol{e}_j. \tag{5.4.7}$$

如果对于所有特征值都有$|\lambda_j|<1$，则当 k 趋于无穷时 $\|\boldsymbol{v}_k\|$ 趋于 0，$\boldsymbol{x}_s$ 是线性稳定的. 相反，如果其中一个特征值$|\lambda_j|>1$，则微扰会在这个方向上增长，因而不动点 $\boldsymbol{x}_s$ 是不稳定的. 在这两者之间存在一个状态$|\lambda_j|=1$，这种情况会出现在周期轨道的分岔点上.

§5.5 延迟模型

对于一个带有记忆的系统，如延迟模型，线性稳定性原理仍然适用，但是方程线性化后不会产生如(5.1.1)所示的线性微分方程组，因而它的特征值方程不是一个简单的多项式. 在这种情况下，就要对延迟模型进行特殊分析，以下以带记忆的虫口模型(3.3.2)演示这个分析过程.

首先将方程(3.3.2)无量纲化，令 $\hat{T}=rT$，$\hat{N}=N/K$，去掉变量与自变量上边的帽子，无量纲的方程为：

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = N(t)[1-N(t-T)]. \tag{5.5.1}$$

在方程中应该将 $N(t)$与 $N(t-T)$看成是两个独立变量. 但定态解要求 $N(t)=N(t-T)$. 在这个条件下计算方程的不动点得到两个解：$(N(t),N(t-T))=(0,0)$，$(N(t),N(t-T))=(1,1)$. 对于第一个不动点，它所对应的线性方程为：$\mathrm{d}N/\mathrm{d}t=N$，所以它永远是一个不稳定不动点，在分析中不予考虑. 对于第二个不动点，在不动点上做微扰：

$$N(t)=1+n(t),$$
$$N(t-T)=1+n(t-T),$$

代入(5.5.1)，得微扰方程

$$\frac{\mathrm{d}n(t)}{\mathrm{d}t} = -n(t-T)[1+n(t)]. \tag{5.5.2}$$

对应的线性微扰方程为

$$\frac{\mathrm{d}n(t)}{\mathrm{d}t} = -n(t-T). \tag{5.5.3}$$

令 $n(t)=n_0\mathrm{e}^{\lambda t}$，代入线性方程(5.5.3)得特征方程：$\lambda=-\mathrm{e}^{-\lambda T}$. 将特征值的实部与虚部分开，令 $\lambda=\mu+\mathrm{i}\omega$，得两个实数特征方程：

$$\mu = -\mathrm{e}^{-\mu T}\cos\omega T, \tag{5.5.4a}$$
$$\omega = \mathrm{e}^{-\mu T}\sin\omega T. \tag{5.5.4b}$$

首先考虑 $\omega=0$ 的情况. 这时特征方程(5.5.4b)自动满足,(5.5.4a)式变为 $\mu=-\mathrm{e}^{-\mu T}$. 由于 $T>0$,对于所有可能的解(5.5.4a)的右端都是小于零的,因而不动点(1,1)不可能是不稳定结点. 再考虑 $\omega\neq 0$ 的情况. 由于方程(5.5.4)在 $\omega\to-\omega$ 操作下保持不变,可以只讨论 $\omega>0$ 的情况. 从(5.5.4a)分析可以看出,因为 $\mathrm{e}^{-\mu T}>0$,不动点(1,1)稳定的必要条件是 $\omega T<\pi/2$,将此条件代入(5.5.4b),得

$$\omega T = T\mathrm{e}^{-\mu T}\sin\omega T < \frac{\pi}{2}.$$

在这里我们遇到了一个新的情况：系统的特征方程可能有多个 $\mu<0$ 的解,实际上可以证明特征方程(5.5.4)有无穷多个特征根. 当然在不动点附近的线性分析得到多个特征值,不意味着在这个区域中流线可以交叉,唯一性原理在任何动力系统中都适用. 延迟动力系统可以看成是一个特殊的无穷维动力系统,在这个高维空间中,线性方程流形在不动点附近是不交叉的.

当 $\omega T>\pi/2$ 时,方程(5.5.4)会产生 $\mu>0$ 的解,因而稳定焦点会变为不稳定焦点,这时系统会发生一个非平衡相变. 在分析中我们关心临界点的位置. 令 $\mu=0$,得

$$\cos\omega_c T_c = 0 \quad\Rightarrow\quad \omega_c T_c = \frac{\pi}{2},$$

$$\omega_c = \sin\omega_c T_c = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \quad\Rightarrow\quad T_c = \frac{\pi}{2}.$$

为了知道 T_c 是否真正是一个相变点,还要考察 μ 随 T 在 T_c 附近的行为,如果 $\partial\mu/\partial T|_{T_c}=0$,则 T_c 是一个极值点而不是一个相变点. 只有 $\partial\mu/\partial T|_{T_c}\neq 0$ 时,T_c 才是一个相变点. 将(5.5.4)的第一式对 T 做偏微分并将 $\mu=0$,$T_c=\pi/2$,$\omega_c=1$ 代入,得

$$\frac{\partial\mu}{\partial T} = \frac{\mathrm{e}^{-\mu T}[\mu\cos\omega T+\omega\sin\omega T]}{1-T\mathrm{e}^{-\mu T}\cos\omega T} \quad\Rightarrow\quad \left.\frac{\partial\mu}{\partial T}\right|_{T_c} = 1.$$

从而 $T_c=\pi/2$,$\omega_c=1$ 是一个相变点. 在下一章的讨论中会发现,不动点从一个稳定焦点到一个不稳定焦点的相变,是系统从稳定态到振荡态的相变.

对于这个系统,在临界点时振荡频率为 1. 在有量纲的形式中,$T_c=\pi/2r$,临界振荡周期 $P_c=2\pi/\omega_c=2\pi/r$,因而有 $P_c=4T_c$. 这个推论与 §3.3 的定性讨论一致(见图 3.2). 当系统离开相变点时,振荡周期会发生变化. 现在分析在相变点附近的振荡周期. 令 $T=T_c+\varepsilon=\pi/2+\varepsilon$,假设由于 T 的变化,特征值的实部改变了 δ,虚部改变了 σ,则在临界点附近有 $\mu=\delta$,$\omega=1+\sigma$,代入特征方程(5.5.4),得

$$\delta=-\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)}\cos\left[(1+\sigma)\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)\right],$$

$$1+\sigma=\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)}\sin\left[(1+\sigma)\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)\right].$$

对于这个系统，可以认为在临界点附近由于 T 的一个很小的变化所引起的 μ 与 ω 的变化都是很小的，因而可以将上式对 δ,σ 做泰勒展开并只保留一阶项．这样的处理得到

$$\sigma\approx-\frac{\pi\delta}{2},\quad \delta\approx\varepsilon+\frac{\pi\sigma}{2}.$$

解得

$$\delta\approx\frac{\varepsilon}{1+\pi^2/4},\quad \sigma\approx\frac{-\varepsilon\pi}{2(1+\pi^2/4)}. \tag{5.5.5}$$

因而，当延迟时间延长时，系统深入不稳定区．同时，系统的振荡频率变小，周期变长．这个推论与§3.3的苍蝇试验一致，见图3.3．由于该系统离开临界点有一定距离，它的振荡周期不是$4T$，而是$4.54T$．

对于微观自组织系统的延迟模型(3.4.6)，同样的分析方法可以显示系统的定态在正反馈足够强时($v_1>v_{1c}$)会出现失稳现象，失稳的结果是振荡．由于方程(3.4.6)有两个延迟时间，系统的振荡行为比上面分析的系统复杂．有兴趣的读者可以参考文献[29]．

第六章　非线性系统的正则方程

上一章讨论用线性稳定性原理研究一个动力系统在不动点附近的行为.线性稳定性分析的有效范围只是在不动点附近的一个很小区域,它不能得到流形在离开不动点以后的走向,也不能提供在一个状态失稳后系统会产生什么样的新的状态.为了了解系统的这些信息,就需要在线性方程的基础上加入非线性项.从动力系统角度讲,非线性项的主要作用是引入饱和项去压制线性系统中变量指数增长的行为.根据非线性饱和项的形式不同,我们可以将非线性系统分类,每一类都有一个正则形式(normal form).正则形式在系统相变点附近构成正则方程.这一章主要介绍非线性动力系统在临界点附近的正则方程.

§6.1　微扰法与多重尺度分析

非线性动力学讨论最多的,理论发展也最成熟的是弱非线性问题,这是因为研究非线性动力系统的主要着眼点是从系统的不动点开始.在不动点的一个小的区域内可以对系统进行线性化,在此基础上再向外扩张一点,就要在动力学方程中引入非线性项.这时非线性项可以被看成是一个对线性系统的扰动,其一般形式为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x})+\varepsilon\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}).\tag{6.1.1}$$

方程右边第一项是线性项,第二项是非线性项,$\varepsilon\ll1$.假设流形$\boldsymbol{x}(t)$在一个小的范围内对微扰量ε是连续的,也就是说,当ε变化时流形连续变化.这样,一个小的系统结构变化只会引起系统动力学行为的一个小的变化.这时可以先将方程(6.1.1)的线性部分解出(记为$\boldsymbol{x}_0(t)$).把解$\boldsymbol{x}(t)$看成是对$\boldsymbol{x}_0(t)$作结构微扰得到的结果,而微扰量是ε的函数.在这个假设前提下,可以将$\boldsymbol{x}$在$\boldsymbol{x}_0$附近作关于ε的幂级数展开,然后逐级求解展开后的方程,从而对$\boldsymbol{x}$进行逼近.例如,对方程

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}+f=\varepsilon f^2,\quad 0<\varepsilon\ll1,\quad f(0)=1,\tag{6.1.2}$$

如果$\varepsilon=0$,则方程变为线性方程,它有精确解$f_0=\mathrm{e}^{-t}$.当$\varepsilon\neq0$时,可以认为非线性项的作用是在这个解的基础上的一个微扰.微扰的程度随ε的值改变.将f

在 f_0 附近作关于 ε 的幂级数展开：

$$f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \cdots, \tag{6.1.3}$$

代入原非线性方程(6.1.2)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \cdots) + f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \cdots$$
$$= \varepsilon(f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \cdots)^2.$$

将以上方程按 ε 的幂次分开：

$$\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}t} + f_0 = 0, \quad f_0(0) = 1, \tag{6.1.4a}$$

$$\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}t} + f_1 = f_0^2, \quad f_1(0) = 0, \tag{6.1.4b}$$

$$\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}t} + f_2 = 2f_0 f_1, \quad f_2(0) = 0, \tag{6.1.4c}$$

$$\cdots.$$

观察到(6.1.4)实际上是一个递推式的方程，下一级的方程要用到上面所有级方程的解. 原则上我们可以一步步地把 f_i 解出，从而得到 f 的解的一个逼近. 对于(6.1.4a)，其解为 $f_0=\mathrm{e}^{-t}$. 代入到(6.1.4b)中，得

$$\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}t} + f_1 = \mathrm{e}^{-2t}, \quad f_1(0) = 0.$$

上述方程的通解为 $f_1=c\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}$，用初始条件定出 c，得 $f_1=\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}$. 将此式代入(6.1.4c)，得

$$\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}t} + f_2 = 2\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}), \quad f_2(0) = 0.$$

解得 $f_2=\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-3t}$，如果将逼近的精度定为 $O(\varepsilon^3)$，则 f 的解可写为

$$f = (1+\varepsilon+\varepsilon^2)\mathrm{e}^{-t} - (\varepsilon + 2\varepsilon^2)\mathrm{e}^{-2t} + \varepsilon^2\mathrm{e}^{-3t} + O(\varepsilon^3).$$

用这种逐级逼近的方法解非线性方程有一个必要条件：$\| f_i \| < K$，K 为一个任意的定数. 这个条件保证幂级数的收敛. 如果给定任何一个 K，都不能保证 $\| f_i \| < K$，则 $\| f_i \|$ 会随时间无限增加. 这就会出现不收敛问题. 在微扰分析中被称为不一致问题. 分析上面的例子，很容易看到 f_i 满足解的一致性条件，下面举一个不一致问题的例子. 考虑弱阻尼谐振子方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 1. \tag{6.1.5}$$

此方程为线性方程，有解析解

$$x(t,\varepsilon) = (1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\sin(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}t. \tag{6.1.6}$$

现在用上面讨论的微扰逼近方法解方程(6.1.5).令 $x=x_0+\varepsilon x_1+\cdots$,代入方程(6.1.5)并将方程的各项按 ε 的幂级数分开,得

$$O(1):\qquad \frac{d^2x_0}{dt^2}+x_0=0, \tag{6.1.7a}$$

$$O(\varepsilon):\qquad \frac{d^2x_1}{dt^2}+x_1=-2\frac{dx_0}{dt}, \tag{6.1.7b}$$

$$\cdots.$$

关于初始条件,由于 $x_0(0)+\varepsilon x_1(0)+\cdots=0$ 对于任何 ε 值成立,所以应该有:

$$x_0(0)=0,\quad x_1(0)=0,\cdots;\quad \left.\frac{dx_0}{dt}\right|_0=1,\quad \left.\frac{dx_1}{dt}\right|_0=0,\cdots. \tag{6.1.8}$$

方程(6.1.7a)的解为 $x_0(t)=\sin t$. 代入(6.1.7b),得

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+x_1=-2\cos t. \tag{6.1.9}$$

这里出现了麻烦的迹象.方程(6.1.9)右边的函数对于该方程对应的齐次方程是一个共振项,也就是说(6.1.9)式是一个共振方程.一般来说,其解的振幅会随时间无限增加.解(6.1.9)式得 $x_1=-t\sin t$,因而 x_1 随时间的增长没有上限地增加,在微扰分析中它被称为久期项(secular term).根据逐级逼近的微扰方法,方程(6.1.5)的微扰解在 $O(\varepsilon^2)$ 的精度下为

$$x=\sin t-\varepsilon t\sin t+O(\varepsilon^2). \tag{6.1.10}$$

这个解是否能正确反映方程的精确解(6.1.6)呢?将(6.1.6)按 ε 的幂级数展开,得

$$x(t,\varepsilon)=x(t,0)+\left.\frac{\partial x}{\partial\varepsilon}\right|_0\varepsilon+O(\varepsilon^2)=\sin t-\varepsilon t\sin t+O(\varepsilon^2t^2).$$

因而,在一定的时间范围内($\varepsilon t\ll 1$),微扰解能够近似地反映精确解.但是当 $t\sim O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ 以后,二阶修正项 $O(\varepsilon^2t^2)$ 就会比微扰解本身的量级还高.这时微扰解与精确解的距离会越来越大,图6.1显示出两个解的差别随时间的变化.

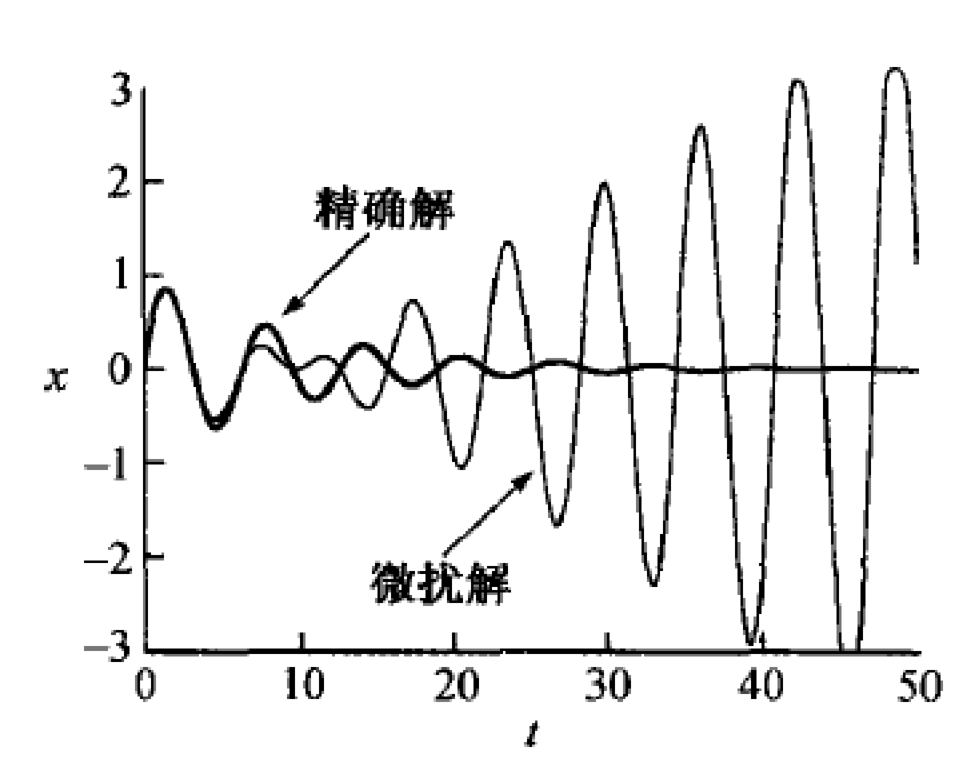


图6.1　弱阻尼谐振子方程精确解与微扰解的比较

在一般情况下,我们希望知道的是系统在固定 ε 值时的动力学渐近

行为. 而上面分析得到的系统微扰解(6.1.10)只能在 $t \ll O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ 的时间内有效，它不能反映系统的渐近行为. 从这个角度讲，上面讨论的微扰方法不适用于分析方程(6.1.5)的渐近态行为. 比较微扰解(6.1.10)与精确解(6.1.6)的差别可以看到问题的所在. 在精确解中存在着两个时间尺度：表示系统周期振荡行为的部分是快尺度 $\sin(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}t$，它的尺度是 $t \sim O(1)$；表示振荡振幅变化的部分是慢尺度 $(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}e^{-\varepsilon t}$，它的尺度是 $t \sim O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$. 微扰解(6.1.10)正确地反映了精确解快时间尺度的行为 $\sin t$，而在计算慢时间尺度的行为时则完全失败. 分析慢时间尺度的动力学行为发现，$e^{-\varepsilon t} = 1 - \varepsilon t + O(\varepsilon^2 t^2)$，因此要想得到渐近态行为的解，微扰逼近一定要包括无穷多项，而不是只包括零阶项与一阶项. 显然，这个要求使得上面讨论的微扰方法变得毫无用处. 因而需要考虑新的微扰方法，使得在计算了微扰方程前几项后就能正确地逼近方程(6.1.5)的精确解.

另外，对于振荡频率，精确解有 $\omega = (1-\varepsilon^2)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2$，它对渐近解 $\omega = 1$ 有一个 $O(\varepsilon^2)$ 的修正，表现在时间尺度上修正为$O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$. 因而要想得到频率上的修正，就需要考虑更慢时间尺度上系统的动力学行为.

由于动力系统的行为可能存在着多个时间尺度，在对它做微扰分析时一定要引进多重尺度. 基于这个考虑的微扰方法被称为多重尺度分析. 分析的基本假设是系统存在着互相独立的时间尺度. 在分析中令 $\tau = t$ 表示快时间尺度，$T = \varepsilon t$ 表示一级慢时间尺度. $T_2 = \varepsilon^2 t$ 表示二级慢时间尺度等. 这相当于把时间看成是各个时间尺度的总和：$t = \tau + T + T_2 + \cdots$. 在分析中把每个时间变量都看成独立自变量. 这种假设有它的物理意义，比如说在计算一个人的新陈代谢水平在一天内的变化时，他的身高可以近似地看为常量. 在这个假设下，变量是自变量 $\tau, T, T_2, \cdots$ 的函数：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial x}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial T_2}\frac{\partial T_2}{\partial t} + \cdots \\ &= \frac{\partial x}{\partial \tau} + \varepsilon\frac{\partial x}{\partial T} + \varepsilon^2\frac{\partial x}{\partial T_2} + \cdots.\end{aligned}$$

下面以两个时间的多重尺度微扰方法重新对方程(6.1.5)的解进行幂级数逼近. 设 $x(t,\varepsilon) = x_0(\tau, T) + \varepsilon x_1(\tau, T) + O(\varepsilon^2)$，对 x 作对时间 t 的导数：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial x}{\partial \tau} + \varepsilon\frac{\partial x}{\partial T} + O(\varepsilon^2) = \frac{\partial x_0}{\partial \tau} + \varepsilon\left(\frac{\partial x_0}{\partial T} + \frac{\partial x_1}{\partial \tau}\right) + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\partial^2 x_0}{\partial\tau^2}+\varepsilon\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial\tau^2}+2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T\partial\tau}\right)+O(\varepsilon^2).$$

将上面的幂级数展开形式代入方程(6.1.5)，并收集对应于各个ε幂次的方程，得

$$O(1):\quad \frac{\partial^2 x_0}{\partial\tau^2}+x_0=0, \tag{6.1.11a}$$

$$O(\varepsilon):\quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial\tau^2}+x_1=-2\frac{\partial^2 x_0}{\partial\tau\partial T}-2\frac{\partial x_0}{\partial\tau}, \tag{6.1.11b}$$

$$\cdots.$$

方程(6.1.11a)的解为：$x_0=A\sin\tau+B\cos\tau$. 注意“常数”A,B是相对快时间尺度τ而言的，它们可能是慢时间尺度的函数，$A=A(T)$，$B=B(T)$. 为了决定慢尺度的行为，需要分析方程(6.1.11b). 将方程(6.1.11a)的解代入(6.1.11b)，得

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial\tau^2}+x_1=-2\left(\frac{\partial A}{\partial T}+A\right)\cos\tau+2\left(\frac{\partial B}{\partial T}+B\right)\sin\tau.$$

这里又遇到了共振问题. 由于存在共振，上方程的解会可能出现$\tau\sin\tau$和$\tau\cos\tau$的久期项. 要得到系统的渐近态行为就必须去掉这些久期项. 通过令方程的共振项的系数为0可以达到这个目的. 令

$$\frac{\partial A}{\partial T}+A=0,$$

$$\frac{\partial B}{\partial T}+B=0.$$

解得$A(T)=A(0)\mathrm{e}^{-T}$，$B(T)=B(0)\mathrm{e}^{-T}$，$A(0)$与$B(0)$由初始条件决定. 容易得到$B(0)=0$，$A(0)=1$. 因而方程对ε的零级近似的解为

$$x=\mathrm{e}^{-T}\sin\tau+O(\varepsilon)=\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\sin t+O(\varepsilon).$$

这个解正确地反映了系统的动力学行为. 图6.2是多重尺度的渐近解与精确解的比较. 模拟中取$\varepsilon=0.1$，可以看到虽然ε值不是很小，两者的差异是微不足道的. 要进一步逼近精确解可以从两个方面着手，一方面是继续解方程(6.1.11)的高次项，从而对精确解进行进一步的逼近. 第二方面是引入更加慢的时间尺度$T_2=\varepsilon^2 t$对系统的频率变化进行修正. 从图6.2的结果观察，对于方程(6.1.5)来说零级近似已

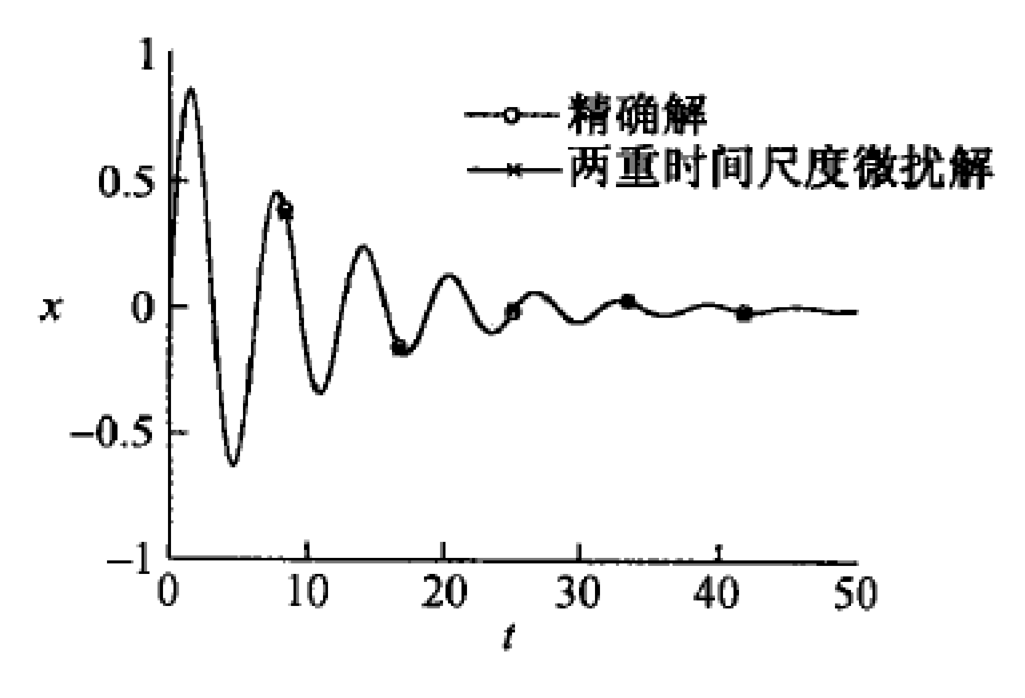


图6.2　弱阻尼谐振子方程精确解与两重时间尺度微扰解的比较

经可以得到相当满意的结果.

为了显示多重尺度分析的普适性,下面用此方法分析上一章提到的范德坡方程(5.3.10).用同样的展开形式对变量、自变量进行关于 ε 的幂级数展开,取两个独立的时间尺度,代入方程(5.3.10)并收集对应于 ε 的各个幂次,得方程

$$O(1):\quad \frac{\partial^2 x_0}{\partial\tau^2}+x_0=0, \tag{6.1.12a}$$

$$O(\varepsilon):\quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial\tau^2}+x_1=-2\frac{\partial^2 x_0}{\partial\tau\partial T}-(x_0^2-1)\frac{\partial x_0}{\partial\tau}, \tag{6.1.12b}$$

$$\cdots.$$

方程(6.1.12a)的解的一般形式为: $x_0=r(T)\cos(\tau+\phi(T))$,其中 $r(T)$ 与 $\phi(T)$ 分别是周期解的振幅与相位,它们是慢时间变量的函数.为了寻找决定振幅与相位随时间的变化行为,必须分析(6.1.12b).将零级近似解代入此式,得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x_1}{\partial\tau^2}+x_1 &=2\left[\frac{\partial r}{\partial T}\sin(\tau+\phi)+r\frac{\partial\phi}{\partial T}\cos(\tau+\phi)\right]\\ &\quad+r\sin(\tau+\phi)\left[r^2\cos^2(\tau+\phi)-1\right],\end{aligned} \tag{6.1.13}$$

方程(6.1.13)的右边除了明显的共振项外,还有隐藏的共振项:

$$\sin(\tau+\phi)\cos^2(\tau+\phi)=\frac{1}{4}[\sin(\tau+\phi)+\sin3(\tau+\phi)].$$

将上式代入(6.1.13),得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x_1}{\partial\tau^2}+x_1 &=-\left[-2\frac{\partial r}{\partial T}+r-\frac{1}{4}r^3\right]\sin(\tau+\phi)\\ &\quad+\left[2r\frac{\partial\phi}{\partial T}\right]\cos(\tau+\phi)+\frac{1}{4}r^3\sin3(\tau+\phi).\end{aligned}$$

为了避免久期项,要求

$$2\frac{\partial r}{\partial T}-r+\frac{1}{4}r^3=0,\qquad r>0, \tag{6.1.14a}$$

$$2r\frac{\partial\phi}{\partial T}=0. \tag{6.1.14b}$$

对(6.1.14a)积分,得

$$r=\frac{2}{(1-K\mathrm{e}^{-T})^{1/2}},$$

其中 K 由初始条件决定.如果 $x(0)\neq0$,则 $r\neq0$.因而方程(6.1.14b)的解为 $\phi=\phi_0$,其中 ϕ_0 由初始条件决定.方程(5.3.10)的零级近似解为

$$x=\frac{2}{(1-K\mathrm{e}^{-\varepsilon t})^{1/2}}\cos(t+\phi_0)+O(\varepsilon). \tag{6.1.15}$$

当 $t\to\infty$ 时，$x=2\cos(t+\phi_0)+O(\varepsilon)$ 是一个极限环. 从式(6.1.15)容易看出系统从任何不为零的初始状态出发，都会趋向于这个极限环. 图 6.3 给出了这个系统的一个数值模拟，振幅的包络线是振幅方程(6.1.14a)的解，可以看到两个解吻合得很好.

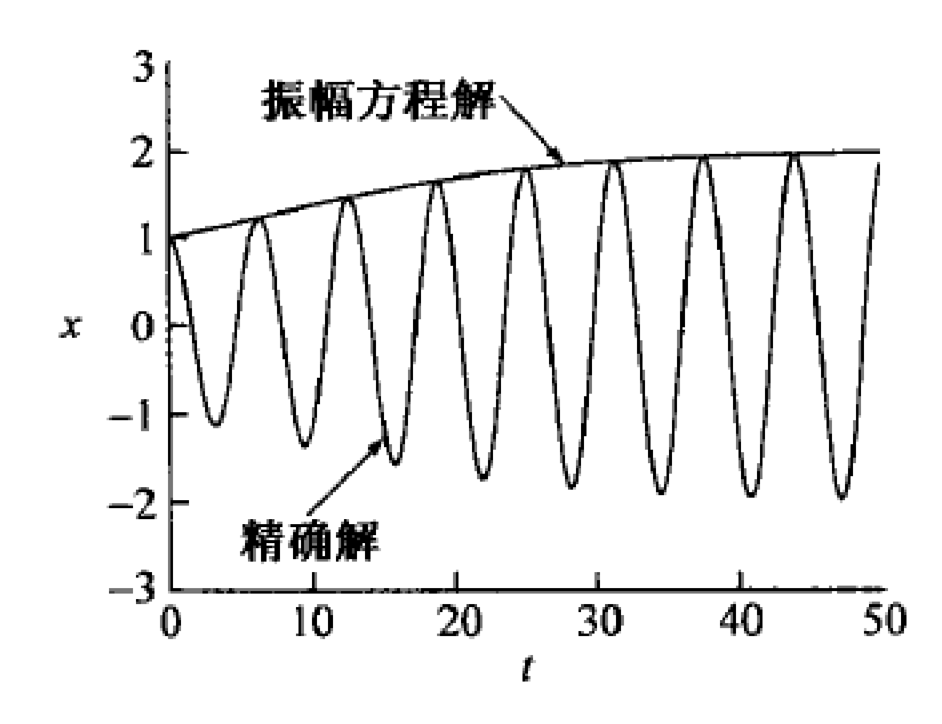


图 6.3 范德坡方程精确解与微扰解的比较

在一般情况下，微扰方程的共振项并不是一眼就能看出来. 为了使这种方法更加具有普适性，需要发展一套规范化的操作步骤. 讨论更一般的弱阻尼谐振子方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x+\varepsilon h\left(x,\frac{dx}{dt}\right)=0. \tag{6.1.16}$$

用双重时间尺度的微扰分析可以得到如下微扰方程：

$$O(1):\quad \frac{\partial^2 x_0}{\partial\tau^2}+x_0=0, \tag{6.1.17a}$$

$$O(\varepsilon):\quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial\tau^2}+x_1=-2\frac{\partial^2 x_0}{\partial\tau\partial T}-h, \tag{6.1.17b}$$

$$\cdots.$$

(6.1.17a)的解为 $x_0=r(T)\cos(\tau+\phi(T))$，代入方程(6.1.17b)的右边，得

$$2\left[\frac{\partial r}{\partial T}\sin(\tau+\phi)+r\frac{\partial\phi}{\partial T}\cos(\tau+\phi)\right]-h.$$

其中 $h=h[r\cos(\tau+\phi),-r\sin(\tau+\phi)]$. 为了提取 h 中正比于 $\sin(\tau+\phi)$ 和 $\cos(\tau+\phi)$ 的部分，可以将 h 作傅里叶展开. 由于($\sin k\theta,\cos k\theta$)组成正交系，所以只有 $k=1$ 的项是共振项. 为了去掉久期项，就要令

$$2\frac{\partial r}{\partial T}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h\sin\theta d\theta=\langle h\sin\theta\rangle,$$

$$2r\frac{\partial\phi}{\partial T}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h\cos\theta d\theta=\langle h\cos\theta\rangle.$$

解出这两个方程就得到了(6.1.16)式的零级近似解.

从上边的分析看出,避免久期项的关键是各级微扰方程的右端不存在与方程左端发生共振的项.对于谐振子方程来说,共振项是 $\sin(\tau+\phi)$ 与 $\cos(\tau+\phi)$,但对于其他类型的方程,共振项可能是其他的形式.找出一般系统的共振项的最有效的方法是弗来得霍姆抉择(Fredholm alternative),这个方法又叫弗来得霍姆可解性条件(Fredholm solubility condition).下面介绍这个可解性条件.首先注意到在各级微扰方程左边都是线性项,而且其形式是一样的:

$$O(1):\quad \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}_0=0,$$
$$O(\epsilon^i):\quad \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{q}_i,$$
$$\cdots.$$

其中 $\boldsymbol{q}_i$ 是包含 $\boldsymbol{x}_0,\cdots,\boldsymbol{x}_{i-1}$ 的非线性函数,它的形式由解上级各个方程得到.根据以上的讨论,为了去掉各阶微扰方程的共振项,$\boldsymbol{q}_i$ 一定不能与 $\boldsymbol{x}_0$ 发生共振.而 $\boldsymbol{x}_0$ 是线性算子 $\boldsymbol{L}$ 的非平庸零空间(nontrivial null space).弗来得霍姆可解性条件有如下论断:对于每一个线性算子 $\boldsymbol{L}$,都可以定义一个它的伴随算子 $\boldsymbol{L}^*$(adjoint operator).方程 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{q}$ 解的一致性的必要条件是:$\boldsymbol{L}^*$ 的非平庸零空间 $\boldsymbol{u}^+$ 与 $\boldsymbol{q}$ 正交.在有限维空间中伴随算子有简单的形式:$l_{ij}^*=\bar{l}_{ji}$,因而有 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^+\boldsymbol{L}^*$,其中 $\boldsymbol{u}^+$ 满足 $\boldsymbol{L}^*\boldsymbol{u}^+=0$.

§6.2 一维不变流形的正则方程

一维系统中的相变只有两种形式.第一种形式是一个稳定点变为不稳定点;第二种形式是通过一个极限点分岔一对不动点从一般流形中产生出来,其中一个是稳定的,另一个是不稳定的.根据系统相变点附近的状态与系统的对称性,一维不变流形在相变点附近的分岔行为可以分为三类:转换分岔(transcritical bifurcation),叉形分岔(pitchfork bifurcation)与极限点分岔(limitpoint bifurcation).每一类分岔都有自己的正则方程.以下分析各个分岔点附近的正则方程的形式,它们在相变点附近的行为有普适性意义.

转换分岔 转换分岔是最一般的局部分岔行为.假设当系统的控制参量变化时,它的一个不动点从稳定的变为不稳定的.但这个不动点在控制参量 $\lambda=\lambda_c$ 附近总是存在(这里 λ_c 是临界点).另外,假设相变后产生的新的稳定态在临界点附近是控制参量的连续函数.这种情况出现的相变叫转换相变.它的正则形式为:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx - x^2. \tag{6.2.1}$$

下面根据上述条件推导转换相变的正则方程. 根据上面的两个假设,可以将系统状态在所要分析的定态附近以一个小量 ε 做幂级数展开,同时将控制参量在临界点附近做同样的幂级数展开:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_s = \varepsilon \boldsymbol{x}_1 + \varepsilon^2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots,$$

$$\lambda - \lambda_c = \varepsilon \gamma_1 + \varepsilon^2 \gamma_2 + \cdots. \tag{6.2.2}$$

由于在临界点有临界慢化现象,即

$$\boldsymbol{x} \sim \mathrm{e}^{\omega_c t}, \quad \omega_c \to 0,$$

系统运动的时间尺度在临界点附近变得很大,所以要将时间尺度拉长:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \cdots.$$

将此微扰形式代入微扰方程(4.5.2),并按 ε 的幂级数分开,得

$$O(\varepsilon):\quad \boldsymbol{L}(\lambda_c)\boldsymbol{x}_1 = 0, \tag{6.2.3a}$$

$$O(\varepsilon^2):\quad \boldsymbol{L}(\lambda_c)\boldsymbol{x}_2 = -\gamma_1 \boldsymbol{L}_\lambda(\lambda_c)\boldsymbol{x}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{h}_{xx}(\lambda_c)\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{x}_1}{\partial \tau_1}$$

$$= \boldsymbol{q}_2, \tag{6.2.3b}$$

$$O(\varepsilon^3):\quad \boldsymbol{L}(\lambda_c)\boldsymbol{x}_3 = -\gamma_1 \boldsymbol{L}_\lambda(\lambda_c)\boldsymbol{x}_2 - \gamma_2 \boldsymbol{L}_\lambda(\lambda_c)\boldsymbol{x}_1 - \frac{1}{2}\gamma_1^2 \boldsymbol{L}_{\lambda\lambda}(\lambda_c)\boldsymbol{x}_1$$

$$- \frac{1}{2}\gamma_1 \boldsymbol{h}_{xx\lambda}(\lambda_c)\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1 - \frac{1}{6}\boldsymbol{h}_{xxx}(\lambda_c)\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1$$

$$- \boldsymbol{h}_{xx}(\lambda_c)\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{x}_1}{\partial \tau_2} + \frac{\partial \boldsymbol{x}_2}{\partial \tau_1}$$

$$= \boldsymbol{q}_3. \tag{6.2.3c}$$

其中 $\boldsymbol{L}_\lambda(\lambda_c) = \partial \boldsymbol{L}/\partial\lambda|_{\lambda=\lambda_c}$ 是将线性算符在 λ_c 做泰勒展开得到的,$\boldsymbol{h}_{xx}\boldsymbol{xx}$ 是将 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ 在不动点做泰勒展开得到的二阶项. 对一个二维系统,它的一般形式为

$$\boldsymbol{h}_{xx}\boldsymbol{xx} = \begin{pmatrix} a_1 x_1^2 + b_1 x_1 x_2 + c_1 x_2^2 \\ a_2 x_1^2 + b_2 x_1 x_2 + c_2 x_2^2 \end{pmatrix}.$$

方程(6.2.3a)的解应有如下形式:

$$\boldsymbol{x}_1 = C(\tau_1, \tau_2, \cdots)\boldsymbol{u}. \tag{6.2.4}$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 是特征值为 $\omega=0$ 的特征向量,$C(\tau_1,\tau_2,\cdots)$ 是一个慢变量,它的动力学行为由下级的微扰方程决定. 注意到方程左边总是线性方程形式 $\boldsymbol{L}(\lambda_c)\boldsymbol{x}_i$,因而可以用弗来得霍姆可解性条件得到描写 C 的动力学方程. 首先找出矩阵 $\boldsymbol{L}$ 的伴随矩阵对应的非平庸零空间 $\boldsymbol{u}^+$. $\boldsymbol{L}^*\boldsymbol{u}^+ = 0$,可解性条件为:$(\boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{q}_i) = 0$,将解

(6.2.4)代入可解性条件,得

$$-\gamma_1 C(\boldsymbol{u}^+, L_\lambda(\lambda_c)\boldsymbol{u}) - \frac{1}{2}C^2(\boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{h}_{xx}(\lambda_c)\boldsymbol{uu}) + \frac{\partial C}{\partial \tau_1}(\boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{u}) = 0.$$

此式可写为

$$\frac{\partial C}{\partial \tau_1} = \gamma_1 P_1 C - P_2 C^2. \tag{6.2.5}$$

其中

$$P_1 = \frac{1}{(\boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{u})}(\boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{L}_\lambda(\lambda_c)\boldsymbol{u}), \quad P_2 = \frac{-1}{2(\boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{u})}(\boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{h}_{xx}(\lambda_c)\boldsymbol{uu}). \tag{6.2.6}$$

将方程(6.2.5)两边同乘 ε^2,并令 $A=\varepsilon C$. 由于 $\varepsilon\gamma_1 \approx \lambda-\lambda_c$,$\partial/\partial t \approx \varepsilon\partial/\partial\tau_1$,在一级近似中方程(6.2.5)变为

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = (\lambda-\lambda_c)P_1 A - P_2 A^2, \tag{6.2.7}$$

此方程与(6.2.1)相同,是转换分岔的一般形式. 上面的分析唯一的要求是系统在不动点附近可以以(6.2.2)的形式展开,所以推导出的方程(6.2.7)具有普适性意义. 如果 $P_2 \neq 0$,方程(6.2.7)有两个不动点: $A_{s1}=0$,$A_{s2}=(\lambda-\lambda_c)P_1/P_2$. 在这两个不动点附近做线性稳定性分析容易得到如下结果: 对于 $P_1>0$,当 $\lambda<\lambda_c$ 时 A_{s1} 是稳定的,A_{s2} 是不稳定的;当 $\lambda>\lambda_c$ 时 A_{s1} 是不稳定的,A_{s2} 是稳定的. 对于 $P_1<0$,当 $\lambda<\lambda_c$ 时 A_{s1} 是不稳定的,A_{s2} 是稳定的;当 $\lambda>\lambda_c$ 时 A_{s1} 是稳定的,A_{s2} 是不稳定的. 不论哪一种情况,在临界点时都有一个稳定性的交换,这是转换分岔的基本特征. 图 6.4 是转换分岔的分岔图,可以看到在临界点附近有 $A_s \propto (\lambda-\lambda_c)$.

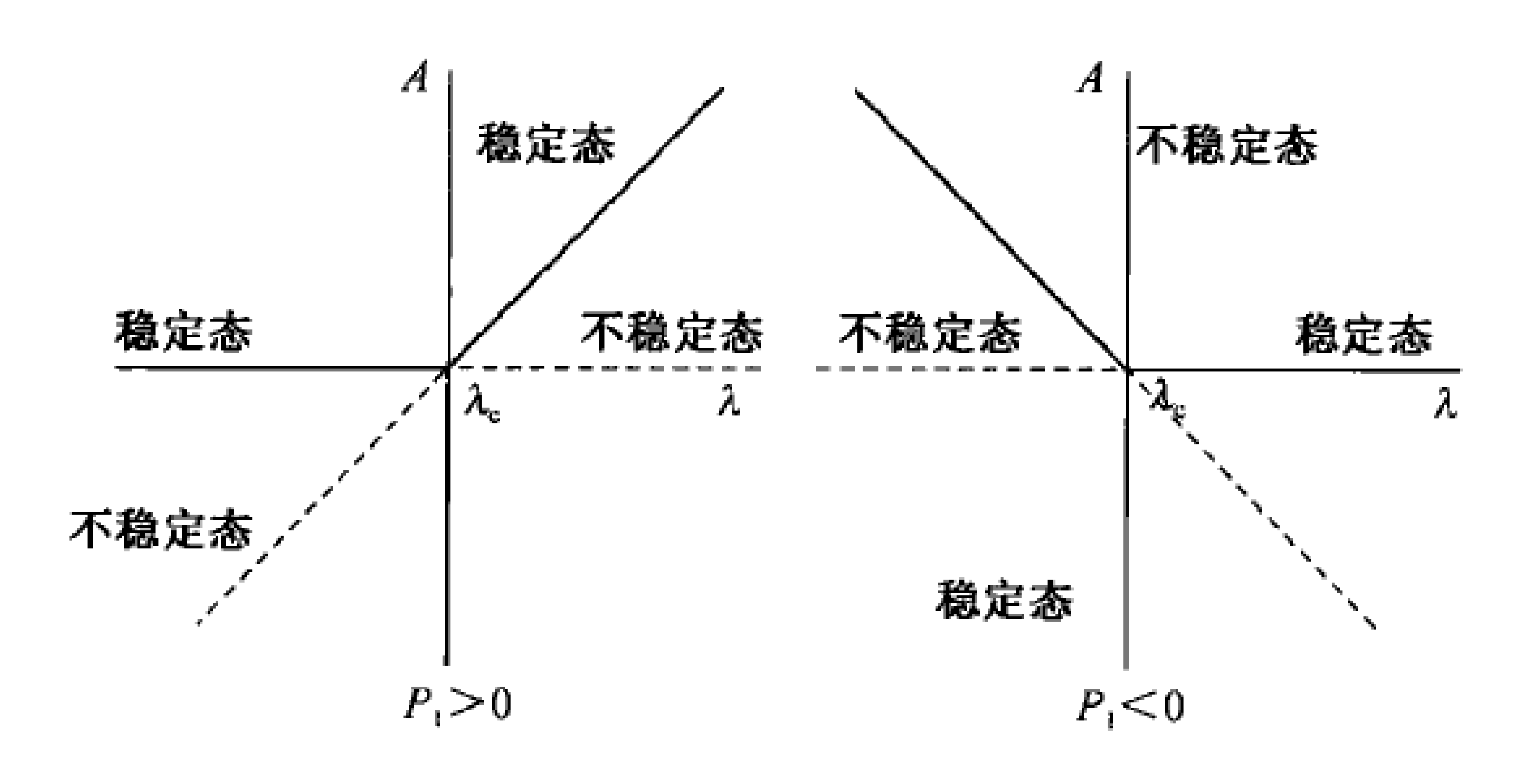


图 6.4 转换分岔的分岔图

P_1 的符号有明显的物理意义. 对线性方程 $L(\lambda)\boldsymbol{u}=\omega\boldsymbol{u}$ 两边求关于 λ 的导数,并计算它在 λ_c 时的值,得

$$\boldsymbol{L}_\lambda(\lambda_c)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{L}(\lambda_c)\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda_c}=\left[\frac{\partial\omega(\lambda)}{\partial\lambda}\right]\bigg|_{\lambda_c}\boldsymbol{u}+\omega_c\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda_c}.$$

两端左乘 $\boldsymbol{u}^+$ 并注意到 $(\boldsymbol{u}^+,\boldsymbol{L})=0$, $\omega_c=0$,

$$\frac{\partial\omega}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda_c}=\frac{(\boldsymbol{u}^+,\boldsymbol{L}_\lambda(\lambda_c)\boldsymbol{u})}{(\boldsymbol{u}^+,\boldsymbol{u})}=P_1. \tag{6.2.8}$$

很明显 P_1 的符号是特征值随控制参量在临界点变化的趋势.

叉型分岔　由于系统本身的对称性限制,在上面分析中会遇到 $P_2=0$ 的情况. 一般来讲,对于动力系统(4.1.1),如果有 $\boldsymbol{F}(-\boldsymbol{X})=-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$,则系统存在 $\boldsymbol{X}\to-\boldsymbol{X}$ 镜像对称不变性. 对于这类系统振幅方程(6.2.5)应该在操作 $C\to-C$ 下保持不变. 将此关系代入(6.2.5)得 $P_2=0$. 为了保证振幅 C 不以指数形式增长,在微扰方程(6.2.3)中要求 $\gamma_1=0$, $\partial C/\partial\tau_1=0$. 在这种情况下,该方程的二级微扰方程变为

$$\boldsymbol{L}(\lambda_c)\boldsymbol{x}_2=-\frac{1}{2}\boldsymbol{h}_{xx}(\lambda_c)\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1.$$

解得

$$\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{L}^{-1}(\lambda_c)\left[-\frac{1}{2}C^2\boldsymbol{h}_{xx}(\lambda_c)\boldsymbol{uu}\right]+C_2(\tau_2)\boldsymbol{u}. \tag{6.2.9}$$

注意 $\boldsymbol{L}^{-1}(\lambda_c)$ 一般不存在,式(6.2.9)右边第一项只代表二级微扰方程的一个特解. 为了得到振幅 C 的方程,需要将计算延展到第三级微扰方程. 将解(6.2.9)代入方程(6.2.3c),并注意到 $\gamma_1=0$, $\partial C/\partial\tau_1=0$,微扰方程变为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}(\lambda_c)\boldsymbol{x}_3=&-C\gamma_2\boldsymbol{L}_\lambda(\lambda_c)\boldsymbol{u}+\frac{\partial C}{\partial\tau_2}\boldsymbol{u}-\frac{1}{6}C^3\boldsymbol{h}_{xxx}\boldsymbol{uuu}\\&+\frac{1}{2}C^3\boldsymbol{h}_{xx}\boldsymbol{u}\boldsymbol{L}^{-1}(\lambda_c)[\boldsymbol{h}_{xx}\boldsymbol{uu}]-CC_2\boldsymbol{h}_{xx}\boldsymbol{uu}=\boldsymbol{q}_3.\end{aligned}$$

应用弗来得霍姆可解性条件,$(\boldsymbol{u}^+,\boldsymbol{q}_3)=0$,并注意到由于 $P_2=0$, $(\boldsymbol{u}^+,\boldsymbol{h}_{xx}\boldsymbol{uu})=0$,得振幅方程

$$\frac{\partial C}{\partial\tau_2}=\gamma_2P_1C-P_3C^3.$$

其中 P_1 由(6.2.6)式决定,P_3 由下式决定:

$$P_3=-\frac{1}{(\boldsymbol{u}^+,\boldsymbol{u})}\left(\boldsymbol{u}^+,\left\{\frac{1}{6}\boldsymbol{h}_{xxx}\boldsymbol{uuu}-\frac{1}{2}\boldsymbol{h}_{xx}\boldsymbol{u}\boldsymbol{L}^{-1}(\lambda_c)[\boldsymbol{h}_{xx}\boldsymbol{uu}]\right\}\right). \tag{6.2.10}$$

将上振幅方程两边同乘 ϵ^3，令 $A=\epsilon C$，并取近似 $\lambda-\lambda_c\approx\epsilon^2\gamma_2$，$d/dt\approx\epsilon^2\frac{\partial}{\partial\tau_2^2}$，得

$$\frac{dA}{dt}=(\lambda-\lambda_c)P_1A-P_3A^3. \tag{6.2.11}$$

下面分析这个振幅方程的稳定性. 此方程在 $(\lambda-\lambda_c)P_1/P_3<0$ 时有一个不动点 $A_s=0$，在 $(\lambda-\lambda_c)P_1/P_3>0$ 时有三个不动点：

$$A_{s1}=0,\quad A_{s2,s3}=\pm[(\lambda-\lambda_c)P_1/P_3]^{1/2}.$$

对这些不动点进行线性稳定性分析得到：对于不动点 $A_{s1}=0$，特征值为 $\omega=(\lambda-\lambda_c)P_1$，对于不动点 $A_{s2,s3}=\pm[(\lambda-\lambda_c)P_1/P_3]^{1/2}$，特征值为 $\omega=-2(\lambda-\lambda_c)P_1$. 因而根据 P_1，P_3 符号的不同，系统可能出现几种不同的分岔图.

首先分析 $P_3>0$ 的情况. 如果 $P_1>0$，则当 $\lambda<\lambda_c$ 时系统有一个稳定不动点 $A_s=0$；当 $\lambda>\lambda_c$ 时，这个不动点变成不稳定的，同时出现两个新的稳定不动点，$A_s=\pm[(\lambda-\lambda_c)P_1/P_3]^{1/2}$，如图 6.5(a)所示. 如果 $P_1<0$，则当 $\lambda>\lambda_c$ 时系统有一个稳定不动点 $A_s=0$；当 $\lambda<\lambda_c$ 时这个不动点变成不稳定的，同时出现两个新的稳定不动点 $A_s=\pm[(\lambda-\lambda_c)P_1/P_3]^{1/2}$，它的分岔图是前一种情况的镜像，见图 6.5(b). 这两种情况称为超临界叉型分岔(supercritical pitchfork bifurcation). 对于超临界叉型分岔，系统在临界点附近有 $A_s\propto(\lambda-\lambda_c)^{1/2}$.

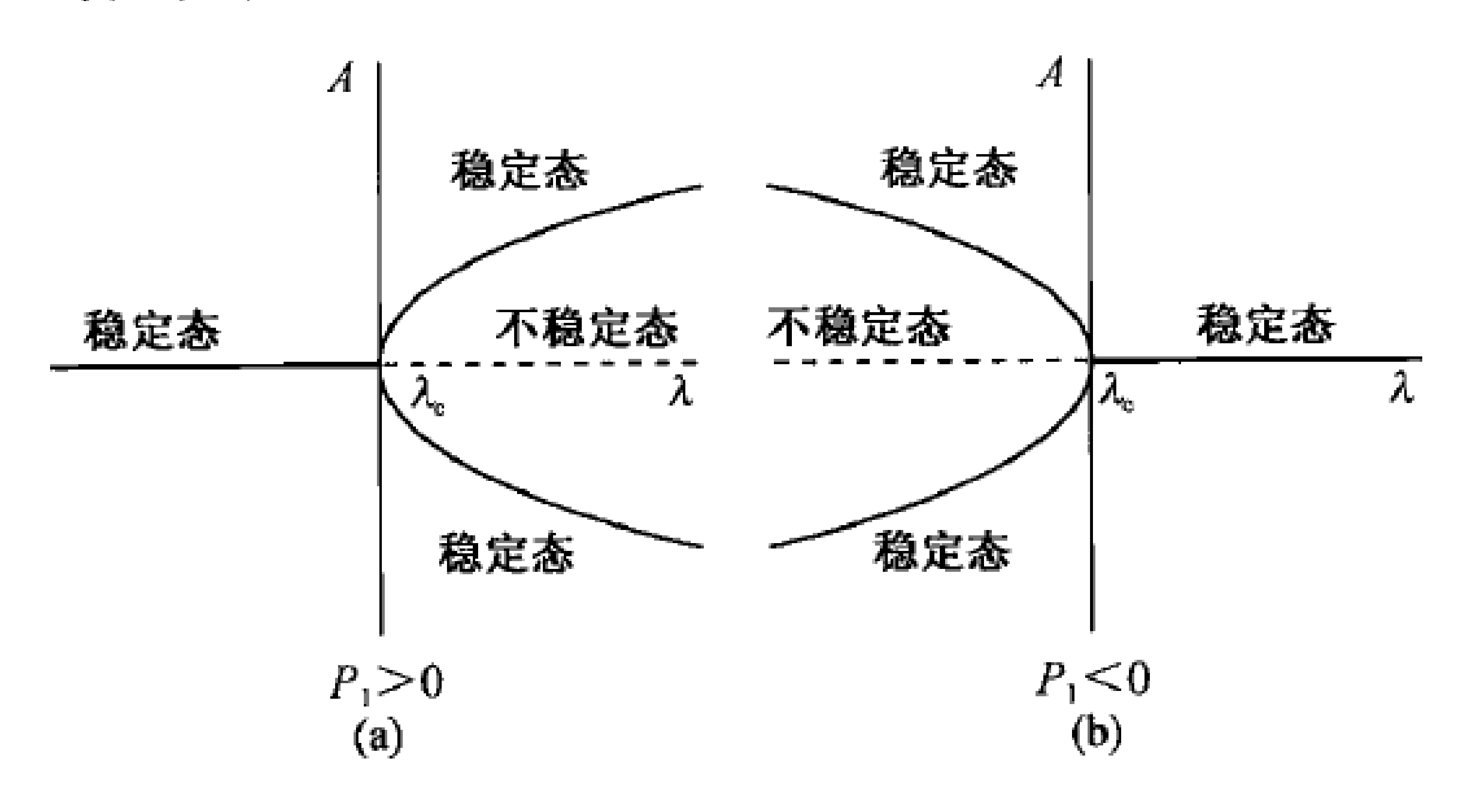


图 6.5 超临界叉型分岔的分岔图

对于 $P_3<0$ 的情况，如果 $P_1>0$，则当 $\lambda>\lambda_c$ 时系统存在唯一不稳定不动点 $A_s=0$；当 $\lambda<\lambda_c$ 时这个不动点从不稳定的变为稳定的，同时出现两个新的不稳定不动点 $A_s=\pm[(\lambda-\lambda_c)P_1/P_3]^{1/2}$. 分岔图如 6.6(a)所示. 如果 $P_1<0$，它的分岔图是 6.6(a)的镜像，见图 6.6(b). 这两种情况被称为次临界叉型分岔(subcritical pitchfork bifurcation). 对于次临界叉型分岔的情况，振幅方程缺少饱和项去限制振幅 A 的发展，这时需要引入更高阶的微扰项进行分析. 可以证明由

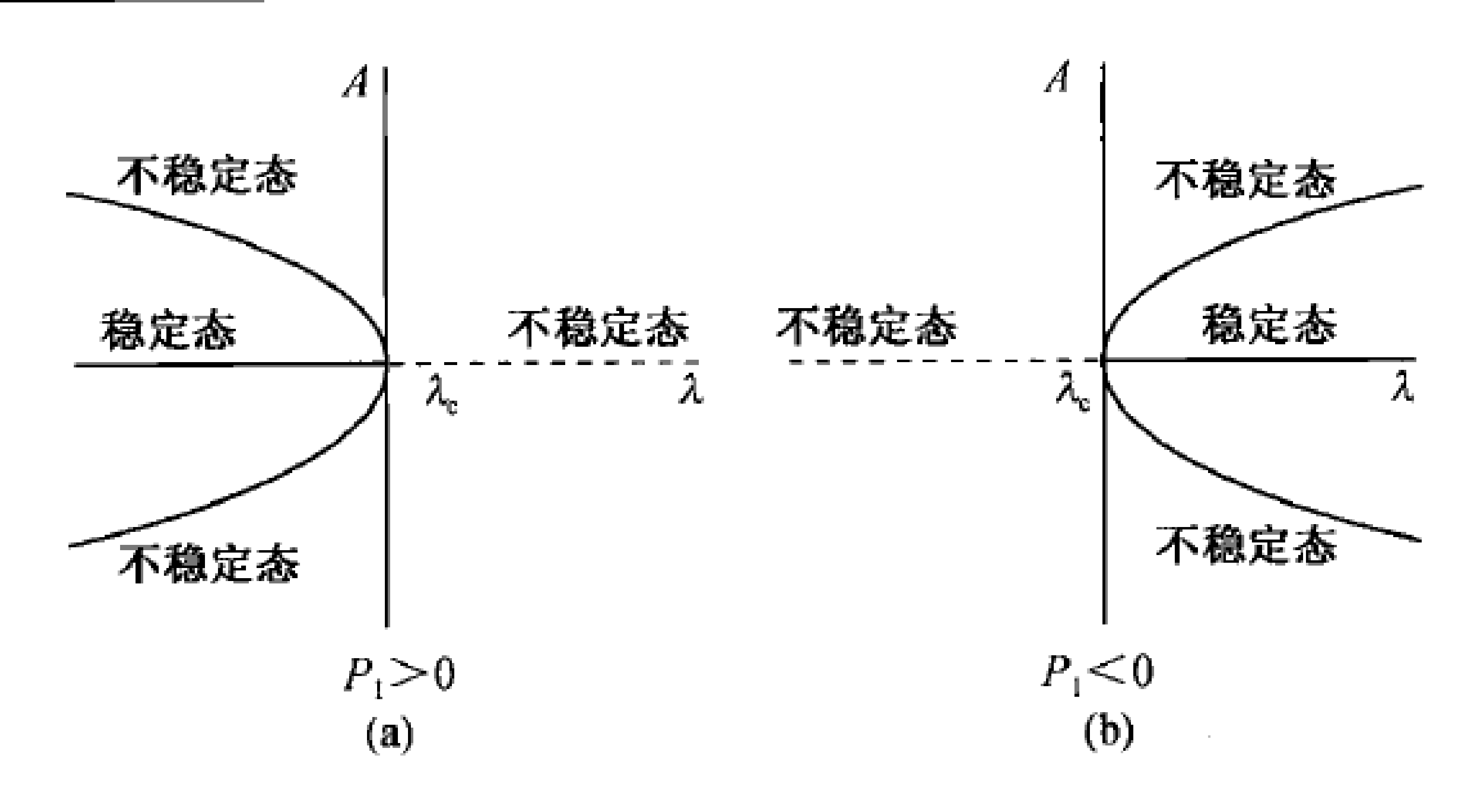


图 6.6　次临界叉型分岔的分岔图

更高阶的微扰项得到的振幅方程的形式为

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=(\lambda-\lambda_c)P_1A+P_3A^3-P_5A^5. \tag{6.2.12}$$

如果 $P_5>0$，方程就有了饱和项. 系统的分岔图是图 6.7 的形式. 这时系统的振幅在任何状态下都不会无限增加. 注意到图 6.7 中在$[\lambda_s,0]$区间出现了双稳态，在 $\lambda=\lambda_s$ 时系统有两个极限分岔点.

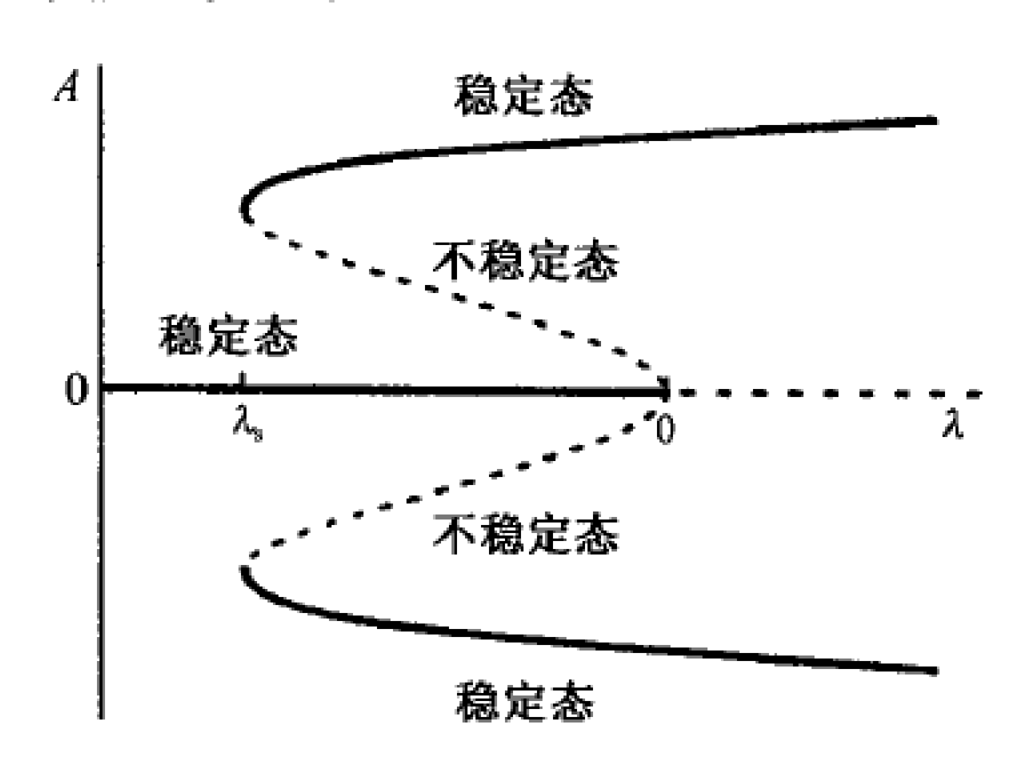


图 6.7　次临界叉型分岔的磁滞回线

从前面的分析知道，铁环系统(3.1.5)的不动点(0,0)在临界点附近随控制参量连续变化. 新产生的不动点在临界点附近也是控制参量的连续函数，同时，方程满足镜像对称，所以该系统在临界点附近应该是叉型分叉. 下面以这个系统演示叉型分岔正则方程的推导过程. 当摩擦力与惯性力相当时，铁环问题的方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-b\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\sin\theta(\lambda\cos\theta-1),\quad b>0.$$

写成双变量系统的形式：

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\Omega, \tag{6.2.13a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=\sin\theta(\lambda\cos\theta-1)-b\Omega. \tag{6.2.13b}$$

在临界点 $\lambda_c=1$ 附近将上方程分成线性部分与非线性部分，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\theta\\ \Omega\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \lambda-1 & -b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\ \Omega\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1-4\lambda}{6}\theta^3\end{bmatrix}+O(\theta^5).$$

因而

$$\boldsymbol{L}(\lambda_c)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -b\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{L}^*(\lambda_c)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -b\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}^+=\begin{pmatrix}b\\ 1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{L}_\lambda(\lambda_c)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

代入公式(6.2.6)容易得到 $P_1=1/b$. 由于方程(6.2.13)没有二阶项，所以 $\boldsymbol{h}_{xx}\boldsymbol{uu}=0$，代入(6.2.10)计算出 P_3：

$$\begin{aligned}P_3&=\frac{-1}{(\boldsymbol{u}^+,\boldsymbol{u})}\left(\boldsymbol{u}^+,\frac{1}{6}\boldsymbol{h}_{xxx}\boldsymbol{uuu}\right)\\ &=-\frac{1}{6b}(b\quad 1)\begin{pmatrix}0\\ 1-4\lambda\end{pmatrix}=\frac{-(1-4\lambda)}{6b}.\end{aligned}$$

因而振幅方程为

$$b\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=(\lambda-1)A-\left(\frac{4\lambda-1}{6}\right)A^3. \tag{6.2.14}$$

极限点分岔　上面两种情况的一个假设是所要分析的不动点在临界点处总是存在，这意味着动力系统方程右边的函数 $f(\boldsymbol{X}_s,\lambda)$对 λ 的各阶导数在 $\lambda=\lambda_c$ 时为零. 对于不满足以上要求的系统，它在临界点附近的行为是极限点分岔. 将动力学方程(4.1.1)在$(\boldsymbol{X}_s,\lambda_c)$附近作泰勒级数展开：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=&F(X_s,\lambda_c)+\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_{X_s,\lambda_c}(X-X_s)+\left(\frac{\partial F}{\partial\lambda}\right)_{X_s,\lambda_c}(\lambda-\lambda_c)\\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\right)_{X_s,\lambda_c}(X-X_s)^2+\cdots.\end{aligned} \tag{6.2.15}$$

因为是在不动点与临界点附近作展开，所以方程(6.2.15)的前两项为 0. 令

$$z = X - X_s,\quad \mu = \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_{X_s,\lambda_c}(\lambda - \lambda_c),\quad q_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial X_s^2}\right)_{X_s,\lambda_c},$$

得极限点分岔的正则形式：

$$\frac{dz}{dt} = \mu - q_2 z^2. \tag{6.2.16}$$

当 $\mu<0$ 时，方程(6.2.16)没有不动点；当 $\mu>0$ 时系统产生一对不动点，其中一个是稳定的，一个是不稳定的. 这种形式的方程曾在第五章中多次遇见过.

§6.3 动力势与结构稳定性

对于一维动力系统，上节讨论的三种分岔形式都可以用一个动力势函数表示. 其形式为

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{6.3.1}$$

其中 U 的函数形式为：

$$U = -(\lambda - \lambda_c)P_1\frac{z^2}{2} + P_2\frac{z^3}{3},\quad \text{转换分岔},$$

$$U = -(\lambda - \lambda_c)P_1\frac{z^2}{2} + P_3\frac{z^4}{4},\quad \text{叉形分岔},$$

$$U = -\mu z + q_2\frac{z^3}{3},\quad \text{极限点分岔}.$$

势函数 U 包含了系统不动点附近的所有动力学信息. 不动点 z_s 处在势函数 U 的极小值位置，$(\partial U/\partial z)_{z_s}=0$. 在不动点 z_s 对系统做微扰，令 $z=z_s+\xi$，代入(6.3.1)，得微扰方程

$$\frac{d\xi}{dt} = -\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right)_{z_s}\xi. \tag{6.3.2}$$

因而当$(\partial^2 U/\partial Z^2)_{z_s}>0$ 时，不动点是稳定的；反之是不稳定的. 图 6.8 给出了动力势函数在叉型分岔临界点前后的形状. 这里我们注意到它与朗道有序-无序的相变理论[30]有许多相似之处. 唯一的不同是势函数 U 是由动力系统决定的动力势，而不是热力学势. 这种相似还可以在临界指数中看到. 在叉型分岔中有 $z_s\sim\pm(\lambda-\lambda_c)^{1/2}$，这与朗道方程的结论一致，控制参量 λ 在朗道方程中起温度的作用. 但是，热力学平衡态相变理论与非平衡态动力学相变理论在微观机制方面存在本质差别. 这些差别在考虑随机扰动时会显示出来. 例如，对于动力学系统来说，图 6.8 中的 z_+ 与 z_- 共存意味着观测者可以以同等概率观察到这两个状态；而在热力学相变中这种解释是不对的. 另外，动力学系统的分岔现象所

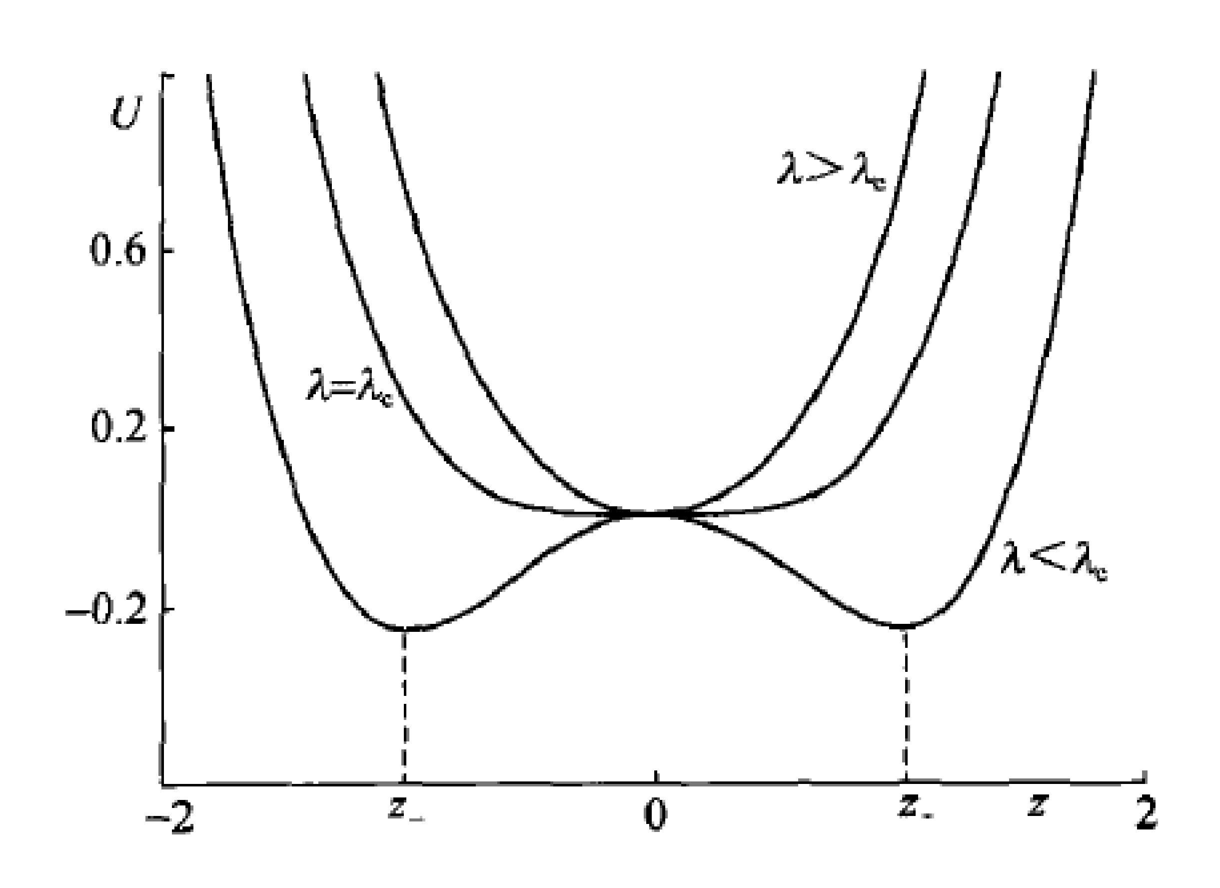


图 6.8　叉型分岔的势能图

描述的是一个宏观系统，而热力学平衡态的相变描述的是一个微观系统.

对于一维系统动力学方程在临界点附近的三种分岔行为可以用一个简单的方程加以概括：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax^3+bx^2+cx+d.$$

当方程中 $b=d=0$ 时，该方程变为叉型分岔的正则形式；当 $a=d=0$ 时，变为转换分岔的正则形式；而当 $a=c=0$ 时，变为极限点分岔的正则形式. 当四个系数都不为零时，它的动力学行为又是怎样的呢？首先注意到利用变换方程的时间尺度与变量尺度可以使其减少两个控制参量. 同时，对于一个三次方程来说可以通过坐标平移去掉二阶项. 令：$\tau=|a|t,z=x-\dfrac{b}{3|a|}$，在这种变换下，上述方程变为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}=-z^3+\lambda z+\mu. \tag{6.3.3}$$

这里新的控制参量 λ,μ 是老控制参量 a,b,c,d 的组合. 三次项的负号是为了保证方程存在饱和项. 从基本的代数运算中知道方程(6.3.3)可以最多有三个实数解，也就是说，系统最多有三个不动点. 另外，随着控制参量的变化，系统不动点的数量可能从三个变为一个. 不动点数量变化的边界由下式决定：

$$-4\lambda^3+27\mu^2=0. \tag{6.3.4}$$

根据此式画出的控制参量空间的相变图如图 6.9 所示. 从图中看到三个不动点的区域结束于一点(0,0). 这一点被称为尖奇异点(casp singularity). 利用线性稳定性分析可以知道，在三个不动点的区域内有两个不动点是稳定的，一个是

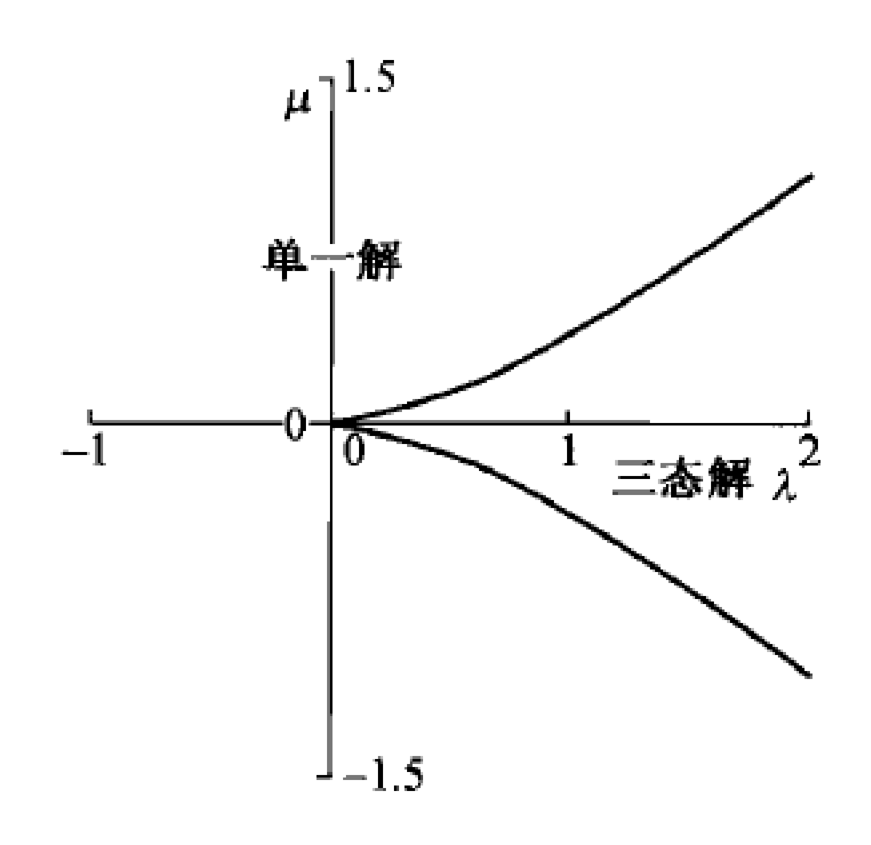


图 6.9　包含尖奇异点的参量空间图

不稳定的，因而这个区域对应于系统的双稳态. 系统进入双稳态区域的方式有三种：第一种是固定 $\mu=0$，此时方程(6.3.3)变为叉型分岔的正则形式，它的分岔图见图 6.5. 如果固定任意一个 $\lambda>0$，而逐渐变化 μ，系统变量随控制参量的变化会出现一个 S 形的曲线. 如图 6.10(a)所示. 双稳区的边界由 μ_1 与 μ_2 决定，在这两个相变点系统会出现极限点分岔. 来回扫描控制参量 μ，我们会看到一个磁滞回路现象，这个现象已经在前面的章节中讨论过. 如果将控制参量 $\mu(\mu\neq0)$固定，而变化控制参量 λ，系统进入双稳区会采取另外的方式，如图 6.10(b)所示. 可以看到系统的状态随控制参量的变化是两条分离的曲线. 曲线(1)对于所有控制参量存在，而曲线(2)有一个极限点分岔，在分岔后出现一对新的不动点，一个是稳定的，一个是不稳定的. 从图 6.10(b)看到，不论系统的控制参量 μ 多么小，只要它不为零，系统的分岔图就是图 6.10(b)所示的形式，而不是如图 6.5 所示的叉型分岔. 也就是说，由于 $\mu\neq0$ 而导致的系统不完美性破坏了叉型分岔. 相反，极限点分岔却不受控制参量变化的影响，不论固定 μ 变化 λ，还是固定 λ 变化 μ，亦或同时变化 μ 与 λ，都可以得到极限点分岔. 从这个意义上说，极限点分

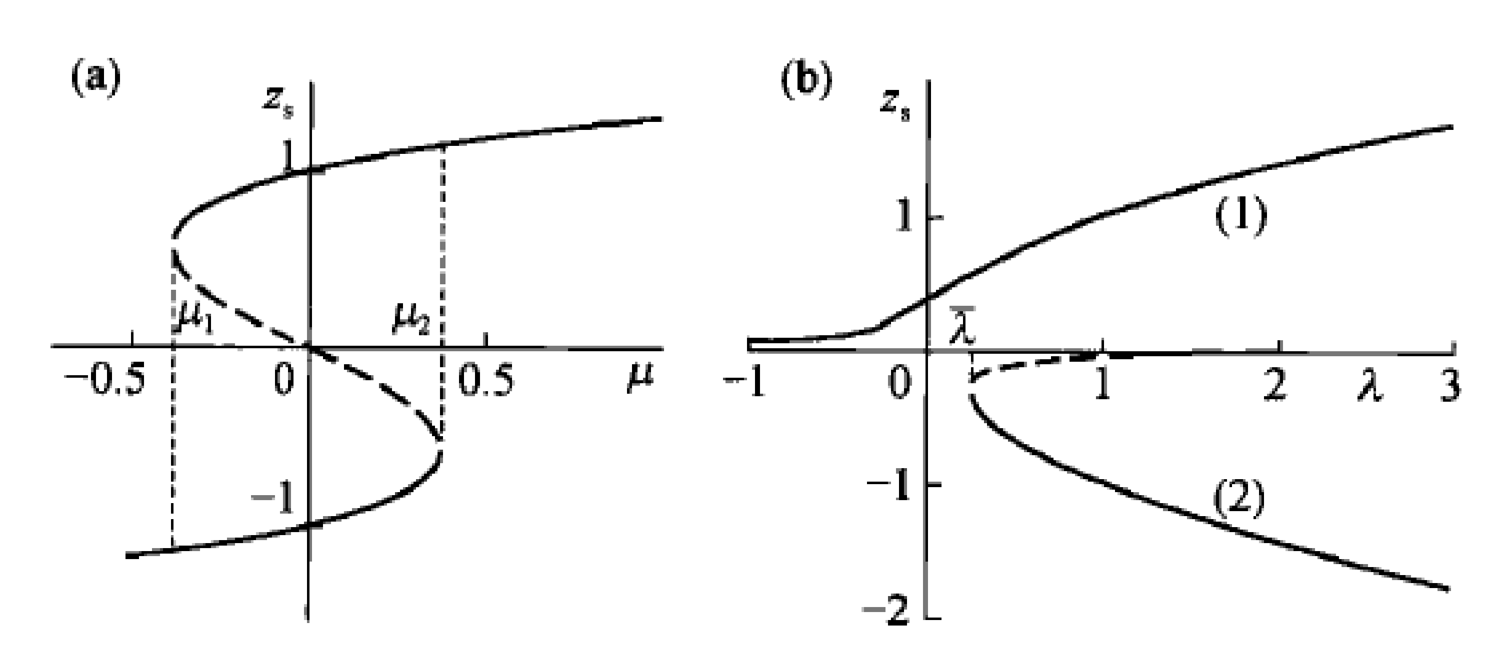


图 6.10　两种鞍-结点分岔的形式

岔是结构稳定的,这种稳定性只有在同时变化 μ 与 λ 时才会被破坏. 对于系统(6.3.3),需要将 μ 小心地固定在 $\mu=0$ 的点上并连续变化 λ,才可能破坏极限点分岔.

上面的讨论显示了结构稳定性的基本概念. 这个概念在第四章的末尾有过一些讨论. 对于一些现象,比如叉型分岔的情况,结构稳定性只有在控制参量满足一些特定的条件下才会出现. 一旦这些条件不被满足,这些现象就不再存在. 在一个一般的物理系统中,这种对控制参量的限制是很难达到的. 即使在某些情况下满足了这些条件,一旦外部环境发生了微小的变化,它们就会消失. 从这个意义上讲,这些现象是结构不稳定的. 对于另外一些现象,比如极限点分岔的情况,它的存在不会随着控制参量的变化而出现定性的改变,这些现象就是结构稳定的. 我们已经介绍了用线性稳定性分析方法分析系统的状态稳定性,但这种分析不能直接应用于系统的结构稳定性分析. 讨论一个给定系统的结构稳定性如何,是结构稳定性分析的主要内容. 本书不对它作进一步介绍,有兴趣的读者可以在参考文献[31,32]中读到详细的分析.

§6.4 霍普夫分岔

在二维系统中,不动点有六种类型: 稳定结点,稳定焦点,鞍点,不稳定结点,不稳定焦点与中心点. 当控制参量在临界点附近变化时,一个稳定不动点会向一个不稳定不动点过渡. 因而在二维系统中,分岔可以有如下三种形式: 稳定结点→不稳定结点,稳定结点→鞍点,稳定焦点→不稳定焦点. 第一种分岔要求两个特征值同时由负变正,这是一种很少见的情况,这里不讨论;第二种分岔可以在一维流形中讨论,我们在本章第二节中做了详细介绍;第三种类型对应于霍普夫分岔,分岔出现后会产生极限环. 另外,二维系统中也会出现一个稳定点与一个不稳定点同时出现或同时消失的情况,它是极限点分岔在二维系统中的表现形式,叫鞍-结点分岔. 这种分岔与极限点分岔没有本质区别,只是在极限点分岔上加上了一个稳定流形,如图 5.15 所示. 这里主要推导霍普夫分岔的正则方程.

在控制变量变化到稳定焦点与不稳定焦点的交界点时,系统对应的线性方程的特征根实部 $\mathrm{Re}(\omega)=0$,但虚部 $\mathrm{Im}(\omega)=\Omega_c\neq0$. 与上节分析不同的是,这时有一对特征值一起越过特征值平面的虚轴,因此中心流形是二维的. 同时,在临界点附近变量 $\boldsymbol{x}$ 有一个快时间尺度: $t\sim2\pi/\Omega_c$, $\boldsymbol{x}$ 以 $2\pi/\Omega_c$ 做周期振荡,因此在做多重尺度分析时要考虑这个时间尺度 $T=\Omega_c t$. 令

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\Omega_c\frac{\partial}{\partial T}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial\tau_2}+\cdots,$$

$$\lambda-\lambda_c=\gamma_1\varepsilon+\gamma_2\varepsilon^2+\cdots,$$

代入微扰方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{L}(\lambda)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}),$$

再按 ε 的幂级将微扰方程分开，得

$$O(\varepsilon):\quad\left[\Omega_c\frac{\partial}{\partial T}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}(\lambda_c)\right]\boldsymbol{x}_1=0,\tag{6.4.1a}$$

$$O(\varepsilon^2):\quad\left[\Omega_c\frac{\partial}{\partial T}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}(\lambda_c)\right]\boldsymbol{x}_2=-\boldsymbol{q}_2,\tag{6.4.1b}$$

$$O(\varepsilon^3):\quad\left[\Omega_c\frac{\partial}{\partial T}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}(\lambda_c)\right]\boldsymbol{x}_3=-\boldsymbol{q}_3,\tag{6.4.1c}$$

$$\cdots.$$

其中 $\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3$ 的形式与(6.2.3)式一致. 对一级微扰方程求解，得

$$\boldsymbol{x}_1=C(\tau_1,\tau_2)\boldsymbol{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}T}+\text{c. c.}\tag{6.4.2}$$

将此解代入二级微扰方程(6.4.1b)并利用弗来得霍姆可解性条件，得

$$-C\gamma_1(\boldsymbol{u}^+\mathrm{e}^{\mathrm{i}T},\boldsymbol{L}_\lambda(\lambda_c)\boldsymbol{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}T})-\frac{1}{2}C^2(\boldsymbol{u}^+\mathrm{e}^{\mathrm{i}T},\boldsymbol{h}_{xx}\boldsymbol{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}T}\boldsymbol{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}T})+\frac{\partial C}{\partial\tau_1}(\boldsymbol{u}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}T},\boldsymbol{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}T})=0,\tag{6.4.3}$$

这里 $u^+\mathrm{e}^{\mathrm{i}T}$ 是伴随算符 $J_T^*=\Omega_c\frac{\partial}{\partial T}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}^*(\lambda_c)$ 的非平庸零空间. 其中 $\boldsymbol{u}^+$ 是 $\boldsymbol{L}^*$ 的特征向量. 注意到这时正交操作要在全时间内进行. 由于解的周期性，只要在 0 到 2π 内积分就行了：

$$(a(T),b(T))=\int_0^{2\pi}a^*(T)b(T)\mathrm{d}T.$$

在(6.4.3)的 C^2 项中，$\boldsymbol{h}_{xx}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}$ 可以写为如下形式：

$$\boldsymbol{h}_{xx}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}a_1x_1^2+b_1x_1x_2+c_1x_2^2\\a_2x_1^2+b_2x_1x_2+c_2x_2^2\end{pmatrix},$$

将解(6.4.2)代入有：

$$x_1^2=(Cu_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}T}+\bar{C}\bar{u}_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}T})^2=|Cu_1|^2+C^2u_1^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2T}+\text{c. c.},$$

$$x_2^2=(Cu_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}T}+\bar{C}\bar{u}_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}T})^2=|Cu_2|^2+C^2u_2^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2T}+\text{c. c.},$$

$$x_1x_2=(Cu_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}T}+\bar{C}\bar{u}_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}T})(Cu_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}T}+\bar{C}\bar{u}_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}T})$$

$$=\frac{1}{2}|C|^2(u_1\bar{u}_2+u_2\bar{u}_1)+c^2u_1u_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2T}+\text{c. c.}$$

所以 $\boldsymbol{h}_{xx}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}$ 应有如下形式：

$$\boldsymbol{h}_{xx}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}d_1+e_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}2T}+\mathrm{c.\,c.}\\ d_2+e_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2T}+\mathrm{c.\,c.}\end{pmatrix}.$$

由于($\sin nx,\cos nx$)组成正交系，显然，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}T}$ 与上式正交. 因此式(6.4.3)的第二项为 0，从而得到

$$\frac{\partial C}{\partial\tau_1}=\gamma_1P_1C.$$

为了保证振幅 C 有界，一定要有 $\gamma_1=0$，$\partial C/\partial\tau_1=0$，解二级微扰得：

$$\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{L}^{-1}(\lambda_c)\left[-\frac{1}{2}C^2\boldsymbol{h}_{xx}\boldsymbol{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}T}\boldsymbol{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}T}\right]+C_2(\tau_2)\boldsymbol{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}T}. \tag{6.4.4}$$

将此解代入三级微扰方程并再次运用弗来得霍姆可解性条件，并注意到 $\gamma_1=0$，$\partial C/\partial\tau_1=0$，$(\boldsymbol{u}^+,h_{xx}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u})=0$，得

$$\frac{\partial C}{\partial\tau_2}=\gamma_2P_1C-P_3|C|^2C. \tag{6.4.5}$$

其中 P_1 仍然由(6.2.6a)式决定，P_3 由下式决定：

$$P_3=\frac{-1}{(\boldsymbol{u}^+,\boldsymbol{u})}\left[\boldsymbol{u}^+\mathrm{e}^{\mathrm{i}T},\frac{1}{6}\boldsymbol{h}_{xxx}(\boldsymbol{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}T})^3-\frac{1}{2}\boldsymbol{h}_{xx}u^{\mathrm{i}T}\boldsymbol{L}^{-1}(\lambda_c)\{\boldsymbol{h}_{xx}(\boldsymbol{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}T})^2\}\right]. \tag{6.4.6}$$

令：$\varepsilon C=A$，代入(6.4.5)式，得振幅方程

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=(\lambda-\lambda_c)P_1A-P_3|A|^2A. \tag{6.4.7}$$

这就是霍普夫分岔的正则形式. 注意这里 A，P_1，P_3 一般来讲都是复数. 令 $A=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$，其中 r 与 ϕ 为实数，方程(6.4.7)变为实数方程：

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=(\lambda-\lambda_c)\mathrm{Re}(P_1)r-\mathrm{Re}(P_3)r^3, \tag{6.4.8a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=(\lambda-\lambda_c)\mathrm{Im}(P_1)-\mathrm{Im}(P_3)r^2. \tag{6.4.8b}$$

方程的第一式与叉型分岔一致，因而可以套用叉型分岔的结论：当 $\mathrm{Re}(P_3)>0$ 时，系统表现出超临界分岔，被称为超临界霍普夫分岔，见图 6.11(a)；当 $\mathrm{Re}(P_3)<0$ 时，系统表现出次临界分岔，被称为次临界霍普夫分岔，见图 6.11(b). $r\neq0$ 的解对应于一个极限环. 将这类解代入(6.4.8b)并两边积分可以计算出极限环的振荡频率随控制参量的变化：

$$\phi=\phi_0+\left[\mathrm{Im}(P_1)-\frac{\mathrm{Im}(P_3)\mathrm{Re}(P_1)}{\mathrm{Re}(P_3)}\right](\lambda-\lambda_c)t=\phi_0+\Delta\Omega t, \tag{6.4.9}$$

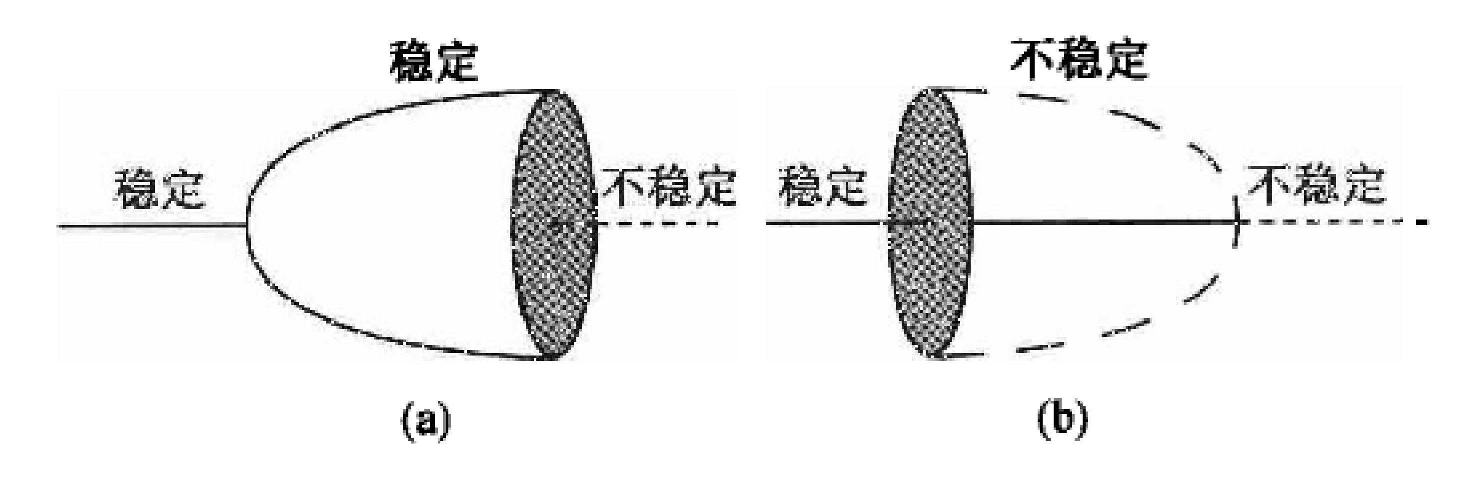


图 6.11　超临界与次临界霍普夫分岔

这里 $\Delta\Omega$ 是对 Ω_c 的一个修正.

为了将上面的推导具体化，现在推导布鲁塞尔子模型(4.5.3)在霍普夫分岔点附近振幅方程的正则形式. 在§4.5的推导中得出该模型对应的微扰方程为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B-1 & A^2\\-B & -A^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\left(\frac{B}{A}x^2+2Axy+x^2y\right)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}. \tag{6.4.10}$$

系统有唯一不动点$(A,B/A)$. 利用线性稳定性分析容易得到霍普夫分岔的临界点为 $B_c=A^2+1,\Omega_c=A$. 将此关系代入(6.4.1a)解得：

$$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=C(\tau_1,\tau_2)\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}T}+\mathrm{c.\,c.} \tag{6.4.11}$$

$\boldsymbol{L}(B_c)$的伴随矩阵及所对应的特征向量为：

$$\boldsymbol{L}^*=\begin{pmatrix}A^2 & -(A^2+1)\\A^2 & -A^2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}^+=\begin{bmatrix}1\\\dfrac{A^2+\mathrm{i}A}{A^2+1}\end{bmatrix}.$$

因而伴随算符对应的非平庸零空间为：$\boldsymbol{u}^+\mathrm{e}^{\mathrm{i}T}$，将一级微扰的解(6.4.11)代入二级微扰方程，并注意到 $\gamma_1=0,\partial C/\partial\tau_1=0$，得

$$\left[A\frac{\partial}{\partial T}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}A^2 & A^2\\-(A^2+1) & -A^2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\left(\frac{A^2+1}{A}x_1^2+2Ax_1y_1\right)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}. \tag{6.4.12}$$

从上面的分析知道方程(6.4.12)没有共振项，因而可以寻求以下解的形式：

$$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_0\\q_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_2\\q_2\end{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2T}+\mathrm{c.\,c.} \tag{6.4.13}$$

将此解的形式代入方程(6.4.12)，对比方程两端系数得：

$$p_0=0,\quad q_0=\frac{2}{A^3}(A^2-1)|C|^2,$$

$$p_2 = \frac{-2\mathrm{i}}{3A^2}(1 - A^2 + 2\mathrm{i}A)C^2,$$

$$q_2 = \frac{1}{3A^3}[1 - 5A^2 + 2\mathrm{i}A(2 - A^2)]C^2. \tag{6.4.14}$$

将上面前级微扰方程的解代入第三级微扰方程，并利用弗来得霍姆可解性条件，得

$$\begin{aligned}&\left(1 \quad \frac{A^2 - \mathrm{i}A}{A^2 + 1}\right)\left[\gamma_2 C\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\mathrm{i} - A}{A} \end{pmatrix} - \frac{\partial C}{\partial \tau_2}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\mathrm{i} - A}{A} \end{pmatrix}\right. \\ &+ |C|^2 C\left\{2\,\frac{A^2 + 1}{A}\,\frac{-2\mathrm{i}}{3A^2}(1 - A^2 + 2\mathrm{i}A) + \frac{4(A^2 - 1)}{A^2}\right. \\ &+ \frac{2}{3A^2}[1 - 5A^2 + 2\mathrm{i}A(2 - A^2)] \\ &+ \frac{4\mathrm{i}}{3A}(1 - A^2 + 2\mathrm{i}A)\,\frac{\mathrm{i} + A}{A} \\ &\left.\left. + \frac{\mathrm{i} + A}{A}\right\}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = 0.\end{aligned} \tag{6.4.15}$$

令 $z = \varepsilon C$，整理上式得：

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{B - B_c}{2}z - \left(\frac{A^2 + 2}{2A^2} + \mathrm{i}\,\frac{4A^4 - 7A^2 + 4}{6A^3}\right)|z|^2 z. \tag{6.4.16}$$

这就是布鲁塞尔子在霍普夫分岔附近的正则方程. 由于$(A^2+2)/2A^2>0$，这个分岔是超临界霍普夫分岔.

霍普夫分岔的正则形式可以从对称性分析中直接得到. 在霍普夫分岔点，非线性方程(4.5.2)的一级近似解的形式为

$$x = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega_c t} + \bar{A}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega_c t}. \tag{6.4.17}$$

其振幅方程可写为如下形式：

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = F(A, \bar{A}). \tag{6.4.18}$$

由于系统在临界点附近，可以认为(6.4.18)式中的振幅 A 的绝对值很小，因而该方程可以在 $A=0$ 处作泰勒级数展开：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = &\mu A + b\bar{A} + cA^2 + d|A|^2 + e\bar{A}^2 + fA^3 \\ &+ g|A|^2 A + h|A|^2\bar{A} + i\bar{A}^3 + O(A^4).\end{aligned} \tag{6.4.19}$$

利用对称性分析可以将上式简化. 对称性分析的出发点是(6.4.19)式在一个对称变换下应该保持不变. 对于时间振荡行为，其振幅方程应该保证时间平移不

变性，即在操作 $t \to t - t_0$ 下，振幅方程不变. 将此时间平移变换代入(6.4.17)式，得

$$x = Ae^{i\Omega_c(t-t_0)} + \bar{A}e^{-i\Omega_c(t-t_0)} = (Ae^{i\phi})e^{i\Omega_c t} + (\bar{A}e^{-i\phi})e^{-i\Omega_c t}. \quad (6.4.20)$$

其中 $\phi = -\Omega_c t_0$. 因此时间平移对称要求振幅方程在 $A \to Ae^{i\phi}$ 下保持不变. 将此变换代入(6.4.19)式，得

$$\begin{aligned} e^{i\phi}\frac{dA}{dt} &= e^{i\phi}\mu A + e^{-i\phi}b\bar{A} + e^{i2\phi}cA^2 + d|A|^2 \\ &\quad + e^{-i2\phi}e\bar{A}^2 + e^{i3\phi}fA^3 + e^{i\phi}g|A|^2A \\ &\quad + e^{-i\phi}h|A|^2\bar{A} + e^{-i3\phi}i\bar{A}^3 + O(A^4) \end{aligned} \quad (6.4.21)$$

很明显，只有当方程(6.4.19)中系数 b,c,d,e,f,h,i 为 0 时，方程(6.4.21)才能与方程(6.4.19)完全相同. 因而方程(6.4.19)被简化为

$$\frac{dA}{dt} = \mu A + g|A|^2A. \quad (6.4.22)$$

为了保证上方程有饱和项，g 必须为负数. 这就是超临界霍普夫分岔的正则形式. 如果 g 是正数，则还要加入更高阶项. 容易证明满足时间平移对称的非线性项为 $|A|^{2n}A$. 如果 5 阶项的系数是负数，则振幅方程为

$$\frac{dA}{dt} = \mu A + g|A|^2A - g_1|A|^4A. \quad (6.4.23)$$

这是次临界霍普夫分岔的一般形式. 对称性分析的优点是简单，但它不能给出振幅方程中的系数与原方程系数的关系. 要了解这种关系，必须进行多重尺度微扰分析.

§6.5　极限环的全局分岔

在二维动力系统中，除了上一节分析的霍普夫分岔可以产生极限环以外，还有三种路径可以产生或消灭一个极限环. 这三种产生极限环的路径都牵扯到相空间的一个大的区域，而不是像霍普夫分岔那样局限在不动点附近，因而它们被称为全局分岔(global bifurcations). 三种全局分岔分别为：鞍-结点分岔(saddle-node bifurcation)，无限周期分岔(infinite-period bifurcation)与同宿轨道分岔(homoclimic bifurcation). 这一节提供这三种分岔的典型模型，并对它们之间的动力学行为做一个比较.

鞍-结点分岔　在临界点附近两个汲限环，一个是稳定的，一个是不稳定的，它们同时出现，或经碰撞同时消失，这种分岔是极限环的鞍-结点分岔，它可

以对应为不动点的鞍-结点分岔. 一个简单的描述此类分岔的动力学方程为:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\mu r+r^3-r^5, \tag{6.5.1a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega-br^2. \tag{6.5.1b}$$

与上节(6.4.8)式比较,我们知道,当 $\mu=0$ 时系统经历次临界霍普夫分岔,现在讨论 $\mu<0$ 的情况.

由于方程(6.5.1)的径向方程与角变量方程分离,可以认为径向方程是一个一维系统,容易验证此方程在 $\mu_c=-1/4$ 时出现一个极限点分岔,由于整个系统是二维的,这个分岔被称为鞍-结点分岔. 由于 $\mu<0$,不动点 $r_s=0$ 是稳定的. 在极限点分岔出现后,系统会产生一对新的不动点,一个是稳定的,一个是不稳定的. 不稳定不动点确定了两个稳定不动点的吸引域. 回到二维系统. 在一维系统中的不动点 $r_s=0$ 在二维系统中还是不动点,在一维系统中 $r_s\neq 0$ 的不动点在二维系统中是极限环. 因而系统在鞍-结点分岔后出现一对极限环,一个是稳定的,一个是不稳定的. 稳定极限环与原来的定态构成双稳态,而不稳定极限环构成二维空间中两个状态吸引域的边界. 图 6.12 的上半部表示径向方程在分岔前后的流形图,下半部分是二维相空间的全空间流形图. 当控制参量 μ 增长并超过临界点 μ_c 时,一对极限环出现,稳定的成为一维不变流形,不稳定的成为稳定不动点吸引域与极限环吸引域的边界. 当 μ 减小并跃过临界点时,一对极限环碰撞并消失. 注意到在这种形式的分岔中,极限环一产生就有一个量级为 1 的振幅,而对于霍普夫分岔的情况,极限环的振幅与控制参量到临界点的距离呈平方根关系,$A\propto(\mu-\mu_c)^{1/2}$.

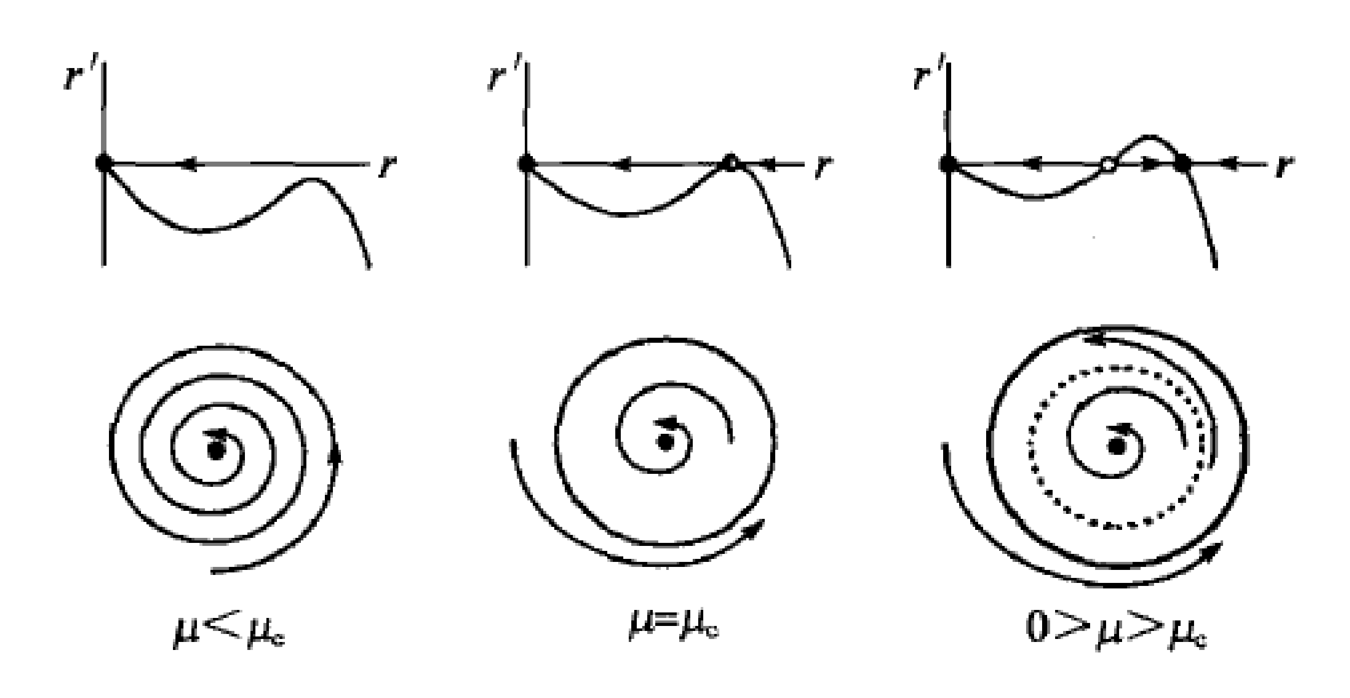


图 6.12　鞍-结点分岔导致的极限环

无限周期分岔 考虑如下动力系统：

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=r(1-r^2), \tag{6.5.2a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\mu-\sin\theta. \tag{6.5.2b}$$

这个系统由两个相互独立的子系统构成，径向方向与种群生长模型一致．根据以前的分析知道不动点 $r_s=0$ 是不稳定的，$r_s=1$ 是稳定的，因而在二维相空间中除 $r=0$ 以外的所有轨迹会渐近地趋近于 $r=1$ 的环上．在角变量方向，如果$\mu>1$，流形运动方向总是逆时针的；当 $\mu<1$ 时，在某一个圆弧范围流形开始顺时针方向运动，因而在环上产生两个不动点，一个是稳定的，一个是不稳定的，这是在环上的极限点分岔．在二维系统中表现为鞍-结点分岔．临界点为 $\mu_c=1$，这种情况在第五章中有过详细的讨论．图 6.13 给出了系统分岔前后的流形图．根据以前的讨论，我们知道当控制参量 μ 从大于 1 减少到临近于 1 时，系统出现瓶颈效应，极限环的流形运动在 $\theta=\pi/2$ 附近会变得很慢，当 $\mu=\mu_c=1$ 时，流形在 $\theta=\pi/2$ 处停止运动，周期变为无穷长．因而此类分岔被称为无限周期分岔．当 $\mu<1$ 时，极限环经一个鞍-结点分岔消失，系统产生出一个鞍点和一个稳定结点．

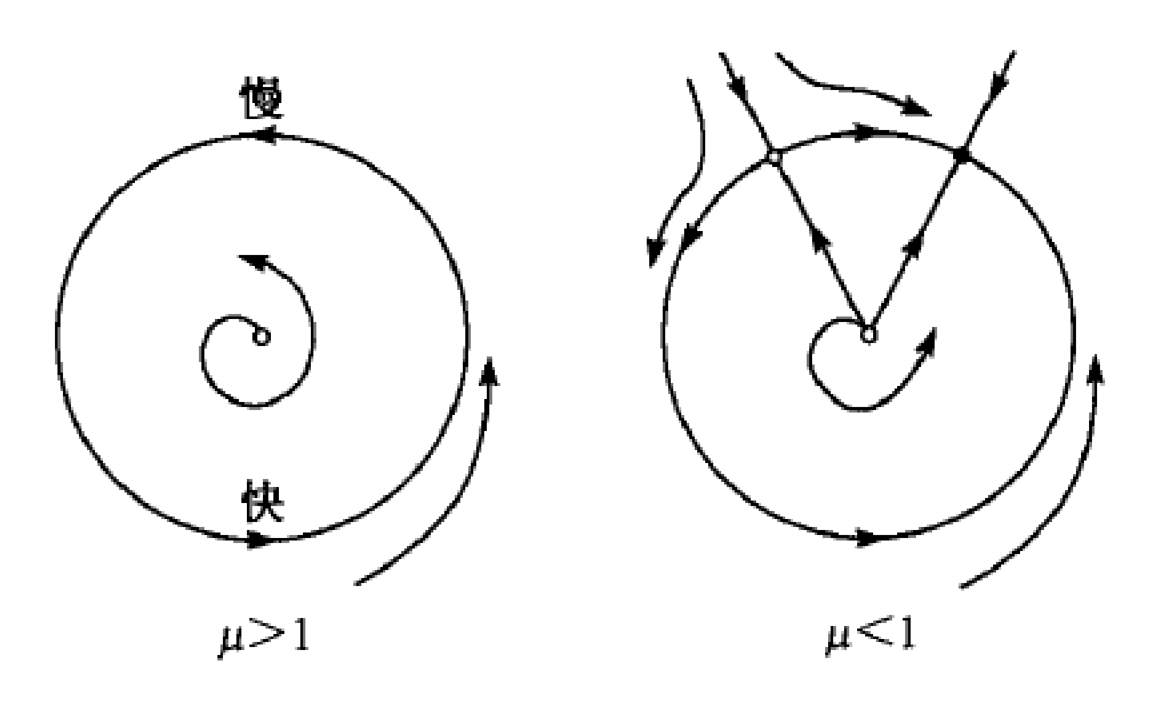


图 6.13 无限周期分岔产生的极限环

与霍普夫分岔不同，在临界点时，这类极限环表现的振荡振幅为 $O(1)$，但是它的周期与控制参量到临界点的距离呈平方根反比关系：$T\propto(\mu-\mu_c)^{-1/2}$．这个关系的推导已经在上一章中介绍过．

同宿轨道分岔 同宿轨道分岔是这样一种情况：当极限环的振幅随着控制参量不断增加时，它的流形的某一个部分会逐渐接近一个鞍点．在分岔点上极限环与鞍点相碰撞而产生一个同宿轨道．这时极限环的周期也变得无穷长，因而它是另一个类型的无限周期分岔．但这种无限周期的产生机制与系统(6.5.2)不同．为了避免混淆，这种分岔被称为鞍-环分岔(saddle-loop bifurcation)或同宿轨道分岔．

同宿轨道分岔很难找到合适的正则方程. 我们以下面的例子说明分岔点附近的流形变化.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y, \tag{6.5.3a}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\mu y+x-x^2+xy. \tag{6.5.3b}$$

图 6.14 给出了该系统在分岔前,分岔点与分岔后的主要流形图. 分岔点可以通过数值计算得出: $\mu_c\approx-0.8645$. 当 $\mu<\mu_c$ 时,例如$\mu=-0.92$,一个稳定极限环开始向位于(0,0)点的鞍点靠近(见图 6.14(a)). 当 μ 增加到 μ_c 时,极限环扩大并碰撞到鞍点(图 6.14(b)). 碰撞后极限环消失并留下一个同宿轨道,见图 6.14(c). 当 $\mu>\mu_c$ 时,同宿轨道的闭合环破裂,留下一个鞍点,见图 6.14(d). 这个分岔的核心是鞍点的不变流形. 只有在临界点时这个流形才形成闭合轨道,在临界点以外流形或者被极限环吸引,或者离开这个相空间区域.

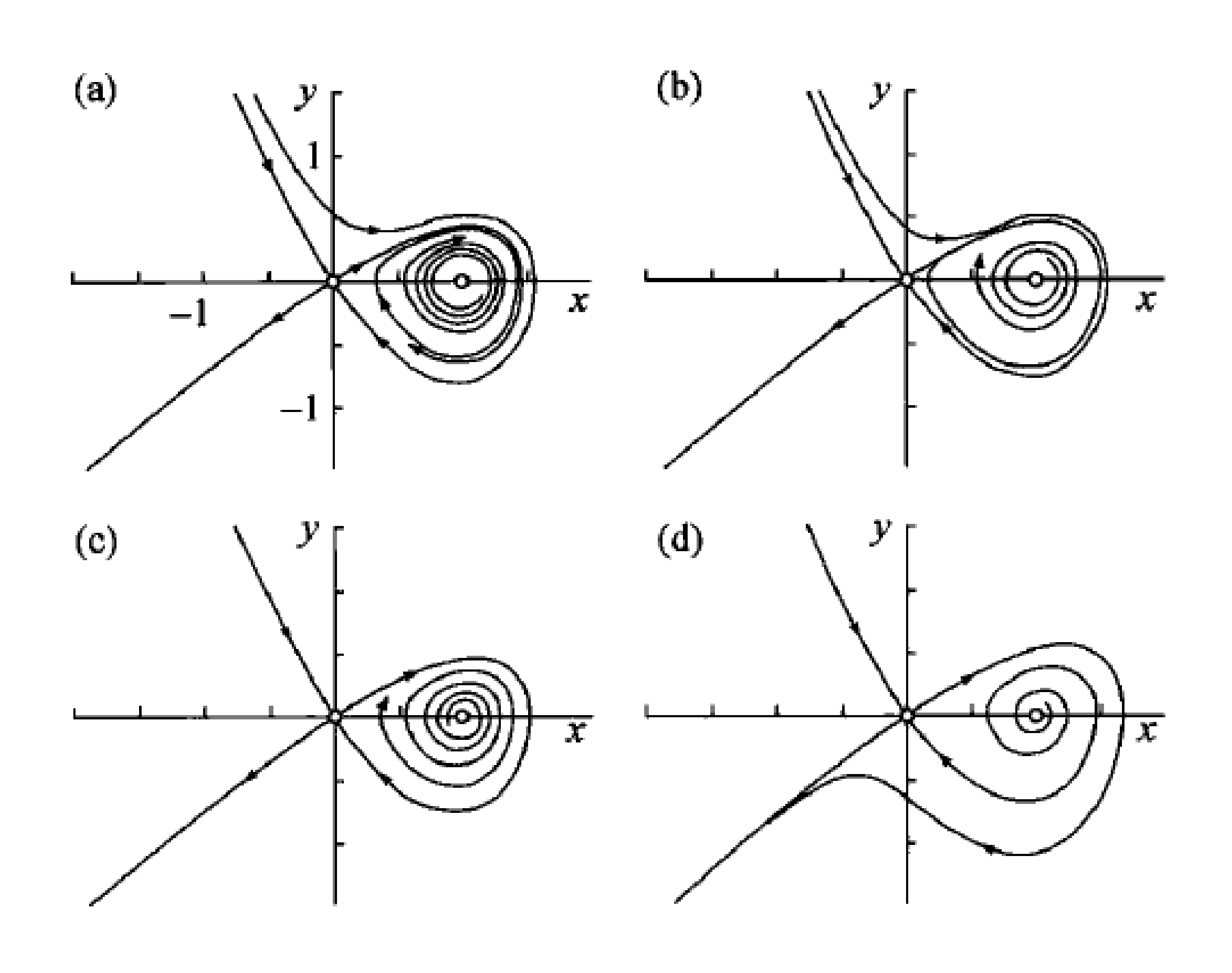


图 6.14　同宿轨道分岔产生的极限环

对于每一类上面讨论的极限环产生的形式,在临界点附近它的振幅或周期都服从一定的标度规律. 如果我们用 μ 表示系统控制参量到临界点的距离,并假设 $\mu\ll1$,这些在二维系统中极限环产生的分岔行为可以由图 6.15 总结. 除了同宿轨道分岔以外,其他的标度规律在以前各节中已经有了讨论. 对于同宿轨道的周期估计可以大致认为是轨道经过一个鞍点所需要的时间. 在鞍点附近系统的动力学行为可以近似写为: $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=\lambda_u x$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=\lambda_s y$. 现在计算轨道从 $x=\mu$

	稳定极限环振幅	稳定极限环周期
超临界霍普夫分岔	$O(\mu^{1/2})$	$O(1)$
极限环的鞍-结点分岔	$O(1)$	$O(1)$
无限周期分岔	$O(1)$	$O(\mu^{-1/2})$
同宿轨道分岔	$O(1)$	$O(\|\ln\mu\|)$

图 6.15 极限环在不同分岔点附近的动力学行为

到 $x=1$ 点所需要的时间. 其中 $\mu\ll 1$. 解上述方程第一式容易得到 $t=-\lambda_u^{-1}\ln\mu$. 所以在同宿轨道分岔附近应有 $T\sim O(|\ln\mu|)$. 这个标度规律的严格推导见参考文献[33]. 一般情况下极限环的产生都是上面讨论的分岔中的一种. 但是如果系统存在特殊的对称结构或特殊的性质，就会有一些例外. 很著名的一个例外是本章第一节讨论的范德坡方程(5.3.10). 这个方程似乎不是上表中的任何一种模型. 如果应用线性稳定性分析，可以得到 $\mu=0$ 是系统从稳定焦点到不稳定焦点的临界点，对应的特征值为 $\omega_c=\pm\mathrm{i}$，这样的相变应该属于霍普夫分岔. 但从本章第一节的分析知道极限环产生后的振幅为 $\gamma=2$，如式(6.1.15)所示. 因此它不服从 $O(\mu^{1/2})$ 的尺度规律，问题出在哪里？

仔细研究范德坡方程发现它的非线性项是 $\epsilon x^2\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$，这个非线性项正好在临界点 $\epsilon=0$ 处消失，所以在临界点范德坡方程变成一个线性方程. 这种情况是一种动力学简并态. 对于动力学简并态，通常可以经过一个非线性变量替换将这个简并态消除，令 $u^2=\epsilon x^2$，即 $u=\epsilon^{1/2}x$，代入方程(5.3.10)，得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+(u^2-\epsilon)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+u=0. \tag{6.5.4}$$

解此方程可得：$u(t,\epsilon)=2\sqrt{\epsilon}\cos(t+\phi_0)$. 极限环的振幅正比于 ϵ 的平方根，符合图 6.15 中霍普夫分岔的规律.

图 6.15 是在二维动力学系统中推导的结果. 但它可以直接推广到高于二维的动力学系统中去. 在推广过程中有两点需要引起特别注意. 第一，在高维动力学系统中存在其他产生极限环的路径，因而图 6.15 不再包含所有产生极限环的可能性；第二，在高维系统中同宿轨道的破裂经常伴随着确定性混沌的产生，而不是极限环. 讨论极限环在临界点附近的尺度规律对于了解系统的动力学行为有很大帮助. 如果在模拟或实验中发现了一个极限环，这个极限环随着控制参量的变化而改变. 在临界点时，如果知道了极限环的尺度规律就可以知道系统在相空间中存在着哪类不动点，这对猜想系统的流形图会有所帮助.

§6.6 正则方程与模式共振

从推导非线性系统的正则方程中看到，一般的处理方法是将动力学系统在其不动点附近展开成多项式，再讨论多项式型非线性方程的正则形式. 可以想象另外一种处理多项式型非线性方程的方法：假设可以经过一个非线性变量代换，使得方程的高阶项向更高阶移动. 那么不断地进行这种变量代换，就可以把方程中的高阶项移到任意的高阶去. 这样线性方程就越来越好地反映非线性方程的行为. 这种操作在一般情况下是可行的，但在一些特殊情况下会遇到困难. 下面以一个简单的例子说明这个问题. 考虑一个一维的非线性动力学系统：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Rx - x^2 + ax^3 + O(x^4). \tag{6.6.1}$$

这里设 $R \neq 0$. 现在的任务是找出一个非线性变换使得方程变为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Ry - y^2 + O(y^4). \tag{6.6.2}$$

这对于用逼近法求解原方程很有好处. 因为方程(6.6.1)的三阶项被去掉，如果我们求解二阶项以下的方程，那么解的误差变成是四阶的而不是三阶的. 令

$$y = x + bx^3 + O(x^4), \tag{6.6.3}$$

这里 b 是一个待定系数，它的目的是使方程(6.6.1)的三阶项为零. 由于 x 与 y 几乎一样，它们只在三阶项上有差别，所以这样的变换被称为近等同变换(near-identical transformation). 下面确定 b 的形式. 首先要确定 x 与 y 的关系. 可以用求解三阶代数方程的方法证明：

$$x = y + cy^3 + O(y^4). \tag{6.6.4}$$

将(6.6.3)式代入上式得 $x = x + bx^3 + c(x + bx^3)^3 + O(x^4)$，解得 $(b+c)x^3 + O(x^4) = 0$. 所以在四阶近似下 $c = -b$. 对式(6.6.3)求关于时间的导数，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 3bx^2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + O(x^4).$$

将(6.6.1)式与(6.6.4)式代入此关系，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= (1 + 3bx^2)[Rx - x^2 + ax^3] + O(x^4) \\ &= [1 + 3b(y - by^3)^2][R(y - by^3) \\ &\quad - (y - by^3)^2 + a(y - by^3)^3] + O(y^4) \\ &= Ry - y^2 + (2bR + a)y^3 + O(y^4).\end{aligned} \tag{6.6.5}$$

令 $b = -a/2R$，则方程(6.6.1)变成(6.6.2)的形式. 从推导看出这类变换的唯

一要求是 $R\neq0$. 但是在前面的分析中知道 $R=0$ 恰恰是系统的转换分岔点，所以在分岔点附近不能用以上讨论的非线性变换. 从共振的角度看上面的例子，可以得出这样一个论断，非线性项能够经过一个非线性变换而被消除的必要条件是，方程的非线性项与线性项之间不发生共振. 下面的讨论可以进一步说明这个论断.

设非线性微扰方程为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}).$$

首先用一个线性变换将上述方程对角化. 假设 $\boldsymbol{L}$ 中的特征值中没有简并态，则线性变换后得到的方程形式为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y}). \tag{6.6.6}$$

其中 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{T}$ 是对角矩阵，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{x})$. 现在试图用一个非线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z}+\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{z})$ 来去掉 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})$ 中阶数最低的非线性项，其中 $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{z})$ 是 $\boldsymbol{z}$ 的多项式，最低阶数为 2. 将此非线性变换代入(6.6.6)式，得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial\boldsymbol{z}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{\phi}). \tag{6.6.7}$$

如果 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})$ 的最低阶为 r，要求变换后的方程形式为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{z}), \tag{6.6.8}$$

其中 $\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{z})$ 的最低阶高于 r. 将此关系代入(6.6.7)式左边第二项，得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{z})+\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial\boldsymbol{z}}\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{D}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{\phi}). \tag{6.6.9}$$

如果令

$$\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{z})-\boldsymbol{D}\boldsymbol{\phi}\equiv\boldsymbol{L}_D\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{z}), \tag{6.6.10}$$

则(6.6.9)变为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{z}+\left[\boldsymbol{v}(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{\phi})-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{z})-\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial\boldsymbol{z}}\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{z})\right]. \tag{6.6.11}$$

比较(6.6.8)与(6.6.11)，得

$$\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{z})=\frac{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{\phi})-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{z})}{1+\dfrac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial\boldsymbol{z}}}. \tag{6.6.12}$$

现在考查一下 $\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{z})$ 的最低阶. $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{z})$ 的最低阶是 r，$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{z})$ 的最低阶是 2，因而 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{\phi})-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{\phi})^r-(\boldsymbol{z})^r+O(\boldsymbol{z}^{r+1})=O(\boldsymbol{z}^{r+1})$. 由于 $\partial\boldsymbol{\phi}/\partial\boldsymbol{z}$ 最低阶是 1，所以

(6.6.12)的分母为 0 阶. 我们看到经过非线性变换后，方程(6.6.8)的非线性项的阶数比变换前至少提高了一阶. 如果可以经过一连串这样的变换，就可以把原来非线性方程中的非线性项推向任意高阶的位置.

现在具体推导怎样计算 $\phi(z)$. 首先证明如果 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 与 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ 是 D 的特征值与特征向量，则 $\boldsymbol{z}^m\boldsymbol{u}_s$ 是 $\boldsymbol{L}_D$ 的特征向量. 这里 $\boldsymbol{z}^m$ 是非线性项中的一项. 它的形式为 $z_1^{m_1}z_2^{m_2}\cdots z_n^{m_n}$, $m=\sum m_i$. 首先计算 $\boldsymbol{L}_D$ 的第一部分. 注意到 $\boldsymbol{D}$ 矩阵是对角矩阵，$D_{jk}=\omega_j\delta_{jk}$，因而

$$\frac{\partial \boldsymbol{z}^m\boldsymbol{u}_s}{\partial \boldsymbol{z}}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{z}) = \sum_{j,k} D_{jk}z_k\frac{\partial}{\partial z_j}\boldsymbol{z}^m\boldsymbol{u}_s = \sum_j \omega_j m_j \boldsymbol{z}^m\boldsymbol{u}_s.$$

$\boldsymbol{L}_D$ 的第二部分为

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{z}^m\boldsymbol{u}_s) = \boldsymbol{z}^m\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}_s = \omega_s\boldsymbol{z}^m\boldsymbol{u}_s.$$

所以

$$\boldsymbol{L}_D(\boldsymbol{z}^m\boldsymbol{u}_s) = \Big(\sum_j m_j\omega_j - \omega_s\Big)\boldsymbol{z}^m\boldsymbol{u}_s. \tag{6.6.13}$$

由于算符 $\boldsymbol{L}_D$ 的特征向量组成正交系 $\boldsymbol{z}^m\boldsymbol{u}_s$，我们可以将已知的非线性函数 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{z})$ 与未知函数 $\phi(\boldsymbol{z})$ 以 $\boldsymbol{z}^m\boldsymbol{u}_s$ 为基展开：

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{z}) = \sum_{s,m} v_{m,s}\boldsymbol{z}^m\boldsymbol{u}_s, \tag{6.6.14a}$$

$$\phi(\boldsymbol{z}) = \sum_{s,m} h_{m,s}\boldsymbol{z}^m\boldsymbol{u}_s, \tag{6.6.14b}$$

因而

$$h_{m,s} = \frac{v_{m,s}}{\sum m_i\omega_i - \omega_s}. \tag{6.6.15}$$

只要上式分母不为零，就可以把 $\phi(\boldsymbol{z})$ 的各项展开系数找到.

但是，在临界点时，有些情况恰恰是分母为零的. 本节开始的例子是转换分岔出现的情况，在霍普夫分岔也会出现这种情况. 在霍普夫分岔点 $\mathrm{Re}(\omega_i)=0$，$\mathrm{Im}(\omega_i)$是一对共轭复数，所以有 $\omega_1+\omega_2=0$ 或 $\omega_1=2\omega_1+\omega_2$. 这个特征值对应于 $z_1^2z_2$ 项. 这时

$$h_{3,1} = \frac{v_{3,1}}{2\omega_1+\omega_2-\omega_1} \to \infty.$$

这种情况就是方程的线性项与非线性项之间的模式共振. 解决这类问题的唯一的办法是把这些共振项放回原方程中. 在升阶操作中把共振项挑出来，寻找

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{z} + \sum_r \omega_r(\boldsymbol{z}) + \boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{z}) \tag{6.6.16}$$

的形式的操作，使$v_1(z)$比原来的$v(z)$高一阶. 上方程右边的第二项为共振项，用这种方式能够去掉在升阶变换操作中发生共振的可能性. 对于霍普夫分岔有$z_2=z_1^*$，所以共振项为$|z|^2z$. 这正是第四节讨论霍普夫分岔中出现的非线性项. 实际上，本章讨论的所有正则方程的非线性项都是共振项，都必须挑出来.

总结上面的分析，可以得到这样一个结论：如果一个动力系统的非线性部分不和它的线性部分发生共振，则这个非线性系统可以在多项式逼近的意义上等同于一个线性系统. 如果两部分发生共振，则线性系统就不能在多项式逼近的意义上描述这个非线性系统. 这时必须把共振的非线性项从方程的非线性部分挑出来才能进行多项式逼近，而挑出的部分就是非线性动力系统正则方程的非线性部分.

第七章　斑图动力学引论

本章的目的是简单介绍研究反应扩散系统斑图动力学的一些基本理论. 首先讨论斑图动力学的基本概念,然后对反应扩散系统和在研究中常见的化学反应系统做简单介绍. 本章的最后一节介绍研究反应扩散系统的实验装置. 在本书的下半部分将以一定篇幅介绍反应扩散系统中斑图动力学的实验方法与过程. 斑图动力学的进步,尤其是在反应扩散系统中斑图动力学的研究,到目前为止在很大程度上依赖物理实验及数值模拟的推动. 从这个角度讲它是一门实验科学. 由于数值计算受到计算机容量与速度的限制,不可能研究大尺度、长时间的二维时空动力学渐近行为,所以物理实验还是研究斑图动力学的最主要的手段,也是推动该理论系统发展的根本动力. 了解一定的实验知识对于有兴趣从事这方面工作的读者来说是必要的.

§7.1　斑图动力学

斑图动力学是非线性科学领域内的一个重要分支. 作为一个横向科学,它的研究内容涉及物理学、力学、化学、数学、生物学、生态学等各个方面. 斑图动力学的研究目的是探索诸系统之间共同存在的、具有普遍指导意义的斑图形成的基本规律. 目前斑图动力学理论与实验的研究对象,主要是流体中的瑞利-贝纳尔(Rayleigh-Bénard)系统,非线性光学系统,反应扩散系统及振荡沙盘系统. 人们对前三类系统斑图形成的具体机制已经有了系统的了解,后一类还只有一些阶段性成果,没有形成统一的理论. 在现有介绍斑图动力学的专著中,大部分作者是通过分析流体力学中的瑞利-贝纳尔对流引出斑图动力学概念的. 这样做的优点是物理背景清楚,控制参量少. 本书准备通过对反应扩散系统中不同斑图形成机制的描述与分析,介绍斑图动力学的基本内容. 主要原因是作者对于这部分工作比较熟悉. 对流体系统中的斑图动力学感兴趣的读者可以阅读参考文献[4,34,35,36]. 这里有必要说明的是,不论从何种系统出发,都可以得到共同的、具有普遍指导意义的斑图动力学基本规律.

斑图(pattern)是在空间或时间上具有某种规律性的非均匀宏观结构，普遍存在于自然界.从热力学角度观察，自然界的斑图可分为两类：第一类为存在于热力学平衡态条件下的斑图，比如无机化学中的晶体结构，有机聚合物中自组织形成的斑图.第二类为离开热力学平衡态条件下产生的斑图，如天上的条状云，水面上的波浪和动物身上的花纹等.对于前一类斑图，人们对它们的形成机理已经有了比较系统、深入的了解.这类斑图的形成可以用平衡态热力学及统计物理原理解释.根据平衡态热力学规律，在给定温度与压强时，系统会自发地向吉布斯自由能最小方向，也就是热力学平衡态方向移动.一个系统的吉布斯自由能分为两部分：

$$G = H - TS,$$

这里 G,H,S 与 T 分别为系统的吉布斯自由能、自由焓、熵函数与系统的温度.当系统的温度下降时，系统中的无序度量——熵对吉布斯自由能的影响逐渐变小，这使得它能够根据能量最小原理形成某些空间有序结构.

而对于后一类斑图，由于斑图的形成总是发生在远离热力学平衡态的情况下，以上所述的热力学原理不再适用.人们需要从动力学角度对这类斑图形成的原因及规律进行探讨.最近发展起来的非线性科学的主要分支之一，斑图动力学，就是以这类斑图的形成为研究对象的科学.也是本书后半部分所要讨论的主要内容.图 7.1 给出在远离热力学平衡态条件下，不同实验系统中观察到的二维时空斑图的几个例子.其中(a)为瑞利-贝纳尔热对流斑图；(b)为反应扩散系统中的图灵斑图；(c)为流体系统中的法拉第六边形斑图；(d)为振荡沙盘系统中的六边形斑图；(e)为黏性霉菌自组织形成的螺旋波斑图；(f)为蛙类卵细胞中的钙离子螺旋波斑图.虽然不同系统所显示的斑图结构，不论在时空尺度上，还时在斑图形成的具体机制上都是各不相同的，但它们在形态上都有一定的相似性.斑图动力学就是研究此类时空结构的自组织形成、选择与演化的动力学共性.

对斑图形成及其动力学的系统实验与理论研究，起始于 20 世纪初对流体力学中热对流现象的观察.1900 年贝纳尔首次在实验中观察到两块平行导热板之间的流体，在热梯度与引力场共同作用下，自组织形成有序斑图(见图 7.1(a)).稍后瑞利从理论上推导出该系统的动力学失稳机制及斑图形成的条件.但在以后很长的一段时间内，这类自流体系统中观察到的斑图，以及它们的形成与选择，只被看成是产生于流体力学系统中的一种孤立现象.人们还没有悟出这个系统中的斑图产生对其他系统中的斑图形成有任何启示，也没有看到它们之间的内在联系.

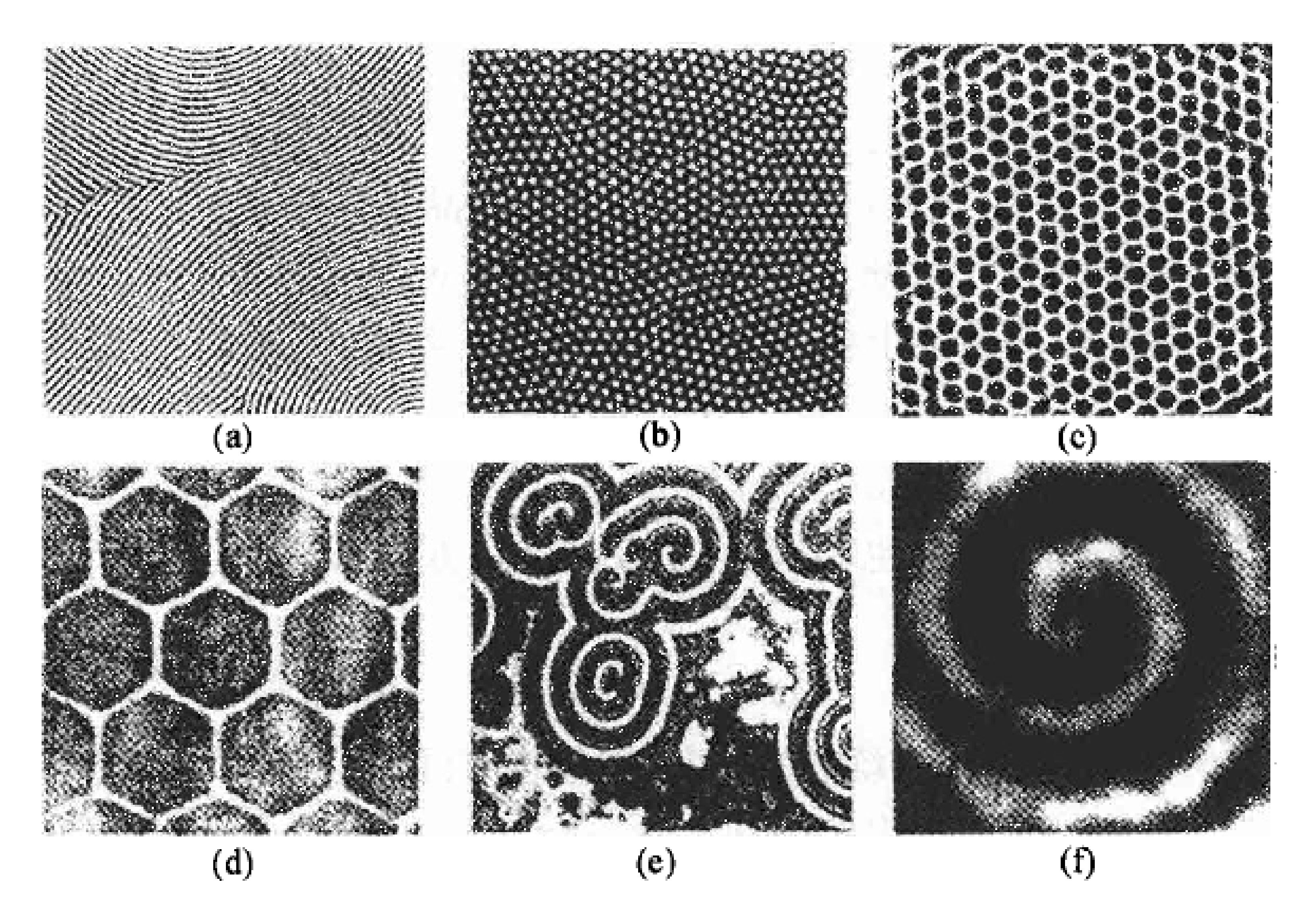


图 7.1 远离热力学平衡态条件下系统形成的各类斑图举例

斑图动力学作为一门横向学科的出现，是随着近三十年来非线性科学的发展而逐渐形成的. 从 20 世纪 70 年代开始，人们注意到在远离热力学平衡态的情况下，系统均匀定态的动力学失稳与平衡态相变之间有许多相似之处. 例如，两者在临界点附近都存在着巨涨落，即系统关联长度发散的情况；两者的动力学行为在临界点均有临界慢化现象；相变时系统都发生斑图自组织过程，并伴随着一定的时空对称性破缺，即相变后系统的时空对称性比相变前为低；系统的序参量在临界点附近有类似的临界指数规律；等等. 这些现象启发人们利用数学中的分岔理论，对远离热力学平衡系统中的临界行为作明确的动力学分类. 此后人们认识到，不管是在流体力学系统中，还是在反应扩散系统，非线性光学系统或生物及生态系统中，重要的是抓住系统在临界点附近动力学行为的共性，即系统失稳时表现出的时空对称性破缺，和由不同对称性破缺所规定的新的时空结构的自组织形成、选择与稳定性. 这就是斑图动力学研究的基本内容.

斑图动力学理论的核心是非线性动力学理论. 原因是，对于所有远离热力学平衡态的斑图形成，其动力学系统的非线性项都是起主导作用的. 如果将这些动力学系统的非线性项忽略，斑图动力学就不复存在. 对于反应扩散系统，这个条件能够满足. 一般来讲，化学反应中的动力学问题绝大多数是非线性问题. 但是，在系统临近热力学平衡态时，系统的动力学行为可以近似地用线性非平衡热力学研究. 只有在系统远离热力学平衡态时，非线性效应才有可能变成系

统动力学行为的主导因素.这种非线性行为与系统的线性扩散行为耦合,可以使系统自发地产生各种有序或无序的斑图态.这就是反应扩散系统的斑图动力学问题.

§7.2　反应扩散系统

从数学角度讲,一个反应扩散系统可以用如下偏微分方程描述:

$$\frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial t} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{C},\mu) + \boldsymbol{D}\nabla^2 \boldsymbol{C}, \tag{7.2.1}$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 为反应物浓度向量,μ 代表系统控制参量的总和,$\boldsymbol{f}$ 代表系统的动力学函数,$\boldsymbol{D}$ 是扩散系数矩阵,∇^2 为拉普拉斯算符.在分析反应扩散系统的动力学行为时,为了避免讨论由边界条件而产生的复杂效应,人们一般把系统定为无穷大.系统的初始条件一般定为空间均匀态.方程(7.2.1)不包含平衡相变(例如气相-液相相变)的动力学项,它只描述均匀相系统中的反应扩散行为.这里需要提醒读者注意的是,反应扩散系统不止局限于化学反应系统,它的应用范围覆盖了许多学科.例如,生态系统中的捕食者-猎物(predator-prey)模型[37],物理系统的气体放电模型[38],半贫瘠地区的植物生长模型[39],以及传染病的传播[40],森林火灾的蔓延[41],农业人口的迁移[42]等,都可以演化成为式(7.2.1)形式的反应扩散方程.应该说,反应扩散方程是描写自然界物质运动的基本方程之一.

由式(7.2.1)可知,反应扩散方程中的扩散项为线性项.从数学的线性微分方程理论知道,在一个线性微分方程所规定的无穷大系统中,不可能从一个空间均匀态自组织形成一个有序的、非均匀的渐近稳定结构.因此斑图的自组织形成要求方程的反应项$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{C},\mu)$是非线性的.由于反应系统的动力学行为,在热力学平衡态附近总可以近似看成是线性的,反应扩散系统中斑图自组织的第一个必要条件就是反应系统必须远离热力学平衡态.另外,可以证明支持斑图自组织的化学动力学系统必须存在一个反馈回路,如自催化或反应自阻滞过程.前者是指反应中某些反应产物会对化学反应本身进行催化,后者是指反应物对反应本身有阻滞作用.两者都使化学反应速度随时间增加.此类反应在全混釜反应器中有可能形成化学振荡,即在一定条件下反应物浓度随时间周期变化.因此在实验中研究反应扩散系统中的斑图形成首先要选择一个合适的化学振荡系统.

在反应扩散系统中的斑图动力学研究中,除了本书已经介绍的BZ振荡反应系统外,另外两个振荡反应系统在斑图动力学研究中起了重要作用.它们是

次氯酸—碘化物—丙二酸(ClO_2^-—I^-—$CH_2(COOH)_2$,简称 CIMA)反应系统与氰亚铁酸盐—碘—亚硫酸盐($Fe(CN)_6^{4-}$—I_2—HSO_3^-,简称 FIS)反应系统. 以下分别简要介绍这两个反应系统的反应机制.

CIMA 反应系统 CIMA 反应是研究图灵(Turing)斑图的最理想系统(图灵斑图将在以下两章介绍). 原因是在实验中可以利用反应指示剂(淀粉)的浓度调节反应活化物(碘离子)的表观扩散系数,这对图灵斑图的产生至关重要. 其中的道理将在下一章中具体说明. 林格尔(Lengyel)和爱普斯坦(Epstein)在 1991 年提出了一个很好的 CIMA 反应机制[43],其动力学行为与试验结果有定量上的吻合:

$$A \longrightarrow X, \quad v_1 = k_1', \quad k_1' = k_{1a}[MA][I_2]/(k_{1b} + [I_2]),$$

$$X \longrightarrow Y, \quad v_2 = k_2' X, \quad k_2' = k_2[ClO_2],$$

$$4X + Y \longrightarrow P, \quad v_3 = k_3' XY/(u + X^2), \quad k_3' = k_3[I_2].$$

$[R]$表示反应物 R 的瞬时浓度;$A=[CH_2(COOH)_2]$. $[I_2]$,$[ClO_2]$在反应中基本不变,可视为常量. $X=[I^-]$,$Y=[ClO_2^-]$在反应中有很大变化,是系统的变量. v_1, v_2, v_3 分别上三个反应的反应速率,k_i 是反应速度常数,u 是一小常量. 这些反应速率常数的数值分别为

$$k_{1a} = 2.3 \times 10^{-3}, \quad k_{1b} = 5.0 \times 10^{-5},$$

$$k_2 = 10^{-3}, k_3 = 5.6 \times 10^{-4}, u = 10^{-14}.$$

上式中三个反应都不是基元反应. 第三个反应在碘离子浓度(X)较高时是自催化反应(反应速率正比于 X),在碘离子浓度很低时是阻滞反应(反应速率反比于 X). 该模型对应的反应方程为

$$\frac{dx}{dt} = k_1' - k_2' x - \frac{4k_3' xy}{u + x^2}, \tag{7.2.2a}$$

$$\frac{dy}{dt} = k_2' x - \frac{k_3' xy}{u + x^2}. \tag{7.2.2b}$$

对该方程的均匀定态解作线性微扰分析,可以得到斑图动力学研究中最常见到的两类分岔现象:霍普夫分岔与图灵分岔. 关于图灵分岔将在下一章详细讨论.

FIS 反应系统 FIS 反应是一个双稳系统. 这里的双稳系统,是指系统对一组控制参数可能存在两种不同的均匀定态. 在一个反应扩散系统中,两种均匀稳定态可能存在于同一系统中的不同区域. 因而在它们之间的交界处就会出现一个化学波锋线(面). 在 FIS 反应系统中,这种化学波锋会在一定条件下失稳,从而导致某些时空斑图的产生. 这种现象将在第十二章中做具体分析.

FIS 反应没有可靠的简单化反应机制模型. 因而对它作解析线性微扰分析几乎是不可能的. 比较可信的、最简单的模型包括四个变量和五个准基元反应[44]:

$$A + Y \rightleftharpoons X,$$
$$X \longrightarrow Y,$$
$$2Y \longrightarrow Z,$$
$$Z + X \longrightarrow 3Y,$$
$$Z \longrightarrow P.$$

其中 $A = SO_3^{2-}$, $X = HSO_3^-$, $Y = H^+$, $Z = I_2$. 对应的反应动力学方程为:

$$\frac{dX}{dt} = k_1 AY - k_{-1} X - k_2 X - k_4 ZX, \tag{7.2.3a}$$

$$\frac{dY}{dt} = - k_1 AY + k_{-1} X + K_2 X - k_3 Y^2 + 3k_4 ZX, \tag{7.2.3b}$$

$$\frac{dZ}{dt} = k_3 Y^2 - k_4 ZX - k_5 Z, \tag{7.2.3c}$$

$$\frac{dA}{dt} = - k_1 AY + k_{-1} X. \tag{7.2.3d}$$

反应速度常数分别为:

$$k_1 = 5 \times 10^{10}, \quad k_{-1} = 8.1 \times 10^3, \quad k_2 = 0.8[IO_3^-],$$
$$k_3 = 10^6[IO_3^-], \quad k_4 = 2.3 \times 10^9, \quad k_5 = 1.2 \times 10^3[Fe(CN)_6^{4-}].$$

如果将此模型进一步简化,可以得到一个类似于格瑞-斯考特(Gray-Scott)双变量反应模型:

$$2X + Y \longrightarrow 3X,$$
$$X \longrightarrow P.$$

这个模型在研究化学反应系统中的双稳及振荡现象上起过重要作用,但与 FIS 反应的动力学行为有较大出入,在定量研究时不能将 FIS 反应简化到格瑞-斯考特模型.

§7.3　反应扩散系统的基本试验装置

研究化学反应扩散系统的斑图动力学,最关键的实验研究设备是空间开放型反应器(spatial open reactor). 从历史上看,自从 1970 年扎布亭斯基首先在皮氏培养皿中发现 BZ 反应的螺旋波斑图以来,在近二十年时间里化学系统中的斑图动力学研究成果只限于定性描述同心波(target waves)和螺旋波(spiral

waves)的暂态行为.既没有发现新型的化学斑图,也没有得出任何非平衡相变点附近系统所表现的动力学共性.根本原因在于所有这些实验都是在封闭系统(皮氏培养皿)中进行的.由于封闭系统中系统会自发向热力学平衡态移动,人们不可能研究系统的渐近态行为.皮氏培养皿的另一个缺点是系统存在除化学反应过程与扩散过程以外的其他物理因素.例如 20 世纪 80 年代初期,一些实验科学家声称在 BZ 反应中发现了图灵斑图.后来的实验证明,该类斑图产生于流体的热对流效应,属于瑞利-贝纳尔对流斑图.

设计空间开放型反应器的难点在于,在向系统提供新鲜反应物和除去反应产物(目的是使系统保持在远离热力学平衡态)的同时,既要保证系统边界条件的均匀,又要保证系统中的斑图不被干扰.在 20 世纪 80 年代末到 90 年代初,作者与法国保尔·帕斯卡(Paul Pascal)研究所及美国德克萨斯大学非线性中心的合作者共同解决了这个难点,设计出了令人满意的空间开放型反应器.该反应器可以调节系统远离热力学平衡态位置,同时保证系统内只有反应与扩散过程进行.这类反应器的问世很大地推动了化学斑图动力学的发展.如一维时空混沌的发现与研究[45],图灵斑图的发现[46,47],螺旋波渐近态行为的系统研究[48,49],以及化学时空混沌[50,51].

图 7.2 是一个空间开放型反应器的示意图.反应器的核心是一个直径为 25 mm、厚度为 0.4～1.0 mm 的圆片状反应媒体,见图 7.2(a).在 CIMA 反应实验中,反应介质为聚丙烯酰胺溶胶或聚乙烯醇溶胶.这类溶胶的平均孔径约 8 nm 左右,具有 95%的反应空间.溶胶被夹在两片直径为 25 mm、厚度为 0.4 mm 的透明多孔玻璃片之间,多孔玻璃片的平均孔径为 10 nm 左右,具有 25%的反应空间.用于 BZ 反应的反应媒体是透明多孔玻璃片.FIS 反应在聚丙烯酰胺溶胶中进行.溶胶与多孔玻璃都是化学惰性的,它们不与 CIMA,BZ,与 FIS 反应

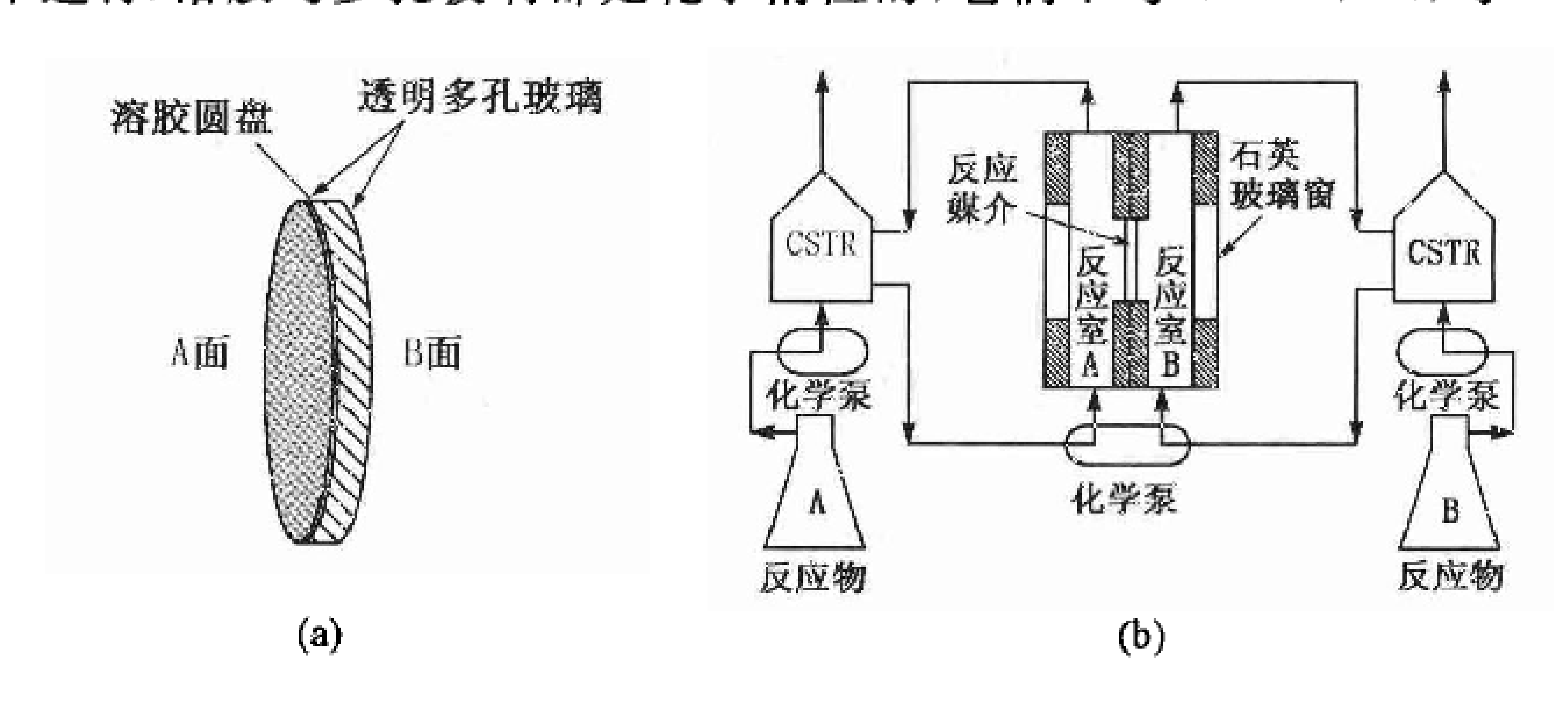


图 7.2 空间开放型反应器示意图(CSTR:全混釜反应器)

系统的反应物产生任何化学反应.溶胶或多孔玻璃的作用是阻止反应媒介物中对流过程的产生,但允许小分子反应物在媒体中自由扩散.这样就保证媒体中只存在反应扩散过程.

反应媒体的两个表面分别和一个容积为 4 mL 反应室接触,见图 7.2(b).每个室中的反应物由磁搅拌器充分混合,以保证反应物在反应媒体边界的均匀性.新鲜反应物经化学精流泵打入反应室,同时反应废物被排出室外.这样我们就可以经过对反应物浓度及流量的控制,将反应媒介的边界条件无限期地固定在远离热力学平衡的状态上.整个系统由恒温水循环系统保持恒温.系统的控制参量为新鲜反应物的浓度,系统的温度与化学泵的流量.为了保证反应媒体边界条件的稳定性,反应物在反应室的平均停留时间必须小于反应物在反应媒体中的平均停留时间.在实验中,前者的平均停留时间为 10 分钟左右,后者大约为 40 分钟.两个反应室中的反应物组分各不相同,它们在单独存在时不发生自催化反应,也没有化学振荡现象.当不同组分的反应物从反应媒体两侧经扩散进入反应媒介时,自催化反应在反应媒介中开始.在一些特定条件下各类化学斑图开始形成.

随着化学斑图的形成,系统中一些化学物质的浓度将随时间或空间的变化而变化.因此我们可以通过在系统中加入这些化学物质的指示剂,对系统的斑图动力学行为作直接的光学检测.在实验中我们通过 CCD 摄像机观测反应系统中反应物浓度的时空变化.摄像机采集的图像经图像采集器数字化并存入计算机,然后经适当的图像处理与分析得出有价值的信息.

利用空间开放型反应器对反应扩散系统中斑图形成、选择、与演化的研究,主要是探讨它在不同控制参量条件下的动力学渐近行为.在实验中一般是将其他控制参量固定,而只间歇性地改变(增加或减少)一个控制参量.每次变换控制参量一般要等待 1 小时左右,以保证系统到达渐近态.在分岔点附近由于系统出现临界慢化现象,等待时间会大大延长.例如在研究图灵斑图时,系统的弛豫时间有时达到 8 至 20 小时.

第八章　图灵斑图与斑图选择

斑图动力学将自然界观察到的有序斑图分为两大类：定态斑图与行进波. 本章通过对图灵斑图的分析，探讨定态斑图自组织形成的一种机制. 第一节定性地解释在反应扩散系统中图灵斑图的形成原因，最后一节描述研究反应扩散系统中图灵斑图的实验. 中间四节是本章的重点. 第二节介绍线性稳定性分析在偏微分方程中的应用；第三节到第五节利用对称性方法与多重尺度分析方法，推导定态斑图在临界点附近的动力学方程，即系统空间振荡的振幅方程. 并对推导出的振幅方程作线性稳定性分析. 这三节讨论的结果具有不依赖于具体物理系统的普适性. 它们不仅适用于反应扩散系统，对其他系统，如流体力学系统中的瑞利-贝纳尔对流斑图，非线性光学系统中的“印章”(imprinting)斑图，也同样适用.

§8.1　图灵斑图

1952年，被后人称为计算机理论之父的英国著名数学家图灵(Alan Turing)，在其论文《形态形成的化学基础》[52]中从数学角度表明，在反应扩散系统中，稳定均匀态会在某些条件下失稳，并自发产生空间定态斑图. 此过程被后人命名为图灵失稳(或图灵分岔)与图灵斑图. 图灵在论文中试图说明某些生物体表面所显示的图纹，如斑马身上的斑图是怎样产生的. 想象在生物胚胎发育的某个阶段，生物体内的某种被称为“成形素”(morphogen)的生物大分子与其他物质发生生物化学反应，同时在机体内随机扩散. 图灵表明，在适当的条件下，这些原来均匀分布的成形素会在空间自发地组织形成一些有规律的结构，这些成形素的不均匀分布，可能在后来的生物发育过程中引起了它们表面的各式各样的花纹形成.

图灵关于图灵分岔及图灵斑图的文章，在很长一个时期没有引起人们的重视. 原因主要有三个：第一，生物界没有发现成形素这种物质(迄今人们还没有找到成形素存在的直接证据)；第二，图灵提出的反应扩散模型中，其非均匀定态解出现负浓度值，而负浓度是不会被化学家所接受的；第三，也是最重要的原

因，是图灵斑图的形成在当时只被看成是一种可能存在的孤立现象，没有人想到它与其他系统中的斑图，如流体中所观察到的瑞利-贝纳尔热对流斑图有何共同之处. 从 20 世纪 60 年代末起，以普里高津为首的比利时布鲁塞尔热力学组开始从热力学角度向斑图动力学接近. 他们证明在远离热力学平衡态条件下，系统存在自组织行为的可能性. 这种自组织形成的斑图在以后被称为耗散结构. 普里高津的理论揭示了自然界不同系统中斑图形成的共性. 从此图灵分岔及图灵斑图的研究开始引起人们的重视.

简言之，图灵失稳是扩散引起的失稳. 这个论断看起来不合常情. 日常的生活经验告诉我们水向低处流，扩散过程会抹去一切浓度上的不均匀性. 实际上，图灵斑图产生的秘密在于，一个非线性反应动力学过程（如自催化，反应物阻滞过程）与一种特殊的扩散过程的耦合. 这个特殊的扩散过程要求系统中活化子的扩散速度远小于阻滞子的扩散速度. 下面用一个简单的模型，定性地说明图灵斑图产生的动力学机制. 假设在一个一维的反应扩散系统中存在活化子 c 与阻滞子 d，活化子的作用是使反应速率加快，阻滞子的作用是使反应速率减慢. 其中活化子的扩散速度远小于阻滞子. 在初始时系统处在均匀定态. 此时系统活化子与阻滞子的浓度分别为 c_0，d_0. 现在讨论当该系统出现一个反应速度微扰（局部区域反应速度略快于其他部分）时系统的动力学行为. 如图 8.1 所示，由于阻滞子 d 的扩散速度远大于活化子 c，阻滞子将会更快地经扩散离开微扰

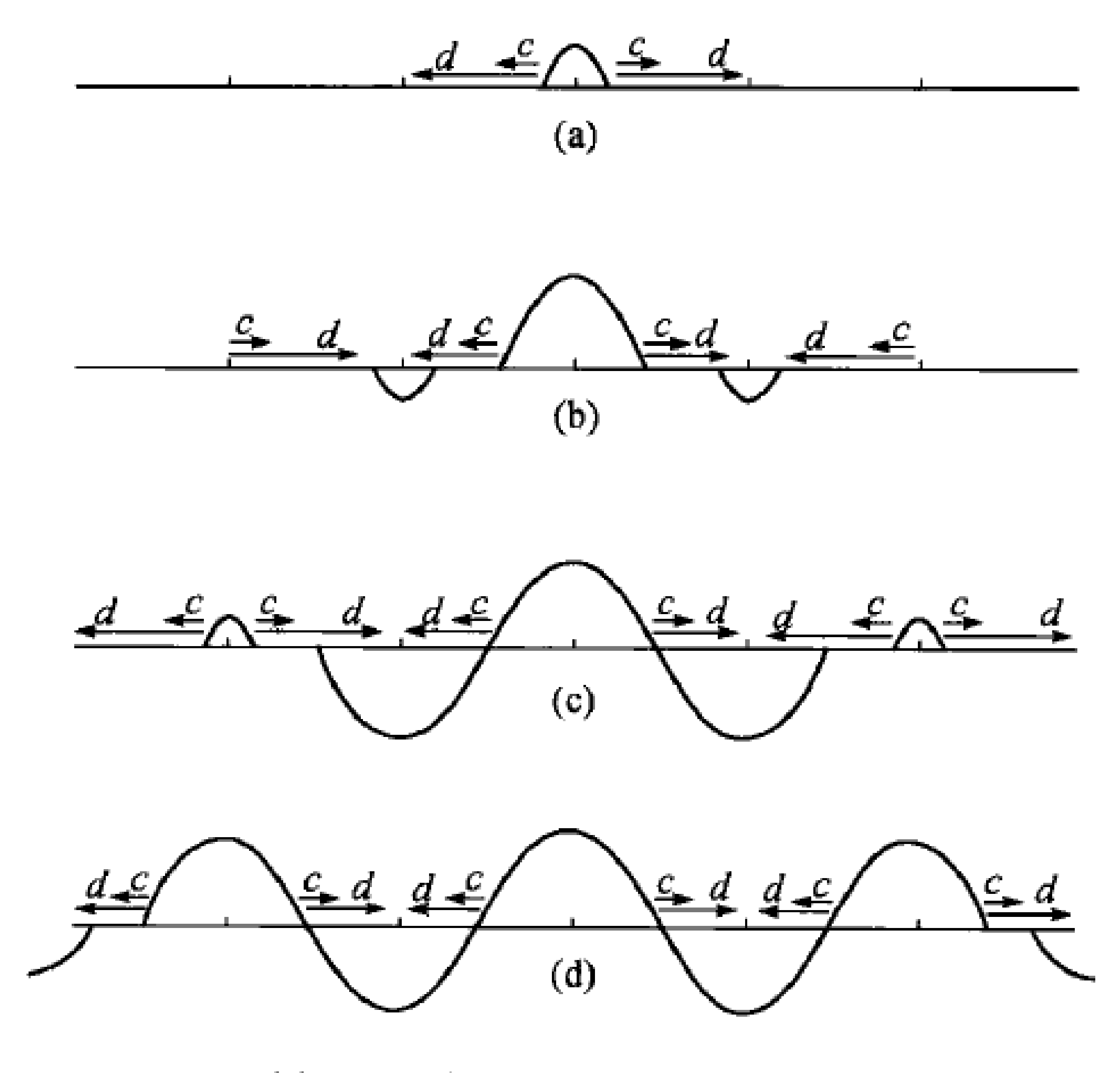


图 8.1　图灵斑图形成机制示意图

点.因而反应平衡在微扰点被破坏：c 与 d 的比例升高，反应速度加快，反应产物浓度升高，微扰被放大.与此同时，在与微扰点相邻的左右两个区域，由于扩散带来的阻滞子 d 的影响，它们的反应平衡也被破坏：c 与 d 的比例下降，因而反应速度变慢，反应产物浓度下降，结果出现了两个新的微扰点.在这些区域，系统的反应速度比均匀态时为慢，我们权且称之为负微扰，见图 8.1(b).负微扰点的出现，使得这些点和与它们邻近区域之间产生了浓度梯度，这使反应物向负微扰点扩散.这时阻滞子与活化子的扩散速度差再次起作用.更多的阻滞子流向负微扰区，使得这些区域上的反应速度进一步减慢，反应产物的浓度进一步下降，负微扰被放大.与此同时，由于向负微扰点扩散的反应物中 d 大于 c，它又打破了它邻近区域的 c 与 d 的动态平衡：在这些区域 c 与 d 比例值增大，局部反应速度加快，反应产物浓度升高，出现了新的正微扰点，见图 8.1(c).这种正负微扰在空间上交替出现并被加强，最终导致了空间周期性振荡花纹的形成，见图8.1(d).由此得到图灵斑图产生的必要条件：反应系统必须存在自催化与反应物阻滞机制；活化子的扩散速度必须要远小于阻滞子.这些条件可以在下一节中将要讨论的线性稳定性分析中定量地得到.

§8.2 线性稳定性分析

反应扩散系统中的自组织现象，产生于化学动力学过程与扩散过程之间的耦合.稳定的空间均匀态在某些远离热力学平衡态条件下失稳，经过非平衡相变，自发产生一系列时空定态或动态斑图.这种非平衡相变机理从数学角度讲可以分为两类.第一类起源于相空间中一个恒定空间均匀态解的失稳.此类非平衡相变可以通过对定态解的微扰分析，得出不同的时空对称破缺类型.微扰分析的核心是线性稳定性分析.由于微扰分析只适用于相空间中一个很小的区域，这类失稳机制被称为是局部性的.第二类失稳起因于系统的可激发性或双稳性.一般来讲这类失稳在相空间是全局性的，微扰分析不再适用.这种情况将在本书第十章以后讨论.以下以一个一般的双变量反应扩散系统为例，介绍线性稳定性分析在反应扩散类型的偏微分方程中的应用.为简单起见，设系统在空间是一维的.

双变量反应扩散方程的一般形式为

$$\frac{\partial X}{\partial t}=f(X,Y,\mu)+D_x\nabla^2X, \tag{8.2.1a}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t}=g(X,Y,\mu)+D_y\nabla^2Y. \tag{8.2.1b}$$

其中 X,Y 是系统的变量，μ 代表控制参量的集合，D 是反应物的扩散系数. 设方程存在唯一的均匀定态解(X_0,Y_0)，即 X_0,Y_0 满足

$$f(X_0,Y_0)=0,$$
$$g(X_0,Y_0)=0.$$

对此均匀定态解作一个微扰，令 $X=X_0+x,Y=Y_0+y$，代入方程(8.2.1)，对 f 与 g 在(X_0,Y_0)点作泰勒级数展开并去掉高阶项，可得线性微扰方程：

$$\frac{\partial x}{\partial t}=a_{11}x+a_{12}y+D_x\nabla^2x, \tag{8.2.2a}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}=a_{21}x+a_{22}y+D_y\nabla^2y. \tag{8.2.2b}$$

这里，

$$a_{11}=\left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X_0,Y_0},\quad a_{12}=\left.\frac{\partial f}{\partial Y}\right|_{X_0,Y_0},$$
$$a_{21}=\left.\frac{\partial g}{\partial X}\right|_{X_0,Y_0},\quad a_{22}=\left.\frac{\partial g}{\partial Y}\right|_{X_0,Y_0}.$$

将微扰变量在傅里叶空间展开. 令

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\sum_k\begin{pmatrix}c_k^1\\c_k^2\end{pmatrix}e^{\lambda_k t+ikr}, \tag{8.2.3}$$

代入微扰方程(8.2.2)可得特征方程

$$\lambda_k\begin{pmatrix}c_k^1\\c_k^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}-k^2D_x & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-k^2D_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_k^1\\c_k^2\end{pmatrix}. \tag{8.2.4}$$

解特征方程(8.2.4)可得如下色散关系：

$$\lambda_k^2-Tr_k\lambda_k+\Delta_k=0. \tag{8.2.5}$$

其中，

$$Tr_k=a_{11}+a_{22}-k^2(D_x+D_y)=Tr_0-k^2(D_x+D_y), \tag{8.2.6}$$

$$\begin{aligned}\Delta_k&=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}-k^2(a_{11}D_y+a_{22}D_x)+k^4D_xD_y\\&=\Delta_0-k^2(a_{11}D_y+a_{22}D_x)+k^4D_xD_y,\end{aligned} \tag{8.2.7}$$

解得

$$\lambda_k=\frac{Tr_k\pm\sqrt{Tr_k^2-4\Delta_k}}{2}. \tag{8.2.8}$$

与常微分方程的线性稳定性分析不同的是，对于偏微分方程，只有当所有的特征值(λ_k)的实部都小于零时，微扰量才随时间衰变为零，因而系统才是稳定的. 而当一个特征值的实部 $\mathrm{Re}(\lambda_k)>0$ 时，微扰变量将随时间不断增加，系统的均

匀定态解(X_0,Y_0)失稳. 如果该反应扩散系统是有界的,由于系统的唯一均匀定态解失稳,它一定会向某种模式的时空非均匀态转化,这种转化必然伴随着系统的某种时空对称性破缺. 设 λ_k 为系统控制参量 μ 的函数: $\lambda_k=\lambda_k(\mu)$,在临界点有: $\mathrm{Re}(\lambda_k(\mu_c))=0$, $\frac{\partial \mathrm{Re}(\lambda_k)}{\partial \mu}\neq 0$,则 $\mu=\mu_c$ 为系统的一个动力学分岔点. 一般来讲,$\mathrm{Re}(\lambda_k)=0$ 在系统的 M 维控制空间中定义了 $M-1$ 维的相变"面". 两个不同的相变面的交叉,形成一条 $M-2$ 维的共同相变"线". 这条"线"被成为控制参量的切空间(co-dimension). 在本书以后的一些章节中,将介绍系统在切空间左右的动力学行为. 在反应扩散实验中,最常见的分岔有两类: 霍普夫分岔与图灵分岔.

霍普夫分岔发生在系统的不动点从稳定焦点向不稳定焦点的转换. 它对应的非平衡相变,是系统从对空间的均匀定态转换到对时间的周期振荡态,对应的对称性破缺是时间平移对称性破缺. 当系统在临界点,即 $Tr=0$ 时,如果 $\Delta_k>0$,则系统出现霍普夫分岔. 由于 D_x,$D_y>0$,由式(8.2.6)知此时最危险的模数,即对应于 Tr_k 值最大的模数为 $k=0$(见图 8.2(a)). 也就是说对于双变量反应扩散系统,霍普夫分岔是由空间均匀微扰引起的系统失稳. 当系统在临界点($Tr_0=0$)时 $\lambda=\pm\sqrt{\Delta_0}$,代入(8.2.3)式有:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0^1 \\ c_0^2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\Delta_0}t} + \mathrm{c.\,c.}$$

从而知道系统在霍普夫分岔后开始随时间作周期振荡,振荡频率为$\sqrt{\Delta_0}$. 此时原均匀定态的时间平移对称被破坏. 在一个空间延展型系统中,一般来讲霍普夫分岔后系统形成的新态并不是空间均匀的时间振荡态,而是一个行波. 这是因为系统在空间不同区域里随时间振荡可以有不同的相位,临界点的振荡相位会经扩散产生耦合. 系统在相扩散耦合作用下会自组织形成稳定的行波,又称相

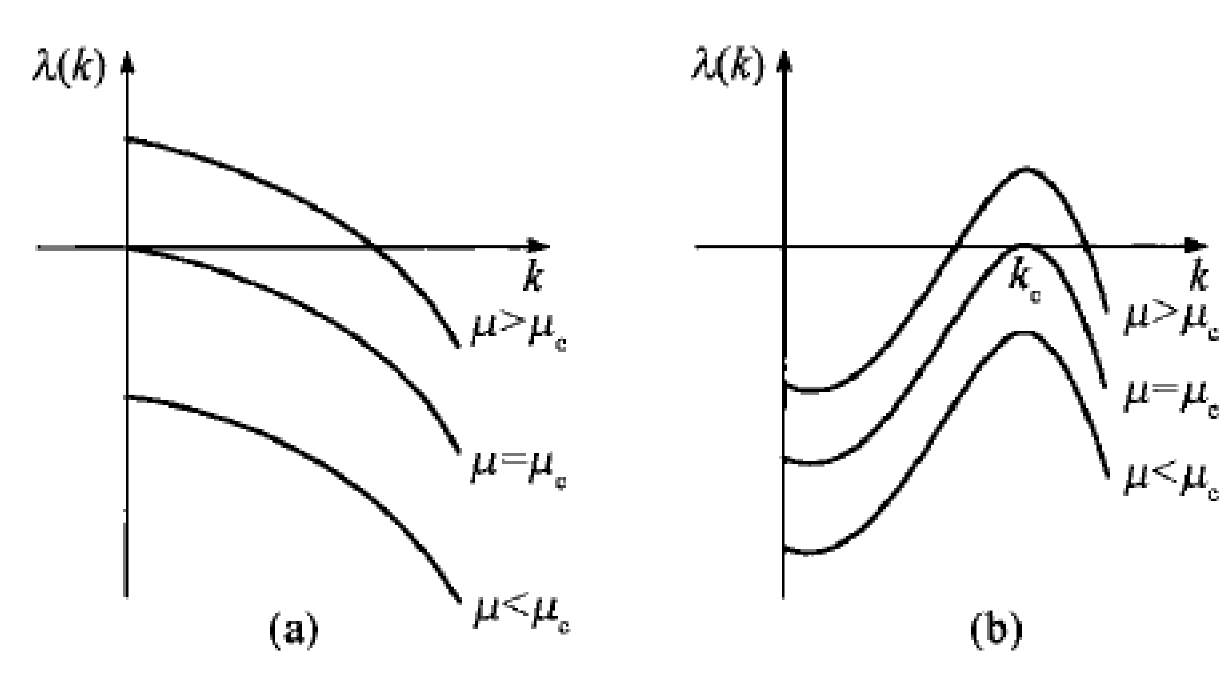


图 8.2 双变量反应扩散系统中的两种色散关系曲线

波. 它的动力学规律可以用相方程描述，有兴趣的读者可以阅读参考文献[53]. 本书第十一章将讨论相波的稳定性问题.

霍普夫分岔的必要条件是 $Tr_0=a_{11}+a_{22}=0$. 因此在分岔点附近 a_{11} 与 a_{22} 中至少有一个要大于零. 这里设 a_{11} 大于零. 从方程(8.2.2)判断，$a_{11}>0$ 意味着反应物 X 对反应系统有催化作用，即 X 的增加引起反应速度加快. 因此称 X 为活化子(activator). 同样称 Y 为阻滞子(inhibitor)，因为至少在霍普夫分岔点附近 $a_{22}<0$.

值得指出的是，对于三变量以上的反应扩散系统，Tr_k 没有式(8.2.6)那样简单的形式. 这时 $k=0$ 的模就不一定是最危险的模. 对于 $k\neq 0$ 的情况，$\mathrm{Re}(\lambda_k)=0$，$\dfrac{\partial \mathrm{Re}(\lambda_k)}{\partial \mu}\neq 0$ 定义了行波失稳的条件. 这时系统在失稳后自组织形成波数为 k，频率为$\sqrt{\Delta_k}$的行波.

图灵分岔对应的非平衡相变，是系统从均匀定态到非均匀的空间周期振荡态的转变. 相变后形成的斑图为图灵斑图，对应的对称性破缺为空间平移对称性破缺(见图 8.2(b)). 图灵分岔的必要条件如下：第一，系统对均匀微扰必须是稳定的，这要求 $\lambda_0<0$. 因而系统要满足

$$Tr_0=a_{11}+a_{22}<0, \tag{8.2.9a}$$

$$\Delta_0=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}>0. \tag{8.2.9b}$$

根据式(8.2.6)，因为 $D_x, D_y>0$，所以 $Tr_k<Tr_0<0$. 从式(8.2.8)可知特征方程(8.2.4)的其中一个特征值一定是小于零的. 因而此系统失稳的唯一途径是鞍-结点分岔. 第二，系统对于某些模数的微扰是不稳定的，会出现鞍-结点分岔. 这要求系统对某些 k 值有 $\Delta_k<0$. 对式(8.2.7)求关于 k^2 的极小值，得到系统对微扰的最危险模数值 k_c 为

$$k_c^2=\frac{a_{11}D_y+a_{22}D_x}{2D_xD_y}. \tag{8.2.10}$$

将上式代入(8.2.7)，图灵分岔的必要条件变为

$$\Delta_{kc}=\Delta_0-\frac{(a_{11}D_y+a_{22}D_x)^2}{4D_xD_y}<0. \tag{8.2.11}$$

整理，得

$$\frac{D_y}{D_x}a_{11}+a_{22}>2\sqrt{\Delta_0\frac{D_y}{D_x}}. \tag{8.2.12}$$

由此，图灵分岔的必要条件由式(8.2.9)与(8.2.12)联合规定. 由图 8.3(a)容易看出当 $D_y\leqslant D_x$ 时，这两个条件不可能同时满足. 同时满足(8.2.9)与(8.2.12)关系的唯一条件是 $D_y>D_x$(见图8.3(b))，也就是说阻滞子 Y 的扩散系数要大

于活化子 X 的扩散系数. 也正是由于这个原因,人们称图灵失稳为扩散引起的失稳(diffusion induced instability).

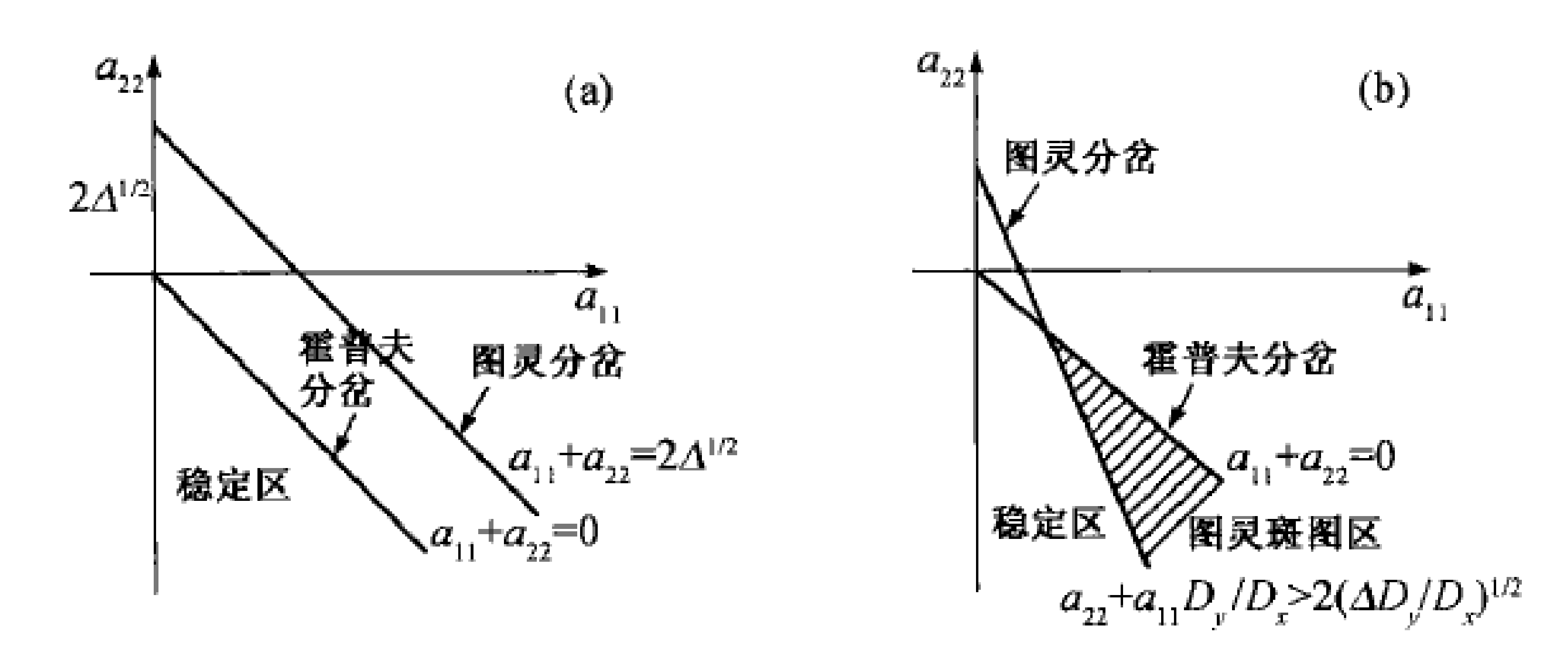


图 8.3　图灵分岔与霍普夫分岔之间的关系

图灵斑图在临界点的波数可由(8.2.10)与(8.2.11)式推出. 在临界点时有 $\Delta_{kc}=0$. 代入(8.2.11)式并利用(8.2.10)式,

$$\Delta_0=\frac{(a_{11}D_y+a_{22}D_x)^2}{4D_xD_y}=k_c^4D_xD_y,$$

或

$$k_c^2=\sqrt{\frac{\Delta_0}{D_xD_y}}. \tag{8.2.13}$$

在分析霍普夫分岔时,曾经得到系统在霍普夫分岔临界点的周期振荡频率 $f=\sqrt{\Delta_0}$,从而图灵斑图的波长可以写为

$$\lambda=\sqrt{2\pi P\bar{D}} \tag{8.2.14}$$

其中 $P=2\pi/f$ 为系统在霍普夫分岔点上随时间的振荡周期,$\lambda=2\pi/k_c$ 为图灵斑图的波长,$\bar{D}$ 为反应物扩散系数的几何平均值. 由此得到图灵斑图的一个重要特征,即图灵斑图的波长是内在的,只取决于系统内化学动力学过程与扩散过程的耦合,而与边界条件无关.

§8.3　斑图选择与振幅方程

由前一节的线性稳定性分析知道,当系统控制参量越过图灵分岔点时,系统中化学反应物的浓度开始随空间作周期性变化. 在这种情况下,一个不存在任何缺陷的理想图灵斑图,可以用 N 对振荡波矢向量 $\boldsymbol{k}_i$, $-\boldsymbol{k}_i$ 的线性叠加描述:

$$c = c_0 + \sum_{i=1}^{N} (A_i e^{k_i \cdot r} + \bar{A}_i e^{-k_i \cdot r}),\tag{8.3.1}$$

其中$|\boldsymbol{k}_i| = k_c$，但方向不同.

对于一个一维系统，$N=1$. 在高于一维的系统中，由于系统的空间旋转不变性，面临的问题将是无穷多对波矢的叠加. 因此，从线性理论出发，需要考虑无穷多种模态的组合. 这显然是不可能的，在实践中人们发现它也是没有必要的. 实验观察及计算机模拟的结果表明，系统在临界点附近的渐近态总是一些有规律的、或存在少量缺陷的空间周期振荡态斑图. 例如，在离相变点足够近的控制参量区域，二维系统只形成周期性的条状图纹($N=1$)与六边形图纹($N=3$). 任何一种非周期的模态在图灵分岔点附近都是不稳定的. 要想解释这种系统对斑图的选择行为，就要考虑系统中对应于不同波矢的各模态之间的非线性耦合. 这就是斑图选择理论所要研究的内容. 这一节首先应用中心流形理论推导出描写(8.2.1)式中振幅 A_i 方程的一般形式. 然后利用对称性分析，推导出斑图选择理论的中心内容——空间共振原则和图灵斑图振幅方程在二维系统中的具体形式.

在一般情况下，由(8.2.1)所规定的反应扩散动力学系统，在临界点附近可以以某种正态模(normal mode)为基进行分解. 每个模的振幅 A_i 就是在模空间的坐标. 每个正态模随时间的演化由振幅方程描述. 振幅方程的一般形式为

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} = s_i A_i + F_i(A_i, A_j, \cdots).\tag{8.3.2}$$

其中函数 F_i 对应于系统正态模之间的非线性耦合. 在线性阶段，我们可以将所有正态模区分成两类：线性增长率 s_i 的实部接近于零的模为慢模(slow mode)，s_i 的实部远小于零的模为快模(fast mode). 在分岔点附近，慢模是主动模(active mode)，它的线性增长率随着系统的控制参量越过临界值而由负值变为正值，对应的系统也由线性稳定的变为线性不稳定的. 而快模的线性增长率总是很大的负值，因此它的振幅会随时间很快地趋于零.

根据以前讨论的中心流形定理的概念，我们可以在中心流形上讨论系统的渐近态行为. 因而，在图灵分岔点附近，式(8.3.2)的振幅 A_i 可由振幅方程

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} = F_i(A_i, \bar{A}_i, A_j, \bar{A}_j, \cdots)\tag{8.3.3}$$

来描述，其中 F_i 是依赖于 N 对主动模的振幅的非线性函数. 顺便提及，式(8.3.3)可以描写任何一个系统在分岔点时的动力学行为. F_i 的形式与分岔类型有关，但不依赖于具体的物理过程，所以它具有普适性意义. 在临界点附近的一个小区域内，由于主动模的波矢带很窄，为了简单起见这一章只考虑满足$|\boldsymbol{k}_i| = k_c$

的主动模之间的耦合，比较复杂的情况将在下一章作详细讨论. 在作了这样的简化以后，振幅方程可以认为是空间均匀的. 它描述系统中具有波长 $\lambda=2\pi/k_c$ 的空间有序斑图的动力学行为. 该方程的具体形式可以通过对系统作对称性分析导出，它对应于热力学平衡系统中的朗道方程.

首先考虑一维系统. 在这种情况下系统在临界点附近只有一对主动模在图灵分岔时失稳. 式(8.3.1)变为

$$c=c_0+Ae^{ik_c x}+\bar{A}e^{-ik_c x}, \tag{8.3.4}$$

对应的振幅方程为

$$\frac{\partial A}{\partial t}=F(A,\bar{A}). \tag{8.3.5}$$

方程(8.3.5)的线性部分由线性稳定性分析得出，其形式可写为 $\partial_t A=\sigma A$. 此方程还可以通过控制参量 μ 到临界点 μ_c 的相对距离 $\hat{\mu}$，$\hat{\mu}=(\mu-\mu_c)/\mu_c$ 来表现. 定义 $\tau_0=\hat{\mu}/\sigma$，其中 τ_0 是系统的自然弛豫时间，这样方程(8.3.5)的线性部分变为 $\tau_0\partial_t A=\hat{\mu}A$. 为保证振幅 A 不以指数级无限增加，非线性项必须进入方程(8.3.5). 在临界点附近，可以认为式(8.3.4)中振幅 A 的绝对值很小，因而方程(8.3.5)可以在 $A=0$ 处作泰勒级数展开：

$$\begin{aligned}\tau_0\frac{\partial A}{\partial t}=&\hat{\mu}A+b\bar{A}+cA^2+d|A|^2+e\bar{A}^2+fA^3\\&+g|A|^2A+h|A|^2\bar{A}+i\bar{A}^3+O(A^4).\end{aligned} \tag{8.3.6}$$

利用对称性分析可以推导出该方程的具体形式. 对于空间周期振荡的定态斑图，如图灵斑图，振幅方程首先应该保证空间平移不变性，即在 $x\to x-x_0$ 作用下振幅方程不变. 将此平移变换代入(8.3.4)，得

$$\begin{aligned}c&=c_0+Ae^{ik_c(x-x_0)}+\bar{A}e^{-ik_c(x-x_0)}\\&=c_0+Ae^{i\phi}e^{ik_c x}+\bar{A}e^{-i\phi}e^{-ik_c x}.\end{aligned}$$

其中 $\phi=-k_c x_0$. 因此空间平移对称要求振幅方程在 $A\to Ae^{i\phi}$ 变换下保持不变. 将此变换代入式(8.3.6)，得

$$\begin{aligned}\tau_0 e^{i\phi}\frac{\partial A}{\partial t}=&e^{i\phi}\hat{\mu}A+e^{-i\phi}b\bar{A}+e^{i2\phi}cA^2+d|A|^2\\&+e^{-i2\phi}e\bar{A}^2+e^{i3\phi}fA^3+e^{i\phi}g|A|^2A\\&+e^{-i\phi}h|A|^2\bar{A}+e^{-i3\phi}i\bar{A}^3+O(A^4)\end{aligned} \tag{8.3.6a}$$

很明显，只有当方程(8.3.6)中系数 b,c,d,e,f,h,i 为 0 时，方程(8.3.6a)才能与方程(8.3.6)完全相同. 因而方程(8.3.6)被简化为

$$\tau_0\frac{\partial A}{\partial t}=\hat{\mu}A+g|A|^2A. \tag{8.3.7}$$

由于图灵斑图为定态斑图，它的振幅方程应该满足镜像对称，即在变换 $x\to -x$ 下振幅方程保持不变. 将此变换代入(8.3.4)可知，方程(8.3.7)必须在 $A\to \bar{A}$ 变换下保持不变. 这要求系数 $\hat{\mu}$，g 必须为实数. 另外，如果把振幅方程的最高项限制在三阶，为了饱和线性项的作用，系数 g 必须为负数；否则就必须引入系数为负值的更高阶项，去饱和线性项与三阶项. 我们已经介绍过前一种情况被称为超临界分岔，后一种情况被称为次临界分岔. 对于超临界分岔，一维系统图灵斑图振幅方程的表达式变为

$$\tau_0 \frac{\partial A}{\partial t} = \mu A - g|A|^2 A. \tag{8.3.8}$$

注意(8.3.7)与(8.3.8)式系数的对应关系为：$\hat{\mu}\to\mu$，$g\to -g$. 解此方程得到斑图振幅与序参量之间的关系 $A=\sqrt{\mu/g}$，这就是具有普适性意义的平方根关系.

现在考虑二维系统中图灵斑图的振幅方程. 从上面的分析知道，由于空间旋转不变性，系统可能存在无穷多个失稳模. 它的状态由式(8.3.1)描述，振幅方程的形式为(8.3.3). 出于与一维系统同样的理由，将方程(8.3.3)的右端在 $A=0$ 处做泰勒级数展开，并只保留前三阶项：

$$\tau_0 \frac{\partial A_k}{\partial t} = \mu A_k + \sum_{l,m} h_{lm} A_l A_m + \sum_{l,m,n} g_{lmn} A_l A_m A_n. \tag{8.3.9}$$

振幅方程的空间平移对称要求方程(8.3.9)在 $A_k \to A_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_k\cdot \boldsymbol{r}_0}$ 变换下保持不变，将此变换代入(8.3.9)式得

$$\begin{aligned}\tau_0 \frac{\partial A_k}{\partial t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_k\cdot\boldsymbol{r}_0} &= \mu A_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_k\cdot\boldsymbol{r}_0} + \sum_{l,m} h_{lm} A_l A_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_l+\boldsymbol{k}_m)\cdot\boldsymbol{r}_0} \\ &\quad + \sum_{l,m,n} g_{lmn} A_l A_m A_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_l+\boldsymbol{k}_m+\boldsymbol{k}_n)\cdot\boldsymbol{r}_0}.\end{aligned} \tag{8.3.10}$$

很明显，只有当非线性项 $A_l,\cdots,A_m$ 满足 $\boldsymbol{k}_k=\boldsymbol{k}_l+\cdots+\boldsymbol{k}_n$ 时方程(8.3.10)才可能还原到方程(8.3.9)，这就是空间共振关系.

在继续推导二维系统图灵斑图的振幅方程之前，首先进一步讨论一下空间共振关系的物理意义. 根据中心流形原理，振幅方程只考虑在中心流形上的模. 因此非线性项 $A_l\cdots A_n$ 在振幅方程中出现的条件是它所组成的模 $\boldsymbol{k}_l+\cdots+\boldsymbol{k}_n$ 也在中心流形上，即 $|\boldsymbol{k}_k|=|\boldsymbol{k}_l+\cdots+\boldsymbol{k}_n|=k_c$，否则这个非线性项可以被看成从动模而被绝热消除. 对于由两个模 $\{\boldsymbol{k}_1,-\boldsymbol{k}_1\}$，$\{\boldsymbol{k}_2,-\boldsymbol{k}_2\}$ 组成的二阶非线性项，只有当波矢 $\boldsymbol{k}_1$ 与 $\boldsymbol{k}_2$ 形成 120°角时，它们的组合 $\boldsymbol{k}_3=-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2$ 才在中心流形 $|\boldsymbol{k}_3|=k_c$ 上，见图 8.4. $\boldsymbol{k}_1$ 与 $\boldsymbol{k}_2$ 其他角度的组合都不形成新的不稳定模，因此被绝热消除，不出现在振幅方程中. $\boldsymbol{k}_1$，$\boldsymbol{k}_2$，$\boldsymbol{k}_3$ 互成 120°角，在实空间中表现为六边形斑图.

现在利用空间共振关系推导二维系统图灵斑图振幅方程的具体形式. 首先考虑二阶项. 如图 8.4 所示, 此时的共振关系只有一种, 即 $\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3=0$, $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_3$ 互成 120°角. 在对 A_1 的振幅方程中此非线性项是 $\bar{A}_2\bar{A}_3$.

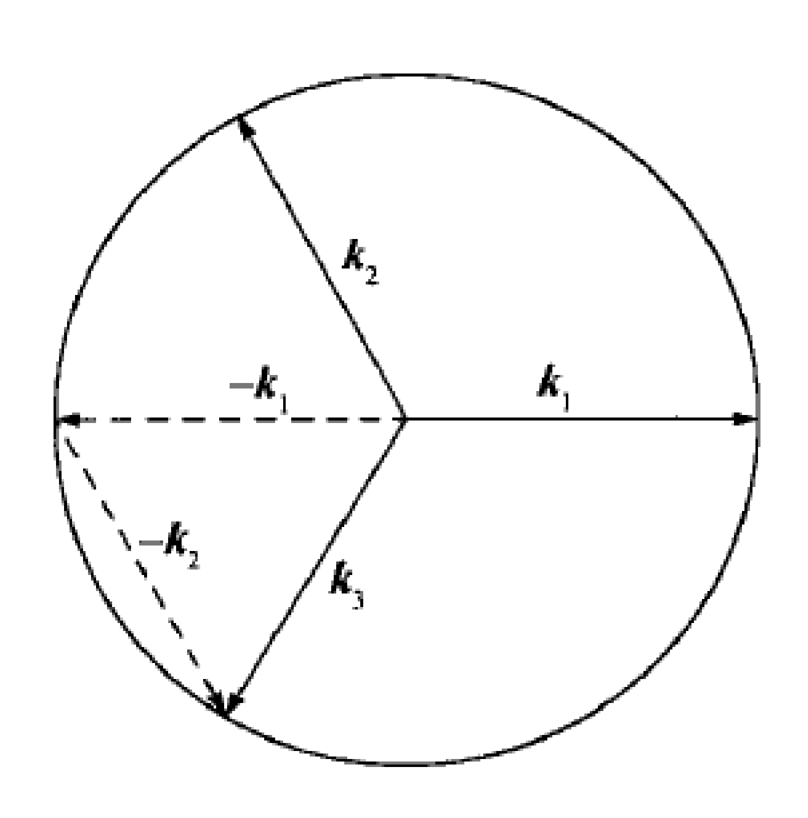


图 8.4 图灵分岔的空间共振关系

在三阶项中共存在十五种共振关系:

三种组合($\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_1$, $-\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_1$)对应于非线性项 $|\boldsymbol{A}_1|^2\boldsymbol{A}_1$;

六种组合($\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_1$, $-\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2$, $-\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_2$)对应于非线性项 $|A_2|^2A_1$;

六种组合($\boldsymbol{k}_3-\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_1$, $-\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_3$, $-\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_3$, $\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_3-\boldsymbol{k}_3$, $\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_3$)对应于非线性项 $|A_3|^2A_1$.

因此对于模 $\boldsymbol{k}_1$ 的振幅方程为

$$\tau_0\frac{\partial A_1}{\partial t}=\mu A_1+h\bar{A}_2\bar{A}_3-(g_1|A_1|^2+g_2|A_2|^2+g_3|A_3|^2)A_1. \quad (8.3.11)$$

A_2, A_3 对 A_1 的影响应该没有任何差别, 因而有 $g_2=g_3$. A_2, A_3 的方程可由变换(8.3.11)的下标得到. 另外, 在各种模之间的耦合强度与它们之间的夹角无关的情况下, 不同的三阶项之间的耦合强度应该是大致一样的. 在这种情况下, 数一数不同三阶项的共振关系数得到 $g_2\approx 2g_1$. 整个二维系统图灵斑图的振幅方程为

$$\tau_0\frac{\partial A_1}{\partial t}=\mu A_1+h\bar{A}_2\bar{A}_3-[g_1|A_1|^2+g_2(|A_2|^2+|A_3|^2)]A_1, \quad (8.3.12a)$$

$$\tau_0 \frac{\partial A_2}{\partial t} = \mu A_2 + h\bar{A}_1\bar{A}_3 - [g_1|A_2|^2 + g_2(|A_1|^2 + |A_3|^2)]A_2, \quad (8.3.12b)$$

$$\tau_0 \frac{\partial A_3}{\partial t} = \mu A_3 + h\bar{A}_1\bar{A}_2 - [g_1|A_3|^2 + g_2(|A_1|^2 + |A_2|^2)]A_3. \quad (8.3.12c)$$

与一维系统一样，该振幅方程应该在镜像变换 $A_i \to \bar{A}_i$ 下保持不变，由此得到方程(8.3.12)的所有系数都是实数.

§8.4　图灵斑图的稳定性分析

一个稳定的图灵斑图对应于方程(8.3.12)的一个稳定定态解.(8.3.12)中的每个振幅都可以分解成一个模 $\rho_i=|A_i|$ 与一个相位角 ϕ_i. 将 $A_i=\rho_i e^{i\phi_i}$ 代入方程(8.3.12)并将方程的实部与虚部分开，得到 4 个实变量的微分方程：

$$\tau_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -h\frac{\rho_1^2\rho_2^2+\rho_1^2\rho_3^2+\rho_2^2\rho_3^2}{\rho_1\rho_2\rho_3}\sin\phi, \quad (8.4.1a)$$

$$\tau_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \mu\rho_1 + h\rho_2\rho_3\cos\phi - g_1\rho_1^3 - g_2(\rho_2^2+\rho_3^2)\rho_1, \quad (8.4.1b)$$

$$\tau_0 \frac{\partial \rho_2}{\partial t} = \mu\rho_2 + h\rho_1\rho_3\cos\phi - g_1\rho_2^3 - g_2(\rho_1^2+\rho_3^2)\rho_2, \quad (8.4.1c)$$

$$\tau_0 \frac{\partial \rho_3}{\partial t} = \mu\rho_3 + h\rho_1\rho_2\cos\phi - g_1\rho_3^3 - g_2(\rho_1^2+\rho_2^2)\rho_3. \quad (8.4.1d)$$

其中 $\phi=\phi_1+\phi_2+\phi_3$.

方程(8.4.1a)表明当系统在定态时，斑图振幅相位的总和只可能取两个定态 $\phi=0$ 与 $\phi=\pi$. 因为所有的 ρ_i 都大于或等于零，由方程(8.4.1a)不难看出当 $h>0$ 时 $\phi=0$ 的解是稳定的；当 $h<0$ 时 $\phi=\pi$ 的解是稳定的. 如果只考虑对方程(8.4.1a)的稳定解，则模方程有如下形式：

$$\tau_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \mu\rho_1 + |h|\rho_2\rho_3 - g_1\rho_1^3 - g_2(\rho_2^2+\rho_3^2)\rho_1. \quad (8.4.2)$$

另两个方程可以通过变换角标得到，在这里不再列出. 由于二阶项系数 $|h|$ 总是正数，它与线性项一样是方程的失稳因素. 为保持模方程有定态解，三阶项的系数 g_1 和 g_2 必须是正值. 否则，就必须在振幅方程中引入更高阶项以使方程饱和. 我们知道后一种情况对应于次临界分岔，在这里不做进一步讨论. 另外，二阶项的系数必须足够小，最多与三阶项系数在同一量级上. 否则三阶项的饱和

作用只有在变量 ρ_i 增长到很大时才起作用. 这时更高阶项对系统的影响就不能忽略,方程(8.3.12)的合理性就不复存在了. 顺便说明,在许多系统中由于系统本身对称的限制,方程(8.4.2)中的二阶项要么是零,要么是一个很小的修正项. 例如在瑞利-贝纳尔热对流系统中,如果做布森内斯克(Boussinesq)近似,即:(1) 流体不可压缩;(2) 流体密度 ρ 是温度的线性函数;(3) 黏度系数 ν,热传导系数 κ,流体比热容 c 不随温度变化,则瑞利-贝纳尔热对流系统可以由如下方程描述:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0,$$

$$\rho_0\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right] = -\nabla P + \rho_0\nu\nabla^2\boldsymbol{v} - \rho(T)g\hat{z},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla T = \kappa\nabla^2 T.$$

这里$\boldsymbol{v}$是流速,P 是内压力. 对定态解($T=T_0+\Delta Tz/d, \boldsymbol{v}=0$)作微扰,并作无量纲处理,可得如下微扰方程:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla\Pi + \rho\nabla^2\boldsymbol{v} - RaPr\theta\hat{z},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\theta = \nabla^2\theta,$$

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \qquad Ra = \frac{g\alpha\Delta Td^3}{\nu\kappa}.$$

这里 Π 代表无量纲压强,θ 是对温度的扰动量;Pr 是 Prandlt 数;Ra 是 Rayleigh 数. 很容易验证上方程在反转变换($x\to -x, y\to -y, z\to -z$)下形式不变. 将这个不变性条件代入系统的空间周期振荡解得到,振幅方程(8.3.12)应满足 $A_i\to -A_i$ 不变性. 在这种不变性的约束下,方程(8.3.12)的二阶项系数一定是零. 对非布森内斯克流体,系统会稍微偏离 $A_i\to -A_i$ 对称,因而存在着一个小的二阶修正项. 因为二阶项的存在是系统在临界点附近选择六边形图纹的原因,在布森内斯克流体中,系统在临界点附近可能出现六边形斑图. 这个论断会在下面的分析中进一步说明. 对于一个反应扩散系统,这种 $A_i\to -A_i$ 约束一般是不存在的,所以一般情况下二阶项总存在. 在理论上,对于一个系统不可能给出二阶项系数的上限,但在实践中人们假定方程(8.3.12)在相当大的一个控制参量区域是有效的.

方程(8.4.2)具有五类定态解:

一个均匀定态解:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0; \tag{8.4.3}$$

一个条状斑图解：

$$\rho_1=\sqrt{\frac{\mu}{g_1}},\qquad \rho_2=\rho_3=0;\tag{8.4.4}$$

两个六边形斑图解：

$$\rho_1=\rho_2=\rho_3=\frac{|h|\pm\sqrt{h^2+4(g_1+2g_2)\mu}}{2(g_1+2g_2)},\tag{8.4.5}$$

其存在条件是

$$\mu>\mu_1=\frac{-h^2}{4(g_1+2g_2)};$$

一个混合结构解：

$$\rho_1=\frac{|h|}{g_2-g_1},\qquad \rho_2=\rho_3=\sqrt{\frac{\mu-g_1\rho_1^2}{g_1+g_2}},\tag{8.4.6}$$

条件是 $g_2>g_1,\mu>g_1\rho_1^2$.

在一个反应扩散系统中，没有任何理由认为模之间的耦合强度非常依赖于它们之间的夹角. 根据上节的分析，系统应有 $g_2/g_1\approx 2$. 因此下面只对 $g_2/g_1>1$ 的情形进行解的线性稳定性分析. 在 $g_2/g_1<1$ 的情况下，条状斑图将失稳并被正方形斑图取代. 这种正方形斑图在一些流体斑图中可以被观察到，但从来不出现于均匀的反应扩散系统中. 这种情况在本节结尾做一个简单的介绍. 在方程(8.4.2)的定态解(ρ_1,ρ_2,ρ_3)上加上微扰($\delta\rho_1,\delta\rho_2,\delta\rho_3$)，代入原方程并去掉高阶项，得线性微扰方程. 方程的矩阵为

$$\begin{pmatrix}\mu-3g_1\rho_1^2-g_2(\rho_2^2+\rho_3^2) & |h|\rho_3-2g_2\rho_1\rho_2 & |h|\rho_2-2g_2\rho_1\rho_3\\ |h|\rho_3-2g_2\rho_1\rho_2 & \mu-3g_1\rho_2^2-g_2(\rho_1^2+\rho_3^2) & |h|\rho_1-2g_2\rho_2\rho_3\\ |h|\rho_2-2g_2\rho_1\rho_3 & |h|\rho_1-2g_2\rho_2\rho_3 & \mu-3g_1\rho_3^2-g_2(\rho_1^2+\rho_2^2)\end{pmatrix}.\tag{8.4.7}$$

首先研究均匀态的线性稳定性. 对应的线性微扰方程为

$$\frac{\mathrm{d}(\delta\rho_i)}{\mathrm{d}t}=\mu(\delta\rho_i).\tag{8.4.8}$$

因而当 $\mu<\mu_2=0$ 时均匀态是稳定的，反之是不稳定的.

接下来研究条形图纹的线性稳定性. 将定态解(ρ,0,0)代入微扰方程(8.4.7)，得

$$\tau_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\delta\rho_1\\ \delta\rho_2\\ \delta\rho_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu-3g_1\rho^2 & 0 & 0\\ 0 & \mu-g_2\rho^2 & |h|\rho\\ 0 & |h|\rho & \mu-g_2\rho^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\rho_1\\ \delta\rho_2\\ \delta\rho_3\end{pmatrix}.\tag{8.4.9}$$

注意到 $\rho=\sqrt{\mu/g_1}$，方程(8.4.9)对应的矩阵的特征值 s_i 由下面的特征方程决定：

$$(-2\mu-s)\left(\left(\mu-\frac{g_2}{g_1}-s\right)^2-\frac{|h|^2}{g_1}\mu\right)=0, \tag{8.4.10}$$

三个特征值分别为

$$s_1=-2\mu,\quad s_{2,3}=\mu\left(1-\frac{g_2}{g_1}\right)\pm|h|\sqrt{\mu/g_1}. \tag{8.4.11}$$

由于 $\mu>0, g_2/g_1>1$，三个特征值同时小于 0 的条件为

$$\mu>\mu_3=\frac{h^2g_1}{(g_1-g_2)^2}. \tag{8.4.12}$$

在这个条件下所有对条状斑图的扰动都会随时间消失.

对于六边形斑图，将定态解 $\rho=\rho_1=\rho_2=\rho_3$ 代入微扰方程(8.4.7)得

$$\tau_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\delta\rho_1\\ \delta\rho_2\\ \delta\rho_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\rho_1\\ \delta\rho_2\\ \delta\rho_3\end{pmatrix}. \tag{8.4.13}$$

其中 $a=\mu-(3g_1+2g_2)\rho^2, b=|h|\rho-2g_2\rho^2$. 特征方程为

$$(a-s)^3-3b^2(a-s)+2b^3=0. \tag{8.4.14}$$

三个特征值分别为

$$s_1=s_2=-b+a,\quad s_3=2b+a. \tag{8.4.15}$$

将六边形定态解(8.4.5)代入(8.4.15)式可得如下结论：对于定解

$$\rho^-=\frac{|h|-\sqrt{h^2+4(g_1+2g_2)\mu}}{2(g_1+2g_2)},$$

s_3 总大于 0，对应的斑图永远不稳定；对于定解

$$\rho^+=\frac{|h|+\sqrt{h^2+4(g_1+2g_2)\mu}}{2(g_1+2g_2)},$$

当控制参量 μ 满足

$$\mu<\mu_4=\frac{2g_1+g_2}{(g_2-g_1)^2}h^2 \tag{8.4.16}$$

时所有的特征值都是负的，对应的斑图是稳定的.

最后，分析混合结构解. 将解(8.4.6)代入微扰方程(8.4.7)得：

$$\tau_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\delta\rho_1\\ \delta\rho_2\\ \delta\rho_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & b_1\\ b_1 & a_2 & b_2\\ b_1 & b_2 & a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\rho_1\\ \delta\rho_2\\ \delta\rho_3\end{pmatrix}. \tag{8.4.17}$$

其中

$$a_1 = \mu - 3g_1\rho_1^2 - 2g_2\rho_2^2 = \frac{g_1 - g_2}{g_1 + g_2}\mu - \frac{(3g_1 + g_2)g_1h^2}{(g_1 + g_2)(g_1 - g_2)^2}, \tag{8.4.18a}$$

$$a_2 = \mu - 3g_1\rho_2^2 - g_2(\rho_1^2 + \rho_2^2) = \frac{-2g_1}{g_1 + g_2}\mu + \frac{(3g_1^2 - g_2^2)h^2}{(g_1 + g_2)(g_1 - g_2)^2}, \tag{8.4.18b}$$

$$b_1 = |h|\rho_2 - 2g_2\rho_1\rho_2 = \sqrt{\frac{g_1 + g_2}{(g_2 - g_1)^2}\left[\mu - \frac{g_1h^2}{(g_2 - g_1)^2}\right]}\,|h|, \tag{8.4.18c}$$

$$b_2 = |h|\rho_1 - 2g_2\rho_2^2 = \frac{-2g_2}{g_1 + g_2}\mu + \frac{g_2^2 - g_1^2 + 2g_1g_2}{(g_2 - g_1)^2(g_1 + g_2)}h^2. \tag{8.4.18d}$$

对应的特征方程为

$$-(s - a_1)(s - a_2)^2 + 2b_1^2b_2 + 2(s - a_2)b_1^2 - (s - a_1)b_2^2 = 0,$$

或

$$[s^2 - (a_1 + a_2 + a_3)s + a_1(a_2 + b_2) - 2b_1^2](s - a_2 + b_2) = 0. \tag{8.4.19}$$

从(8.4.19)可得三个特征值的关系：$s_1 = a_2 - b_2$，$s_2 + s_3 = a_1 + a_2 + a_3$，$s_2s_3 = a_1(a_2 + b_2) - 2b_1^2$. 三个特征值同时小于 0 的必要条件为：(1)$s_1 < 0$，(2)$s_2 + s_3 < 0$，(3)$s_2s_3 > 0$. 从条件(1)可得：

$$s_1 = \frac{2(g_2 - g_1)}{g_1 + g_2}\mu + \frac{2(2g_1 + g_2)}{(g_1 + g_2)(g_1 - g_2)}h^2 < 0,$$

即

$$\mu < \frac{2g_1 + g_2}{(g_2 - g_1)^2}h^2. \tag{8.4.20}$$

从条件(3)可得：

$$s_2s_3 = \left[\mu - \frac{g_1h^2}{(g_2 - g_1)^2}\right]\left[\mu - \frac{2g_1 + g_2}{(g_2 - g_1)^2}h^2\right] > 0.$$

由于混合结构的解要求

$$\rho_2 = \frac{\mu - \dfrac{g_1h^2}{(g_2 - g_1)^2}}{(g_1 + g_2)} > 0,$$

且 $g_1 + g_2 > 0$，上述不等式变为

$$\mu > \frac{2g_1 + g_2}{(g_2 - g_1)^2}h^2. \tag{8.4.21}$$

显然(8.4.21)式与(8.4.20)式矛盾，所以混合结构图灵斑图总是不稳定的.

总结以上的分析容易看到当 $h^2 \neq 0$ 时各临界点的关系为：$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4$. 分析结果可以由一个普适性的图灵分岔图表示，见图 8.5. 当控制参量 μ 增加至临界点 $\mu_2 = 0$ 时，系统的均匀定态开始失稳，系统首先经非平衡相变形成一个六边形图纹. 如果方程(8.4.1)中的二阶项系数 $h>0$，六边形斑图为 $H_0(\phi=0)$，反之斑图为 $H_\pi(\phi=\pi)$. 在前一种情况下 H_π 总是不稳定的，在后一种情况下 H_0 总是不稳定的. 六边形斑图的出现由次临界分岔引起，也就是说系统在控制参数空间里存在这一个双稳区，$\mu_1 < \mu < \mu_2$，在双稳区中六边形斑图与均匀态都是稳定的，见图 8.5. 条形斑图的出现起源于超临界分岔，但当 $\mu < \mu_3$ 时它是不稳定的. 只有当 $\mu > \mu_3$ 时条形斑图才变得稳定. 又因为六边形斑图在 $\mu > \mu_4$ 时才会失稳，当控制参量在 $\mu_3 < \mu < \mu_4$ 区域时，系统存在着另一个双稳态，即六边形与条形斑图之间的双稳态. 当控制参量超过 μ_4 时，系统由六边形斑图跃迁至条形斑图. 当控制参量降低至 μ_3 以下时，系统由条形斑图跃迁至六边形斑图. 注意到斑图跃迁的所有临界值都正比于方程(8.4.1)中二阶项系数的平方. 当这个系数为零时，六边形结构永远是不稳定的，而条形结构对所有 $\mu > 0$ 都是稳定的. 这就是在布森内斯克流体观察不到六边形对流斑图的原因.

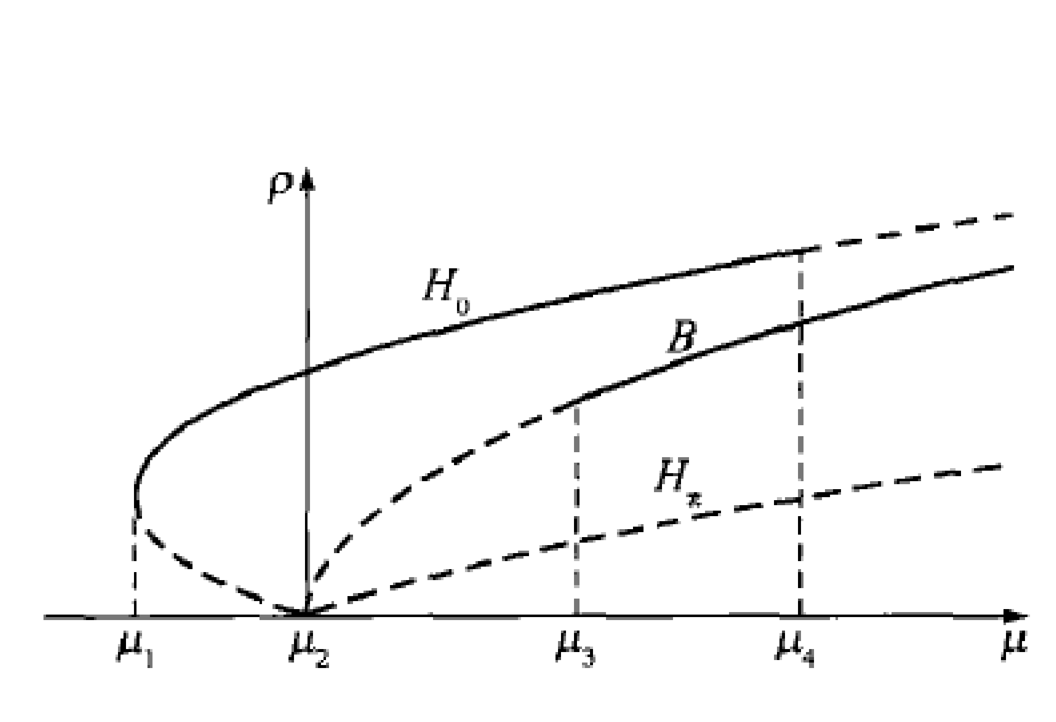


图 8.5 图灵斑图的分岔图

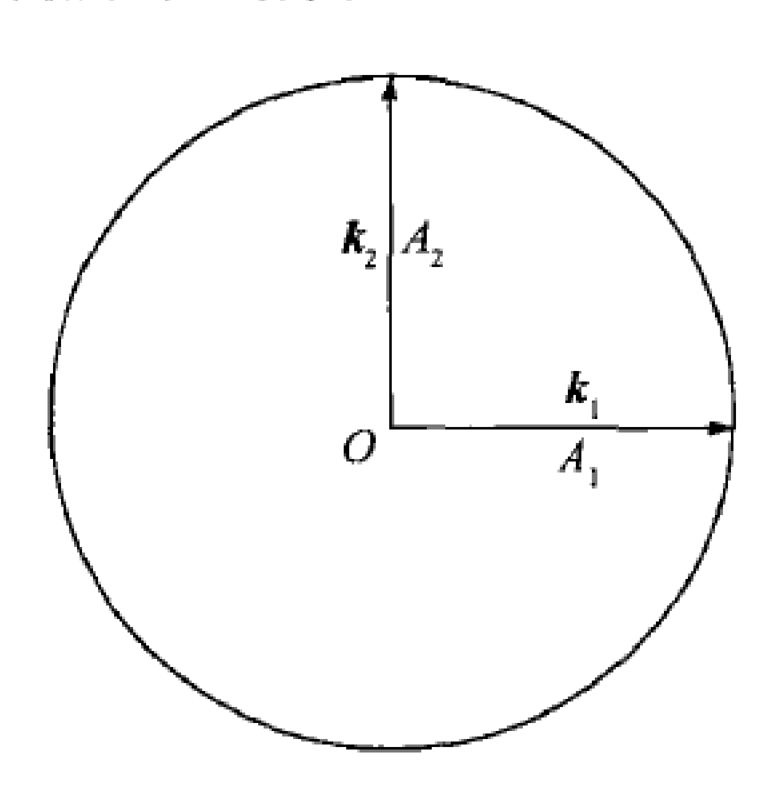


图 8.6 具有空间反转对称系统的空间共振关系

如果系统的对称性要求振幅方程二阶项系数一定为零，系统的斑图选择变成正方形斑图与条形斑图之间的选择. 图 8.6 表示振幅方程波矢之间的关系，两对波矢 $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2$ 之间相差 90°角. 利用空间共振关系不难推导出系统的振幅方程

$$\tau_0 \frac{\partial A_1}{\partial t} = \mu A_1 - (g_1 |A_1|^2 + g_2 |A_2|^2) A_1, \tag{8.4.22a}$$

$$\tau_0 \frac{\partial A_2}{\partial t} = \mu A_2 - (g_1 |A_2|^2 + g_2 |A_1|^2) A_2. \tag{8.4.22b}$$

该方程有三个定态解：

均匀定态解 $A_1=A_2=0$；

条形斑图解 $A_1=R, A_2=0$ 或 $A_2=R, A_1=0$，其中 $R=\sqrt{\mu/g_1}$；

正方形斑图解 $A_1=A_2=S$，其中 $S=\sqrt{\mu/(g_1+g_2)}$.

对这三个定态解分别作线性稳定性分析，容易得出如下结论：当 $\mu<0$ 时系统的均匀态是唯一的稳定态，当 $\mu>0$ 时均匀态失稳. $\mu>0$ 时，如果 $g_2/g_1>1$，条形斑图是稳定的，而正方形斑图是不稳定的；如果 $-1<g_2/g_1<1$ 正方形斑图是稳定的，条形斑图是不稳定的；当 $g_2/g_1<-1$ 时，方程(8.4.22)无界，必须加入更高阶项使其饱和. 图 8.7 表示系统在相空间的行为. 当 $g_2/g_1>1$ 时代表条形斑图的定态点(R)是结点，而代表正方形斑图的定态点(S)是鞍点，见图 8.7(a)；当 $-1<g_2/g_1<1$ 时代表条形斑图的定态点是鞍点，而代表正方形斑图的定态点是结点，见图 8.7(b).

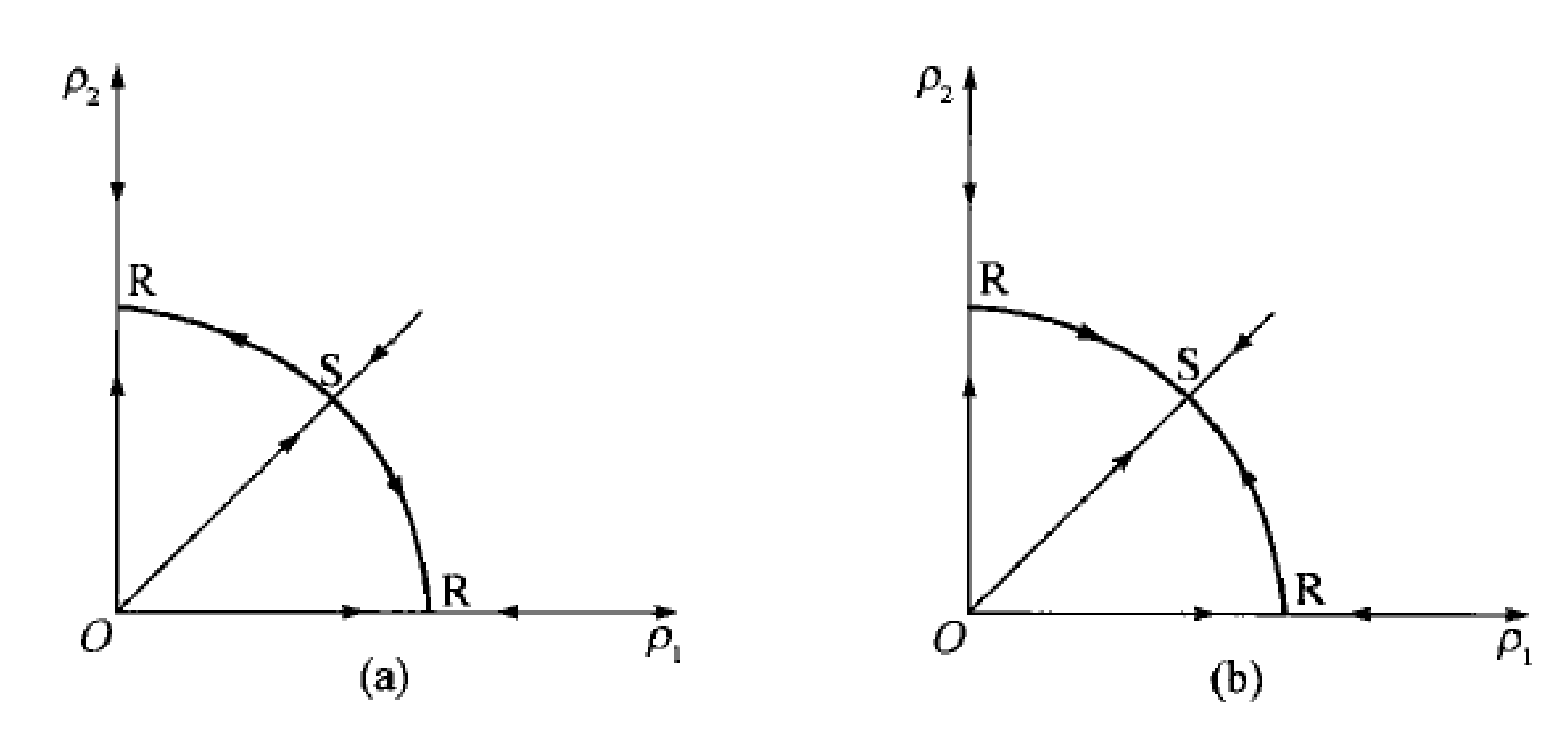


图 8.7　具有空间反转对称系统的分岔图

§8.5　振幅方程系数的推导

本章第三节介绍了利用对称性分析推导振幅方程的过程. 对称性分析方法有简洁明了的优点，但也存在着很大的局限性. 最主要的缺点是对于一个具体描述物理过程的偏微分方程，对称性分析只能给出系统分岔点附近振幅方程的一般形式，而不能确定方程中各个系数与系统各个控制参量的对应关系. 人们无法知道系统的哪些控制参量为有效控制参量，也无从估计振幅方程的有效区域. 如果研究者的目的是研究一个系统中斑图形成随控制参量变化的具体过程，对称性方法是不够的. 人们必须用多重尺度分析推导振幅方程的系数.

在反应扩散系统中对图灵斑图的实验研究是在CIMA反应中首先完成的. 但是由于CIMA反应模型(7.2.2)的均匀定态解没有解析解形式,做多重尺度分析比较困难. 这里用一个比较简单的反应扩散方程为例,介绍多重标尺度分析的方法. 这个方程由丢斐(Duffet)和波松纳德(Boissonade)首先提出[54],并被他们称为标准模型:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=u-\alpha v+\gamma uv-u^3+\nabla^2 u, \tag{8.5.1a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=u-\beta v+d\,\nabla^2 v. \tag{8.5.1b}$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma>0,d>1$,为阻滞子 v 与活化子 u 的扩散系数比. 方程三阶项的系数为负数,保证系统变量在失稳后不会因微扰而无限增长. 二阶项的存在除去了方程在 $(u,v)\to(-u,-v)$ 变换下的不变性,这种对称性在化学系统中一般不存在;当 $\gamma=0$ 时,可以回到这种对称的情形. 这个模型的优点是可以对系统的线性行为与非线性行为分别处理. 系统均匀定态解的稳定性由 α,β,γ 决定. 在失稳后系统的行为由非线性项控制.

方程(8.5.1)的均匀定态解为

$$(u_0,v_0)=(0,0),$$

$$(u_0^1,v_0^1)=\left(\frac{\gamma+\sqrt{\gamma^2+4(\beta-\alpha)\beta}}{2\beta},\frac{\gamma+\sqrt{\gamma^2+4(\beta-\alpha)\beta}}{2\beta^2}\right),$$

$$(u_0^2,v_0^2)=\left(\frac{\gamma-\sqrt{\gamma^2+4(\beta-\alpha)\beta}}{2\beta},\frac{\gamma-\sqrt{\gamma^2+4(\beta-\alpha)\beta}}{2\beta^2}\right).$$

当 γ 很小时,后两个解只有在第一个解超过图灵分岔点很远时才存在,因此在分析第一个定态解时可以忽略它们的存在. 对于解 $(u_0,v_0)=(0,0)$,由线性稳定性分析容易得出如下结果:当 $1<\beta<\alpha$ 时,系统对所有均匀微扰都是稳定的;当 $1=\beta<\alpha$ 时,系统出现霍普夫分岔;系统在 $1<\beta<\alpha$ 区域时有可能出现图灵分岔. 图灵分岔出现的条件是

$$(d-\beta)^2-4d(\alpha-\beta)=0,\qquad d>\beta.$$

若 $\alpha<\alpha_c=(\beta+d)^2/4d$,图灵斑图开始生长,斑图的临界波数由 $k_c^2=(d-\beta)/2d$ 给出.

现在用多重尺度分析推导系统(8.5.1)在图灵分岔点附近的振幅方程. 选 α 为系统的控制参量. 从第三节知道系统的斑图由三对波矢 $\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3$ 组成的模描述,三对波矢互相成120°角. 在临界点附近,方程(8.5.1)解的形式可写为

$$\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{3}\begin{bmatrix}A_i^u\\A_i^v\end{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}}+\mathrm{c.\,c.} \tag{8.5.2}$$

将方程(8.5.1)写成如下形式：

$$\frac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial t} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{N}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}). \tag{8.5.3}$$

这里 $\boldsymbol{L}$ 为线性算符，$\boldsymbol{N}$ 为非线性算符，它们分别为

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1+\nabla^2 & -\alpha \\ 1 & -\beta + d\nabla^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} \gamma uv - u^3 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8.5.4}$$

在计算中只局限于分析控制参量在相变临界点附近的行为，这样可以将控制参量 α 按如下形式展开：

$$\alpha_c - \alpha = \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \cdots, \tag{8.5.5}$$

其中 ε 为一个小量. 将变量 $\boldsymbol{c}$ 与非线性项 $\boldsymbol{N}$ 按此小参数展开：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{c} &= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \varepsilon\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + \varepsilon^2\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} + \cdots, \\ \boldsymbol{N} &= \begin{pmatrix} \gamma\varepsilon^2 u_1 v_1 + \varepsilon^3(\gamma u_2 v_1 + u_1 v_2 + u_1^3) + O(\varepsilon^4) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{8.5.6}$$

线性算符 $\boldsymbol{L}$ 可分解为

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_c + (\alpha_c - \alpha)\boldsymbol{M}. \tag{8.5.7}$$

其中

$$\boldsymbol{L}_c = \begin{pmatrix} 1+\nabla^2 & -\alpha_c \\ 1 & -\beta + d\nabla^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{8.5.8}$$

将系统的动力学时间尺度分开，令

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2} + \cdots. \tag{8.5.9}$$

在分析中认为斑图的振幅是一个慢变量，因而对应于快变量的时间微商 $\partial/\partial T_0$ 不对振幅变量 A 作用：

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial A}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial A}{\partial T_2} + \cdots. \tag{8.5.10}$$

将分解式(8.5.6)，(8.5.7)，(8.5.9)代入方程(8.5.3)并按 ε 的不同阶将原方程分开：

$$\boldsymbol{L}_c\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\boldsymbol{L}_c\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial T_1}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} - \alpha_1\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma u_1 v_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{L}_c\begin{pmatrix}u_3\\v_3\end{pmatrix}=\frac{\partial}{\partial T_1}\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial T_2}\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}-\alpha_1\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}$$
$$-\alpha_2\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\gamma u_1v_2+\gamma u_2v_1-u_1^3\\0\end{pmatrix}. \quad (8.5.11)$$

由于 $\boldsymbol{L}_c$ 是系统在临界点的线性算符，$\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}$的解对应于特征值为零的特征向量的线性组合.将三个波矢对应的模分开写：

$$\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\beta+d}{2}\\1\end{pmatrix}(W_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}}+W_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}}+W_3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_3\cdot\boldsymbol{r}})+\text{c. c.} \quad (8.5.12)$$

这里$|\boldsymbol{k}_i|=k_c$，W_i 是系统在一级微扰下模 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}}$的振幅，它的形式由高阶微扰项决定.

根据弗来得霍姆可解性条件，方程(8.5.11)右端的向量函数必须与算符 $\boldsymbol{L}_c^+$ 的零特征向量正交，此方程才有非平庸解.在此问题中计算得 $\boldsymbol{L}_c^+$ 的零特征向量为

$$\begin{pmatrix}1\\-\dfrac{\beta+d}{2d}\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}},\quad i=1,2,3. \quad (8.5.13)$$

对(8.5.11)的第二式应用弗来得霍姆可解性条件，得

$$\frac{(d-1)(\beta+d)}{2d}\frac{\partial W_1}{\partial T_1}=\alpha_1W_1+\gamma(\beta+d)\bar{W}_2\bar{W}_3, \quad (8.5.14\text{a})$$

$$\frac{(d-1)(\beta+d)}{2d}\frac{\partial W_2}{\partial T_1}=\alpha_1W_2+\gamma(\beta+d)\bar{W}_1\bar{W}_3, \quad (8.5.14\text{b})$$

$$\frac{(d-1)(\beta+d)}{2d}\frac{\partial W_3}{\partial T_1}=\alpha_1W_3+\gamma(\beta+d)\bar{W}_1\bar{W}_2. \quad (8.5.14\text{c})$$

方程组(8.5.14)是一级微扰下的振幅方程.由于它的二阶项系数大于零，振幅 W_i 发散，在这种情况下需要引入高阶微扰项使其饱和.将方程(8.5.11)的第二式解出：

$$\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U_0\\V_0\end{pmatrix}+\sum_{i=1}^{3}\begin{pmatrix}U_i\\V_i\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}}+\sum_{i=1}^{3}\begin{pmatrix}U_{ii}\\V_{ii}\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}}$$
$$+\begin{pmatrix}U_{12}\\V_{12}\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{r}}+\begin{pmatrix}U_{23}\\V_{23}\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_3)\cdot\boldsymbol{r}}$$
$$+\begin{pmatrix}U_{31}\\V_{31}\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_3-\boldsymbol{k}_1)\cdot\boldsymbol{r}}+\text{c. c.}, \quad (8.5.15)$$

其中

$$U_0=\frac{4\gamma d\beta(\beta+d)}{(\beta-d)^2}(|W_1|^2+|W_2|^2+|W_3|^2),$$

$$V_0=\frac{4\gamma d(\beta+d)}{(\beta-d)^2}(|W_1|^2+|W_2|^2+|W_3|^2),\quad U_i=\frac{\beta+d}{2}V_i,$$

$$U_{ii}=-\frac{2}{9}\frac{\gamma d(\beta-2d)(\beta+d)}{(\beta-d)^2}W_i^2,\quad V_{ii}=\frac{2}{9}\frac{\gamma d(\beta+d)}{(\beta-d)^2}W_i^2,$$

$$U_{12}=-\frac{\gamma d(\beta-3d)(\beta+d)}{2(\beta-d)^2}W_1\bar{W}_2,\quad V_{12}=\frac{\gamma d(\beta+d)}{(\beta-d)^2}W_1\bar{W}_2,$$

其余系数可由变换下标获得.将上两级微扰方程的解(8.5.13)与(8.5.15)代入(8.5.11)的第三式并再次利用弗来得霍姆可解性条件,得

$$\begin{aligned}&\frac{(d-1)(\beta+d)}{2d}\frac{\partial W_1}{\partial T_2}+\frac{(d-1)(\beta+d)}{2d}\frac{\partial V_1}{\partial T_1}\\&=\alpha_2W_1+\alpha_1V_1+\gamma(\beta+d)(\bar{V}_2\bar{W}_3+\bar{V}_3\bar{W}_2)\\&\quad-[G_1|W_1|^2+G_2(|W_2|^2+|W_3|^2)]W_1,\end{aligned}\tag{8.5.16}$$

另两个方程可以经 W 的下标变换得到.这里,

$$\left.\begin{aligned}G_1&=\frac{3(\beta+d)^3}{8}-\frac{\gamma^2d(\beta+d)(53\beta+23d)}{9(\beta-d)^2},\\G_2&=\frac{3(\beta+d)^3}{4}-\frac{2\gamma^2d(\beta+d)(3\beta+d)}{(\beta-d)^2}.\end{aligned}\right\}\tag{8.5.17}$$

振幅 $A_i=A_i^u=\frac{\beta+d}{2}A_i^v$ 为各级中 $e^{ik_i\cdot r}$ 的系数:

$$\begin{pmatrix}A_i^u\\A_i^v\end{pmatrix}=\varepsilon\begin{pmatrix}\frac{\beta+d}{2}\\1\end{pmatrix}W_i+\varepsilon^2\begin{pmatrix}\frac{\beta+d}{2}\\1\end{pmatrix}V_i+\cdots.\tag{8.5.18}$$

分别将(8.5.14),(8.5.16)乘以 ε 与 ε^2 并利用式(8.5.10),(8.5.18)将变量合并,得到如下振幅方程:

$$\begin{aligned}\tau_0\frac{\partial A_1}{\partial t}&=\frac{\alpha_c-\alpha}{\alpha_c}A_1+\frac{8d\gamma}{(\beta+d)^2}\bar{A}_2\bar{A}_3\\&\quad-[g_1|A_1|^2+g_2(|A_2|^2+|A_3|^2)]A_1,\end{aligned}\tag{8.5.19}$$

其中

$$\tau_0=\frac{2(d-1)}{\beta+d},\quad g_1=\frac{16d}{(\beta+d)^4}G_1,\quad g_2=\frac{16d}{(\beta+d)^4}G_2.$$

振幅方程中的其余两个可以经过变换 A 的下标获得.振幅方程(8.5.19)的形式与第三节中经对称性分析得到的结果(8.2.12)一致.

为了在做多重尺度分析时把问题简单化,现在来分析一下方程中各变量的相对量级.方程(8.5.19)的各项应有同样的量级,因此有 $\tau_0\partial_t A\sim\mu A\sim g|A|^2A$. 令 $A\sim\varepsilon$,得 $\tau_0\partial_t A\sim\mu A\sim g|A|^2A\sim\varepsilon^3$,因而有 $\mu\sim\varepsilon^2$,$\partial_t\sim\varepsilon^2$. 所以式(8.5.5)与(8.5.8)的变量分解方式可以改写成:$\alpha_c-\alpha=\varepsilon^2\alpha_2$,$\partial_t=\varepsilon^2\partial_{T_2}$,$c=\varepsilon c_1+\varepsilon^2c_2$. 这样的分解方法可以在做多重尺度分析时省去许多麻烦. 图 8.8 给出了方程(8.5.1)所描述的反应扩散系统中产生的几个典型的图灵斑图. 在下面要介绍的实验中,所有这些斑图都在 CIMA 反应系统中被观察到. 但有的斑图,如 H_π 是暂态的. 另一些斑图,如扭曲(zig-zag)斑图是由图灵斑图的再分岔引起的,它的动力学行为将在下一章介绍.

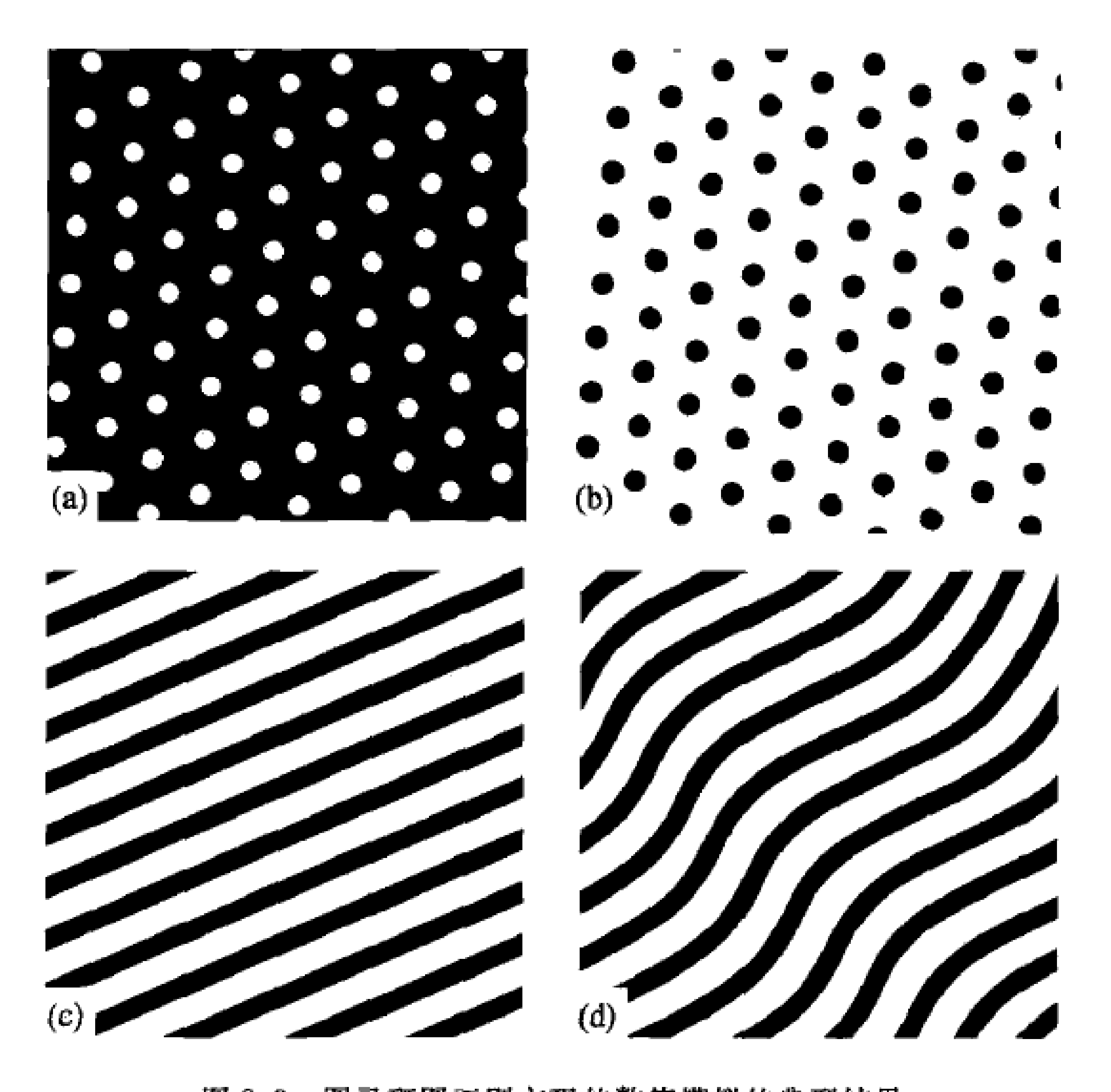


图 8.8 图灵斑图正则方程的数值模拟的典型结果

§8.6 图灵斑图的实验观察

从 20 世纪 70 年代普里高津的耗散结构理论被人们普遍接受以后,实验科学家就一直在寻找图灵斑图的实例. 这项工作的困难主要有两个. 第一个困难是要有一个开放型反应器,这个反应器必须只允许反应过程与扩散过程进行,

而不允许其他过程进行. 这种反应器只是在 20 世纪 80 年代末才被设计出. 第二个困难是要找到一个反应系统,其中活化子的扩散系数要比阻滞子小许多. 在均匀相反应系统中,各种反应物质(除 H^+ 外)的扩散速度都大致相当. 所以在一个普通的反应扩散系统中难以观察到图灵斑图. 想要将反应中活化子的扩散速度减慢,就需要用一些方法把它“粘”住. 在 CIMA 反应中,指示剂——淀粉就起到了这样的作用. 因为淀粉的分子量很大,所以它的体积比一般小分子大许多倍,甚至比溶胶的平均孔径还大. 这样,淀粉在溶胶中的扩散系数几乎为零. CIMA 反应系统中的活化子是碘离子. 而碘离子在碘分子的存在下,很容易与淀粉产生一种呈蓝色的复合物. 其反应平衡式为

$$I^- + I_2 \rightleftharpoons I_3^-,$$

$$I_3^- + S \rightleftharpoons C.$$

这里 S,C 分别表示淀粉和淀粉碘离子复合物. 由于淀粉在溶胶中几乎不扩散,这个反应的存在就把碘离子的表观扩散系数降下来了. 下面以一般形式的双变量反应系统说明淀粉对 CIMA 系统的影响. 将复合物反应

$$X + S \rightleftharpoons C$$

加入反应扩散方程(8.2.1),并认为 S 与 C 的扩散系数为 0,新的反应扩散动力学方程为

$$\frac{\partial X}{\partial t} = f(X,Y) - k_+ XS + k_- C + D_X \nabla^2 X, \qquad (8.6.1a)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = g(X,Y) + D_Y \nabla^2 Y, \qquad (8.6.1b)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = k_+ XS - k_- C. \qquad (8.6.1c)$$

将(8.6.1a)式与(8.6.1c)式相加,得

$$\frac{\partial (X+C)}{\partial t} = f(X,Y) + D_X \nabla^2 X.$$

假设复合物反应的速度很快,因而可以认为它达到动平衡: $\mathrm{d}C/\mathrm{d}t = 0, C/SX = k_+/k_- = K$. 将此关系代入(8.6.1),并认为 S 是常数(指示剂的量很大),得

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \delta f(X,Y) + \delta D_X \nabla^2 X, \qquad (8.6.2a)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = g(X,Y) + D_Y \nabla^2 Y, \qquad (8.6.2b)$$

其中 $\delta = 1/(1+SK)$. 我们看到复合物反应不但减慢了活化子 X 的有效扩散速率,也减慢了它的有效反应速度,但系统的定态并没有改变. 对(8.6.2)的定态解进行线性稳定性分析,不难得到图灵斑图产生的条件变为

$$\delta a_{11}+a_{22}<0, \tag{8.6.3}$$

$$\frac{D_Y}{D_X}a_{11}+a_{22}>2\sqrt{\Delta_0 D_Y/D_X}. \tag{8.6.4}$$

与不等式(8.2.9),(8.2.12)相比,式(8.6.3)的 a_{11} 上多了一个小系数 δ. 由于 $a_{11}>0$,$a_{22}<0$,不论 D_Y/D_X 的值如何,只要 δ 足够小,式(8.6.3)与(8.6.4)总可能同时满足. 由于式(8.6.3)对应于霍普夫分岔的稳定条件,式(8.6.4)对应于图灵分岔的失稳条件,因此复合物反应的存在不是促进了图灵分岔的发生,而是推迟了霍普夫分岔的发生. 另外,容易证明图灵斑图的临界波数 k_c 与复合物反应的存在与否无关. 值得一提的是在实验中可以调节淀粉的浓度 S 使系统同时经历霍普夫分岔与图灵分岔. 在这个切空间(co-dimension)分岔点附近,系统会出现丰富的动力学行为.

CIMA 反应的实验在第七章所描写的空间开放型反应器中进行. 当控制参量到达临界值以前,由于反应媒体两面边界的反应物不同,系统会在浓度梯度方向上产生一个稳定的化学波锋面. 这个化学波锋面将系统分成两部分:氧化态区域与还原态区域. 在氧化态区域 I_3^- 的浓度很低,溶胶呈黄色;在还原态区 I_3^- 的浓度较高,由于指示剂淀粉的存在溶胶呈蓝色. 但是,在垂直于浓度梯度的反应媒介面上,系统是均匀的. 垂直于溶胶圆盘面的化学锋的位置由控制参量决定. 在此系统中,化学波锋的位置对次氯酸盐的浓度特别敏感. 由于在溶胶中的还原态会带来蓝色的背景,这使对图灵斑图的观察无法实现. 因此在一般情况下需要调节次氯酸盐的浓度使化学波锋面的位置定在溶胶与多孔玻璃之间的边界附近. 由于多孔玻璃内没有淀粉,还原态是无色的.

当系统的控制参量超过临界值时,空间不均匀的斑图态将从均匀的化学波锋结构中自发组织形成. 在开始时,当控制参量刚刚跃过临界点到达斑图态区域不久,上百个小的黄色圆环会同时出现在蓝色的背景上. 在一小时内,这些小圆环结构会渐渐停止运动,自组织为一种如图 8.8(a)所示的蜂窝状结构. 但这种对应于 H_π 的六边形结构会很快失稳:小圆环渐渐地破裂成黄色的条状结构,最后稳定在如图 8.9(a)所示的六边形结构上,这就是上节所描述的 H_0 六边形结构. 由于六边形结构在系统的不同区域同时产生,两种取向不同的六边形斑图的边界必然会出现缺陷,这些缺陷被称为粒状边界(grain boundary),见图8.9(c). 粒状边界一般不是定态的,它随时间变动着自己的位置. 对于 CIMA 系统来说,它的移动速度大约在每天 0.2 mm 左右,由于时间太长,在现有的实验条件下不可能研究粒状边界的动力学行为.

在另外一组控制参量中,例如在较高的丙二酸($CH_2(COOH)_2$)浓度下,可以观察到稳定的条形图纹. 在这种情况下由蜂窝状小圆环破裂而产生的条状结

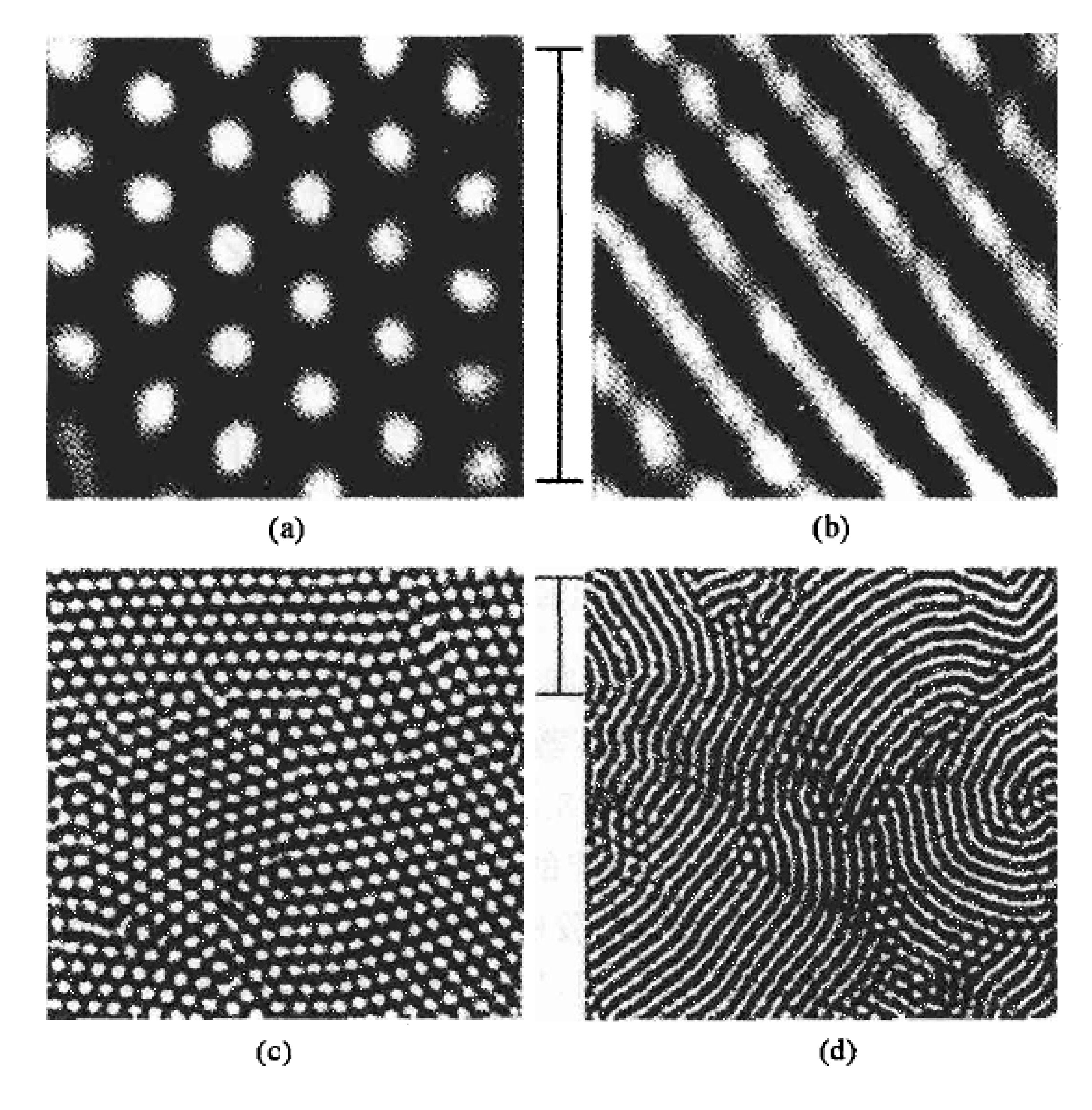


图 8.9　实验中观察到的图灵斑图的例子

构会互相连接，形成更长的条状花纹. 与一般的化学行波不同，这种条形图纹是定态的，或者说斑图的位置是不随时间变化的. 在实验中曾经对条形图纹做了连续几天的观察，除了粒状边界的缓慢移动之外，没有发现条形图纹的任何变化. 图 8.9(b)与(d)是观察到的条形图纹的两个例子.

六边形图纹与条形图纹的波长可以通过将图 8.9 作快速傅里叶变换获得. 图 8.10(a)，(b)分别是图 8.9(a)，(b)的二维傅里叶变换所得到的斑图能谱随旋转角的变化. 在图 8.9(a)中六个波矢相邻的角度为 $60^\circ \pm 1^\circ$，图 8.9(b)中的波矢之间角度为 $180^\circ \pm 1^\circ$. 波矢对应的波长随控制参量变化而改变，大约在 0.13～0.33 mm 左右. 当很大地变换控制参量时，系统原来的斑图会渐渐消失，同时具有不同波长的新的斑图会渐渐生长. 这证明图灵斑图的波长是由系统的反应扩散性质所决定，与边界条件无关. 这是图灵斑图区别于其他斑图，如流体中的对流斑图的显著特征. 这里要注意的是上述过程是在很大地变换控制参量的情况下发生的. 如果控制参量的变化幅度足够小，则可能观察到系统的二级分岔现象，这种情况将在第九章详细讨论.

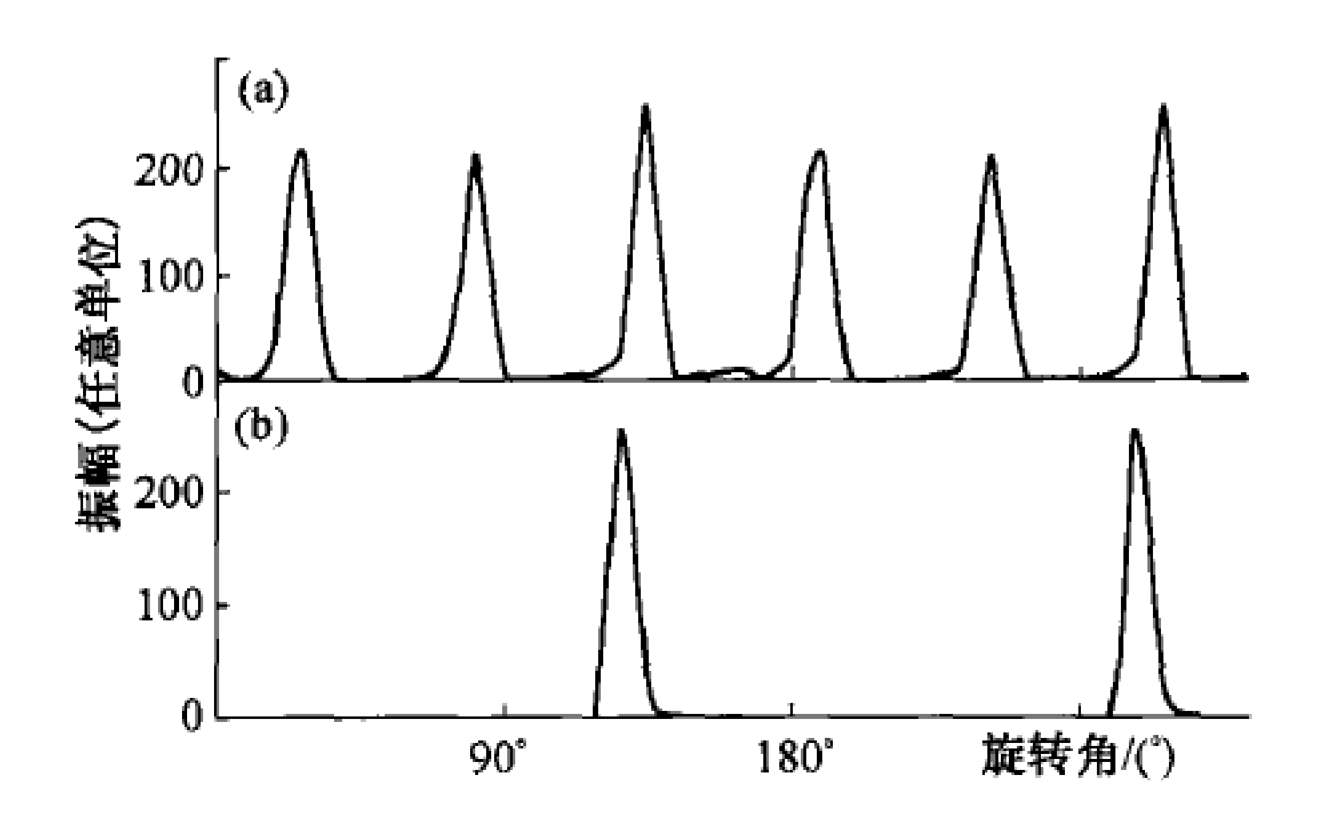


图 8.10 实验中观察到的图灵斑图的二维傅里叶变换

利用式(8.2.14)可以估计图灵斑图波长的数量级,并与实验比较.在溶胶中,经测量得到一般化学物质的扩散系数大约为$10^{-6}\,cm^2/s$. CIMA 反应的时间振荡周期在 30 s 到 60 s 左右.代入式(8.2.14),得 $\lambda=1.4\sim1.9$ mm,与实验结果大致符合.我们还可以作一个更系统的实验对关系式(8.2.14)进行检验.由于化学物质在溶胶中的扩散系数随溶胶的类型与密度的不同而改变,我们可以在不同类型、不同密度的溶胶中重复图灵斑图形成的实验以测量斑图波长随扩散系数的变化.图 8.11 给出这些测量的结果,在对数坐标中所有的测量点都大致落在一条直线上,直线的斜率为0.5 ± 0.01,符合式(8.2.14)关于波长与扩散系数的平方根关系.将图 8.11 得到的截矩值代入式(8.2.14)得到 CIMA 系统中霍普夫分岔上的临界振荡周期为 50 s 左右,与全混釜所得到的 30 s 到 60 s 的数值一致.这个实验进一步证实了 CIMA 系统所观察到的斑图是图灵斑图.

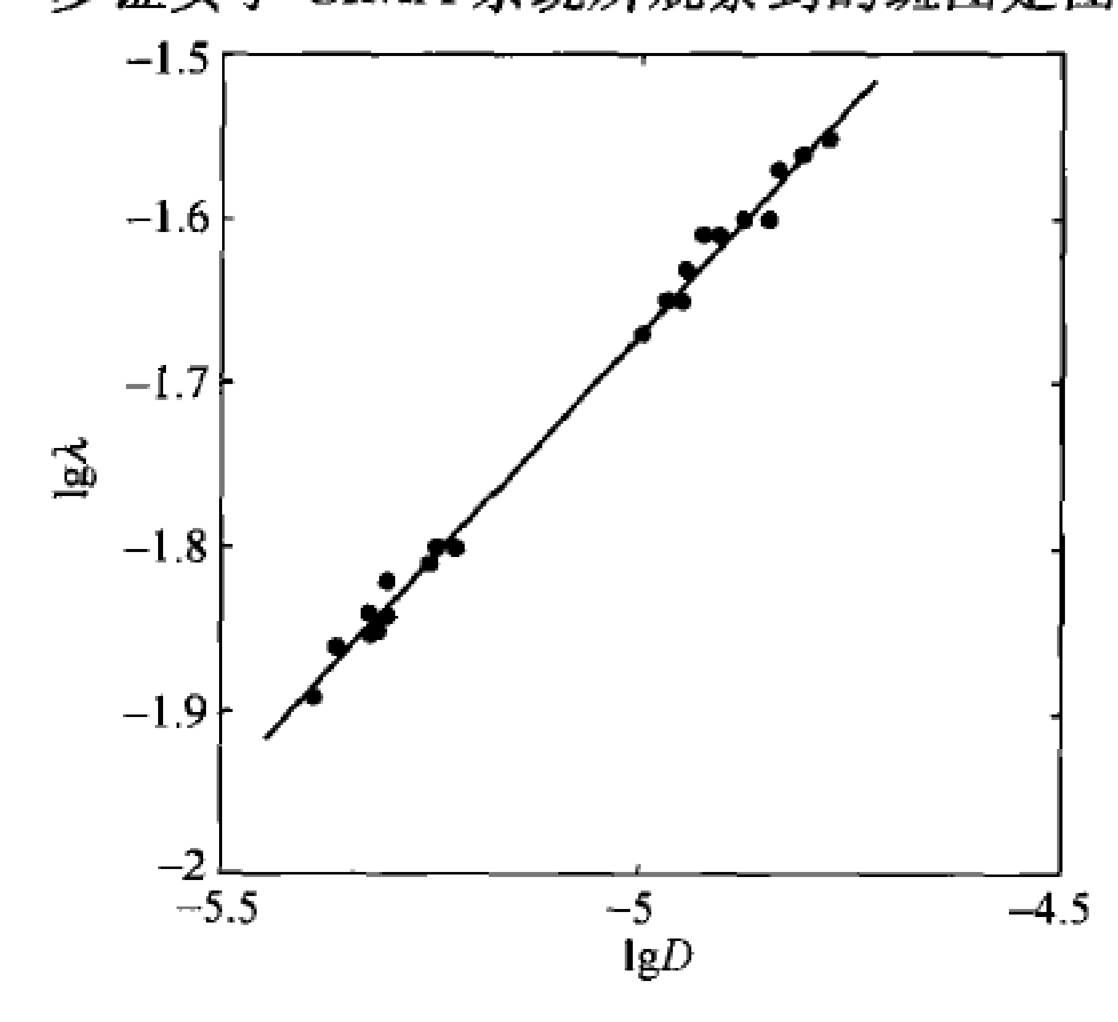


图 8.11 图灵斑图的波长随控制参量的变化

图 8.12 表示 CIMA 系统中图灵斑图的非平衡相变图，控制变量为丙二酸浓度. 当丙二酸的进口浓度降低至 39.6 mmol/L 时，均匀定态开始失稳，六边形斑图态开始极缓慢地生成. 在临界点附近，斑图的形成需要 30 小时左右时间，而在远离临界点，斑图要3 小时左右就可形成. 这就是普适性的临界慢化现象. 在实验中，用精度为 0.1 mmol/L 的丙二酸浓度在均匀态与六边形斑图态之间扫描的结果没有发现滞后回线现象. 这看起来与第四节中的理论预测不符(见图 8.5). 用 CIMA 反应模型做数值模拟发现，以丙二酸做控制参量，滞后回线的宽度只有约0.01 mmol/L，比实验精度小 10 倍. 这解释了在实验中为何观察不到滞后回线的原因. 当丙二酸浓度越过临界点继续下降时，六边形斑图的振幅随之上升. 但如果丙二酸浓度降到第二个临界点(31 mmol/L)，六边形图纹开始失稳，系统由六边形斑图态跃迁至条形斑图态. 从图 8.12 看到丙二酸浓度在 29～31 mmol/L 的范围内系统存在着一个滞后回线，这时系统是双稳的. 在相变点的一个较窄区域(用虚线表示)，系统不但是双稳的，而且两种斑图态是可以共存的. 这种现象被称为别针效应(pinning effect)[55]. 图 8.13 给出实验中观察到的两个共存图形的例子. 继续降低丙二酸的浓度会遇到第三个相变点，这时条形图纹开始失稳，系统由条形斑图态重新回到六边形斑图态. 这个相变区也存在着一定宽度的滞后回线，在临界点存在别针效应，见图 8.12. 这种六边形的回转(re-entry)现象不能用上三节推导出的振幅方程来解释. 但在对

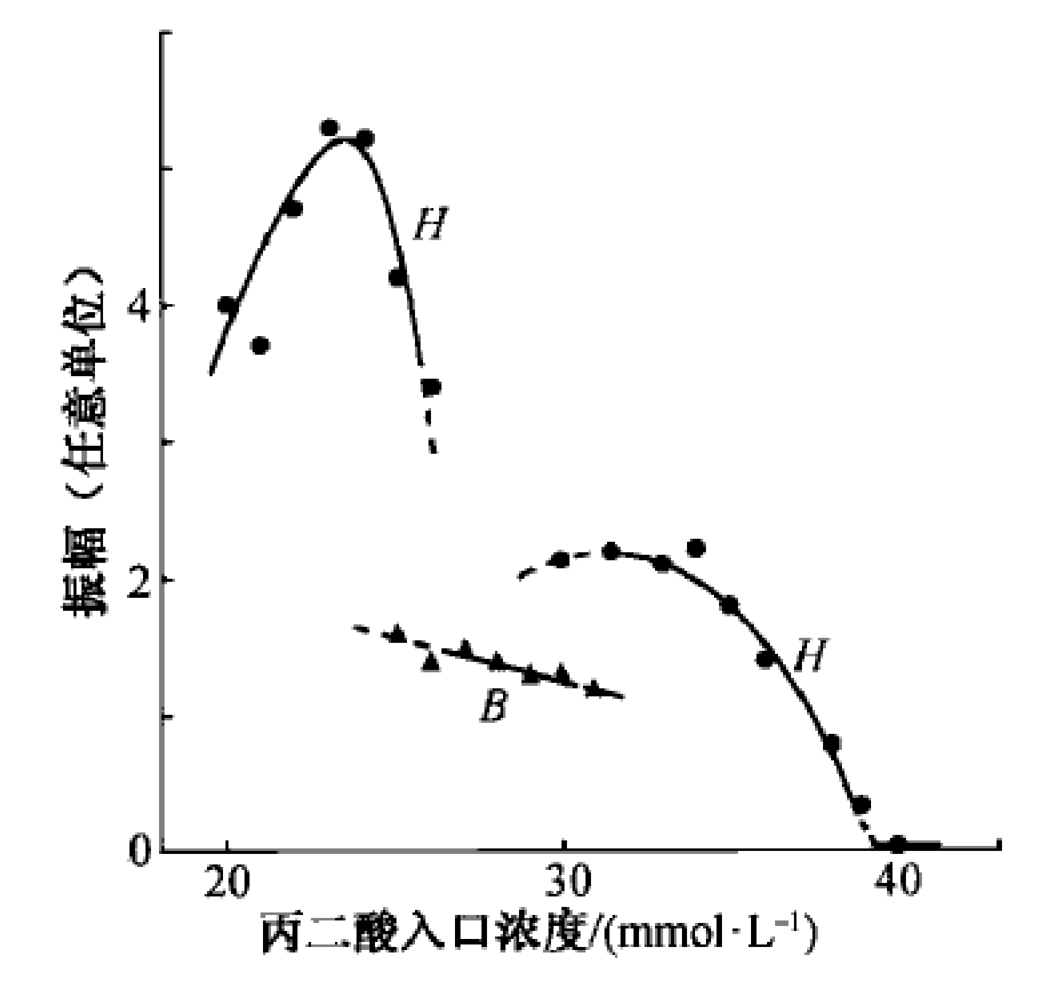


图 8.12 图灵斑图的分岔图

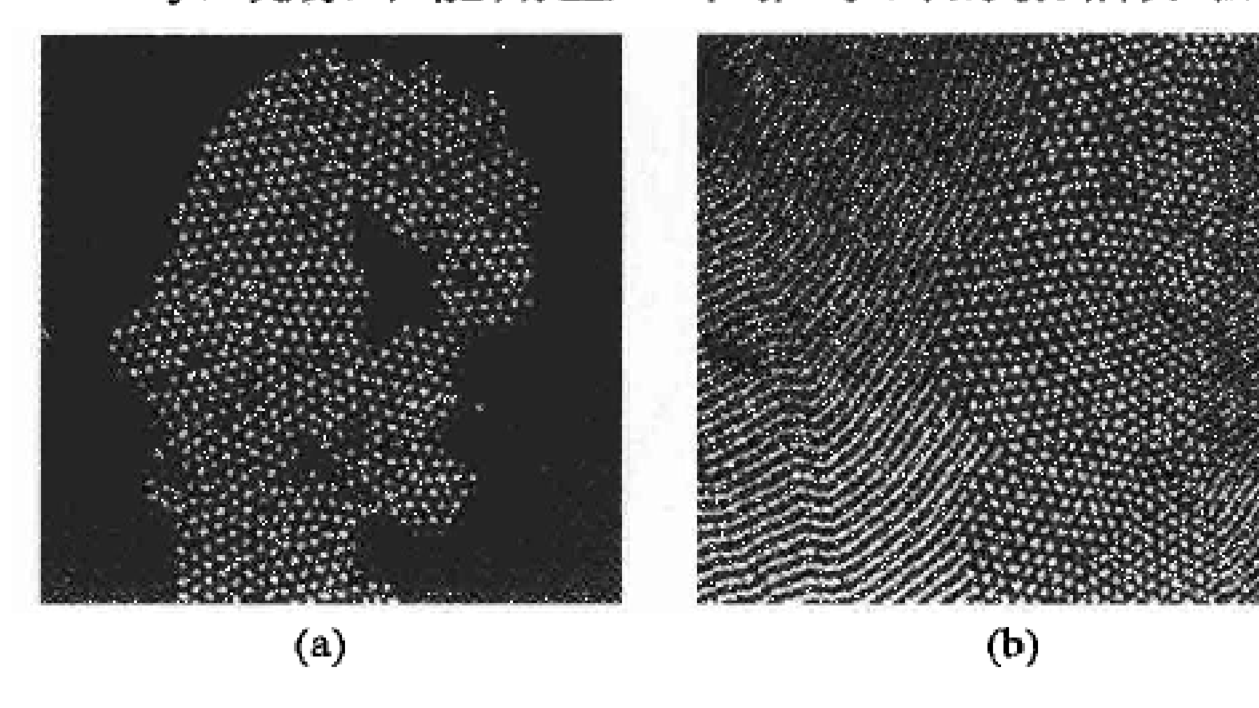


图 8.13 实验中观察到的别针效应

CIMA 反应系统作数值模拟时，发现这种六边形斑图回转现象的确存在. 在远离图灵分岔点时，系统中一些原来的从动模会逐渐变为主动模，这时推导振幅方程时就不能再把这些模绝热消除，而要求把它们包括在方程中. 其中一种均匀态模，计为 0($|\boldsymbol{k}|=0$)，变成主动模时使 A_1 的振幅方程多了另一个三阶项 $A_0\bar{A}_1\bar{A}_2$，该项满足共振关系 $\boldsymbol{k}_1=-\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_3+0$($\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3$ 互为 120°角). 正是由于这个多出来的三阶项，使得六边形图纹重新稳定. 这就是相图8.12 中六边形斑图回转的原因. 由此可以得到一个有意思的推论：在具有镜像对称的系统中(该系统在图灵分岔点附近的振幅方程二阶项系数为零)，当系统远离图灵分岔点时我们有可能观察到六边形斑图. 这个推论目前在布森内斯克流体的瑞利-贝纳尔对流中还没有被发现.

最后值得一提的是，在对图灵斑图的研究中曾有三个理论组，比利时布鲁塞尔组，法国波尔多组，美国波士顿 Brandeis 组提出三个不同的反应模型：布鲁塞尔子(Brusselator)，史南肯(Schnackenberg)模型，及式(7. 2. 2)的 CIMA 反应模型与图灵斑图的实验比较. 三个模型在分岔点附近所得到的非平衡相变行为都与图 8. 5 一致. 这些研究结果显示了斑图动力学的普遍意义. 它提示人们在研究非线性系统的动力学共性时，不必拘泥于过细地分析一个具体的物理系统. 实践证明，在研究中往往越是简单的系统，揭示的非线性动力学规律越具有普遍意义.

第九章　图灵斑图的二级分岔

第八章从不同途径推导出了图灵斑图的振幅方程在临界点附近的一般形式. 本章讨论当控制参量逐渐离开临界点时,系统斑图态随控制参量的变化. 一般来讲,图灵分岔后系统形成的斑图会随控制参量的变化而失稳,从而导致新的斑图态的产生. 这种失稳被称为图灵斑图的高级分岔. 正是由于这类二级或更高级的动力学分岔现象,使得自然界能够自组织形成种类繁多的斑图,而不是在一级分岔中遇到的那么几种. 本章的第一节推导描述条形斑图二级分岔的动力学方程,振幅的包络方程. 第二节利用第一节推导出的包络方程,分析条形斑图的两个常见的二级分岔,爱克豪斯失稳与扭曲失稳. 随后两节讨论更一般形式的包络方程,并用它研究菱形斑图的产生与失稳. 最后展望一下图灵斑图的实验研究方向.

§9.1　NWS 方程

图灵斑图振幅方程的一般形式,即方程(8.3.12),只适用于系统在临界点附近的一个非常小的控制区域. 严格说来,它只在系统处在临界点位置时,即控制参量 $\mu=\mu_c$ 时才是正确的. 这时只有 $|\boldsymbol{k}_i|=k_c$ 的模是主动模,其余的模在理论上都可能进行绝热消除. 但是,如图 8.2(b)所示,当系统越过临界点以后,失稳的模在傅里叶空间就不再是一维空间中的一个点,或二维空间中的一个圆圈,而是一个满足 $|\boldsymbol{k}-\delta\boldsymbol{k}|<|\boldsymbol{k}|<|\boldsymbol{k}+\delta\boldsymbol{k}|$ 的一个区域. 在二维系统中,它表现为一个具有一定宽度的圆环,见图 9.1. 虽然临界模 $|\boldsymbol{k}|=k_c$ 在系统失稳后最初的线性阶段生长最快,但其他 $|\boldsymbol{k}|\neq k_c$ 的主动模也都在起作用. 因此,从原则上讲,描述斑图动力学的振幅方程要考虑所有在圆环内的模的贡献,对应的振幅方程变成无穷多个. 建立这样的方程显然是不可能的,在实际中也没有意义. 因此需要寻找某种方法将问题简化. 这个简化的方法就是微扰分析.

首先必须肯定上一章讨论中得到的空间共振原则具有普适性. 它在系统离开临界位置时仍然适用. 在系统离开临界点不太远时,可以认为描述系统斑图动力学的振幅方程的形式不变,仍是方程(8.3.12)的形式. 而把其他主动模对

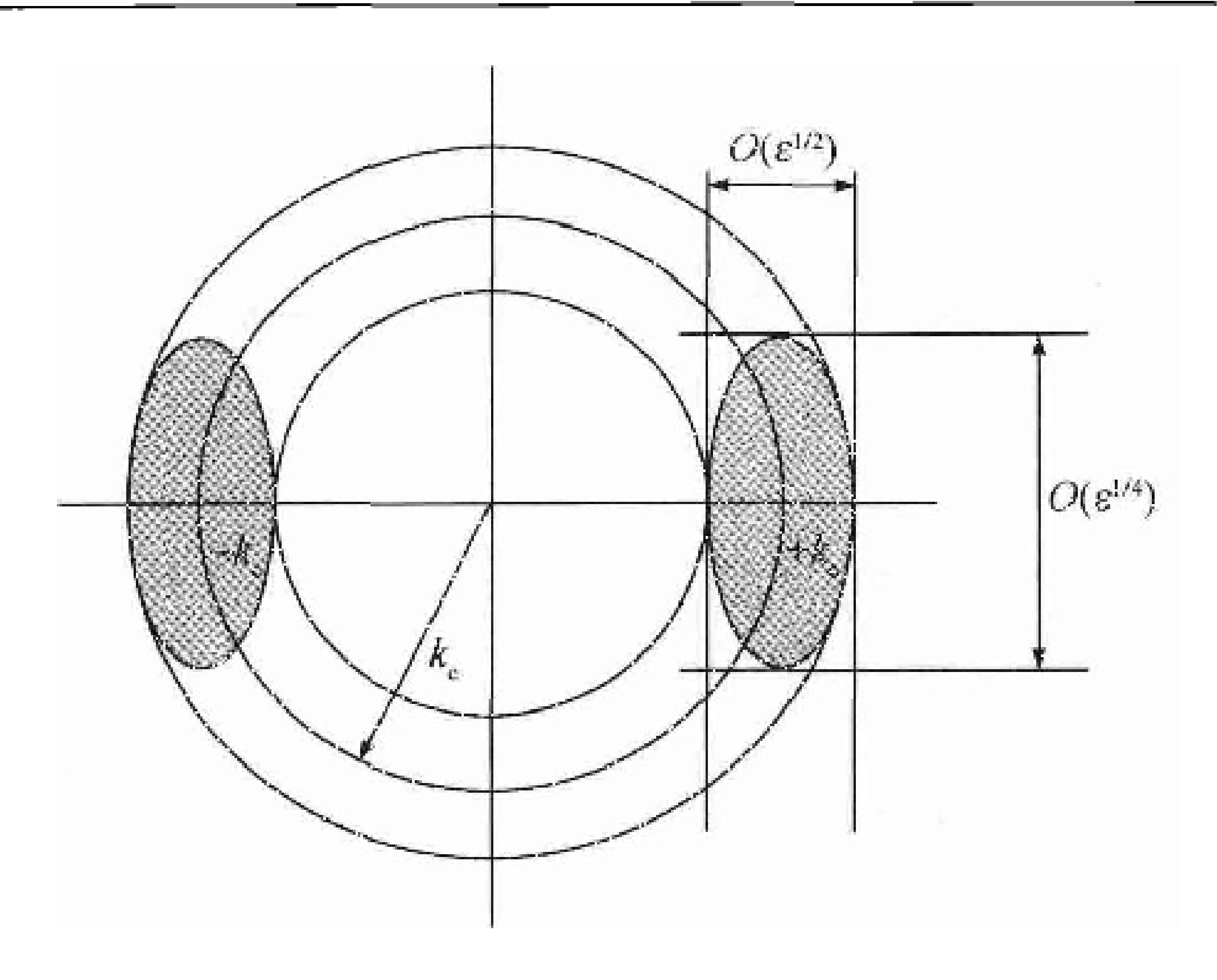


图 9.1 系统越过临界点以后主动模在 k 空间的分布

模 A_1, A_2, A_3 的影响看做是这些模对原系统的微扰. 例如在考虑振幅方程 A_1 时,需要考虑在模 $\boldsymbol{k}_1$ 附近的其他模 $\boldsymbol{k}_1+\delta\boldsymbol{k}$ 的影响. NWS 方程就是在上章推出的振幅方程的基础上,加上了这种影响的线性部分而得到的新的振幅方程. 此方程是由纽威尔(Newell)、怀特海得(Whitehead)与赛格尔(Segel)在 1969 年首先提出的,因而叫纽威尔-怀特海得-赛格尔(Newell-Whithead-Segel)方程,这里简称为 NWS 方程[56,57]. 由于它描述一个波矢带($|\boldsymbol{k}|<|\boldsymbol{k}+\delta\boldsymbol{k}|$)的主动模的动力学行为,人们有时称此方程为包络方程(envelope equation).

现在重新对图 8.2(b)的情况作线性分析. 在临界点(μ_c, k_c)附近的一个区域,$\mu-\mu_c$, $k-k_c$ 值很小,失稳模的生长率 $\sigma=\mathrm{Re}(\lambda)$ 可以在临界点用泰勒级数展开:

$$\begin{aligned}\sigma(\mu,k) =& \sigma(\mu_c,k_c)+\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\bigg|_c(\mu-\mu_c)+\frac{\partial\sigma}{\partial k}\bigg|_c(k-k_c)\\&+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial\mu^2}\bigg|_c(\mu-\mu_c)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}\bigg|_c(k-k_c)^2\\&+\frac{\partial^2\sigma}{\partial\mu\partial k}\bigg|_c(\mu-\mu_c)(k-k_c)+\cdots.\end{aligned} \tag{9.1.1}$$

当系统在临界位置上时,$\sigma(\mu_c,k_c)=0$, $\partial\sigma/\partial k|_c=0$(见图 8.2(b)). 上式简化为

$$\begin{aligned}\sigma(\mu,k) =& \frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\bigg|_c(\mu-\mu_c)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial\mu^2}\bigg|_c(\mu-\mu_c)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}\bigg|_c(k-k_c)^2\\&+\frac{\partial^2\sigma}{\partial\mu\partial k}\bigg|_c(\mu-\mu_c)(k-k_c)+\cdots.\end{aligned} \tag{9.1.2}$$

现在将等式(9.1.2)同量级的主导项(leading order)挑出. 由于系统在临界点附近,分析中将控制参量 μ 离临界点 μ_c 的距离作为一级微扰项,$\varepsilon=\mu-\mu_c$.

左边项：根据图灵分岔的定义 $\partial\sigma/\partial\mu|_c>0$ 可知 $\sigma\sim\varepsilon$;

右边第一项：$\mu-\mu_c\sim\varepsilon$;

右边第二项：$(\mu-\mu_c)^2\sim\varepsilon^2$;

右边第三项：由图 8.2(b)看到,在临界点附近 σ-k 曲线可以近似为一个抛物线,所以 $(k-k_c)^2\sim\sigma\sim\varepsilon$;

右边第四项：$(\mu-\mu_c)(k-k_c)\sim\varepsilon^{3/2}$.

综合以上分析,方程在主量级 ε 阶上的形式应为

$$\sigma(\mu,k)=\left.\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\right|_c(\mu-\mu_c)+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}\right|_c(k-k_c)^2. \tag{9.1.3}$$

式(9.1.3)中的第一项是失稳模本身的生长率,第二项为其他模对该模影响的线性部分. 为简单起见,本节只分析条形图纹的 NWS 方程. 设条形图纹的波矢方向与 X 轴方向平行,因而临界波矢为 $\boldsymbol{k}_c=(k_c,0)$. 现在考虑在失稳圆环内(见图 9.1) 的一个离 $\boldsymbol{k}_c$ 很近的波矢 $\boldsymbol{k}$ 对 $\boldsymbol{k}_c$ 模生长的影响,$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_c+\delta\boldsymbol{k}=(k_c+\delta k_x,\delta k_y)$. 对于这个波矢,等式(9.1.3)右边第二项由关系

$$k=\sqrt{(k_c+\delta k_x)^2+\delta k_y^2}$$

导出. 利用泰勒级数展开,得

$$(k-k_c)=\delta k_x+\frac{\delta k_x^2+\delta k_y^2}{2k_c}-\frac{1}{8k_c}(2\delta k_x+\left(\frac{\delta k_x^2+\delta k_y^2}{k_c}\right)^2+\cdots. \tag{9.1.4}$$

在(9.1.4)中哪些是主导量级呢? 从图 9.1 容易看出,$\delta k_x\sim\delta k_y^2$. 另外,如果令 $\delta k_y=0$ 则 $(k-k_c)^2=\delta k_x^2\sim\varepsilon$,因而有 $\delta k_x\sim\varepsilon^{1/2}$,$\delta k_y\sim\varepsilon^{1/4}$. 所以在主导量级 ε 阶上,(9.1.4)简化为

$$(k-k_c)^2=\left(\delta k_x+\frac{\delta k_y^2}{2k_c}\right)^2. \tag{9.1.5}$$

波矢 $\delta\boldsymbol{k}$ 代表对 $\boldsymbol{k}_c=(k_c,0)$ 的一个小的扰动. 这在实空间上对应为它在 X 方向与 Y 方向上的一个长空间尺度的修正. 所以在傅里叶空间中的 δk_x 和 δk_y,与它们在实空间中的形式有如下对应关系

$$\delta k_x\leftrightarrow-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial X},\qquad \delta k_y\leftrightarrow-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial Y}$$

其中在 X 与 Y 方向的长空间尺度由 δk_x 与 δk_y 的尺度决定,$X=\varepsilon^{1/2}x$,$Y=\varepsilon^{1/4}y$. 因此得到

$$(k-k_c)^2=\left(\delta k_x+\frac{\delta k_y^2}{2k_c}\right)^2\leftrightarrow-\left(\frac{\partial}{\partial X}-\frac{\mathrm{i}}{2k_c}\frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right)^2. \qquad (9.1.6)$$

在临界点附近具有临界波数 $\boldsymbol{k}_c$ 的条形斑图的线性增长率由(9.1.3)决定，对应的振幅方程截止到 $O(\varepsilon)$ 为

$$\tau_0\frac{\partial A}{\partial t}=\mu A+\xi_0^2\left(\frac{\partial}{\partial X}-\frac{\mathrm{i}}{2k_c}\frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right)^2A-g|A|^2A, \qquad (9.1.7)$$

这就是 NWS 方程. 该方程与式(9.1.3)中的符号有如下对应关系：

$$\mu\leftrightarrow\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\bigg|_c(\mu-\mu_c),\quad \xi_0^2=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}\bigg|_c>0.$$

其中 ξ_0 是系统的相关长度.

方程(9.1.7)在 X 与 Y 方向有不同的空间尺度，这件事需要作进一步说明. 当系统在初级临界点时，决定斑图产生的动力学方程是各向同性的，也就是说，系统具有空间旋转不变性. 由此看来不应该对系统强分 X,Y 方向. 但图灵失稳后条形图纹的产生，破坏了这种空间的旋转不变性. 由于条形斑图对不同方向的微扰有不同的响应，X 与 Y 方向的不同空间尺度就划分出来了. 也就是说 NWS 方程只考虑到空间方向中多重尺度同级的项，而不考虑对称性原则. 因而它的应用范围从严格意义上讲，只限于对波矢在 X 方向上的条形斑图. 在第三节将推导更一般的包络方程，它具有一般的空间旋转不变性，对正方形、六边形斑图都适用.

§9.2 条形斑图的失稳

上一节曾说明，NWS 方程是在原条形斑图的振幅方程上，加上其他主动模($\boldsymbol{k}_c+\delta\boldsymbol{k}$)对原斑图影响的线性部分而得到的. 由于$|\boldsymbol{k}|$很小，这在实空间中对应于一个长波微扰. 这种微扰引起的失稳必定对应于长波失稳. 现在对 NWS 方程的定态解作线性稳定性分析，以推导条形斑图在长波微扰下失稳的条件.

为了方便起见首先将方程(9.1.7)的时空尺度作如下尺度变换：

$$t=\tau_0t',\quad X=\xi_0x',\quad Y=\sqrt{\frac{\xi_0}{2k_c}}y',\quad A=\frac{A'}{\sqrt{g}}.$$

除去新变量上的撇符号，原方程简化为

$$\frac{\partial A}{\partial t}=\mu A+\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2A-|A|^2A. \qquad (9.2.1)$$

设在临界点时条状图灵斑图的临界波数为 k_c'，斑图的振幅为 $\tilde{A}$. 当控制参量 μ 变化到临界点以后的某个位置 $\mu+\delta\mu$ 时，斑图的临界波数变为 k_c，振幅为

A. 两者的关系为

$$c=c_0+\tilde{A}e^{ik_c'\cdot x}+\text{c. c.}=c_0+\tilde{A}e^{i\delta k\cdot x}e^{ik_c\cdot x}+\text{c. c.},$$

在研究图灵斑图的二级分岔时，我们将系统在临界点的斑图作为系统的初始状态，在 NWS 方程下研究它的发展. 因而，首先要得到初始态振幅 $\tilde{A}$ 的振幅方程. 令 $A=\tilde{A}e^{i\delta k\cdot x}$，方程(9.2.1)转化为对 $\tilde{A}$ 的偏微分方程：

$$\frac{\partial\tilde{A}}{\partial t}=(\mu-\delta k^2)\tilde{A}+2i\delta k\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tilde{A}+\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2\tilde{A}-|\tilde{A}|^2\tilde{A}. \tag{9.2.2}$$

容易验证方程(9.2.2)有如下均匀定态解：

$$\tilde{A}_0=\sqrt{\mu-\delta k^2}. \tag{9.2.3}$$

可以看到当控制参量 μ 离开临界点后，原斑图的振幅开始下降. 对此斑图态的振幅 $\tilde{A}$ 加微扰，$\delta A=u+iv$，代入方程(9.2.2)，将其线性化并将方程的实部与虚部分开，然后利用(9.2.3)，得到如下(9.2.2)对应的线性微扰方程：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=\left(-2(\mu-\delta k^2)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\delta k\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)u\\&\quad-\left(2\delta k-2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}v,\\\frac{\partial v}{\partial t}&=\left(2\delta k-2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}u+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\delta k\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)v.\end{aligned} \tag{9.2.4}$$

将微扰 u,v 按下面的正态形式分解：

$$u=Ue^{st}\cos(q_xx)\cos(q_yy), \tag{9.2.5a}$$

$$v=Ve^{st}\sin(q_xx)\cos(q_yy), \tag{9.2.5b}$$

得到线性微扰方程(9.2.4)对应的特征方程

$$\begin{vmatrix}s+2(\mu-\delta k^2)+q_x^2+2\delta kq_y^2+q_y^4 & q_x(2\delta k+2q_y^2)\\ q_x(2\delta k+2q_y^2) & s+q_x^2+2\delta kq_y^2+q_y^4\end{vmatrix}=0. \tag{9.2.6}$$

由此得到色散关系

$$\begin{aligned}&s^2+2((\mu-\delta k^2)+q_x^2+2\delta kq_y^2+q_y^4)s+(2(\mu-\delta k^2)+q_x^2\\&+2\delta kq_y^2+q_y^4)(q_x^2+2\delta kq_y^2+q_y^4)-q_x^2(2\delta k+2q_y^2)^2=0.\end{aligned} \tag{9.2.7}$$

方程(9.2.7)有两个实数解

$$s_{\pm}=-[(\mu-\delta k^2)+q_x^2+2\delta k q_y^2+q_y^4]\pm(\mu-\delta k^2)^2+q_x^2(2\delta k+2q_y^2)^2, \tag{9.2.8}$$

其中解 s_- 总是负值. 由此条形斑图失稳的必要条件是 $s_+>0$. 显然, s_+ 的值取决于微扰的方向 (q_x, q_y). 以下分别讨论横向和纵向微扰两种情况下，斑图失稳的条件.

横向失稳条件 将 $q_y=0$ 代入式(9.2.7)，得

$$s^2+2[(\mu-\delta k^2)+q_x^2]s+[2(\mu-3\delta k^2)+q_x^2]q_x^2=0.$$

由于 $s_-<0$，系统失稳的条件可以写成

$$s_- s_+=[2(\mu-3\delta k^2)+q_x^2]q_x^2\leqslant 0.$$

当 $|\delta k|\geqslant\sqrt{\mu/3}$ 时，系统对 q_x 微扰可能失稳. 这类失稳被称为爱克豪斯(Eckhaus)失稳[58]. 由于当 $q_x=0$ 时 $s_+=0$，在这种情况下最危险的微扰模是 $q_x\to 0$ 的模. 因而当系统的条形斑图失稳时，系统会出现一个 $q_x\to 0$ 的长波调制，其强度随时间增加. 条形斑图的波长被一个定态的长程调制波压缩与伸长(见图 9.2). 由于这种调制的结果使系统在局部区域更加偏离初始斑图态(对应于 q_x 增加)，所以系统经历爱克豪斯失稳后，其长波调制振幅不会饱和. 当调制波振幅增长到一定程度时，如果初始态斑图的波长大于临界波长，系统会在两个条纹之间波长的伸长位置产生一个新的条纹，以后系统恢复到均匀波长的状态，新的斑图的波数增加了 n. 如果初始态斑图的波长小于临界波长，斑图的条纹在波长被压缩的位置上会减少，以后系统恢复到均匀波长态，新的斑图的波数减少了 n. 图 9.2 是后一种情况的示意图. 这里值得注意的是爱克豪斯失稳不产生新的对称性破缺. 失稳前后系统的唯一变化是斑图波数的增加或减少.

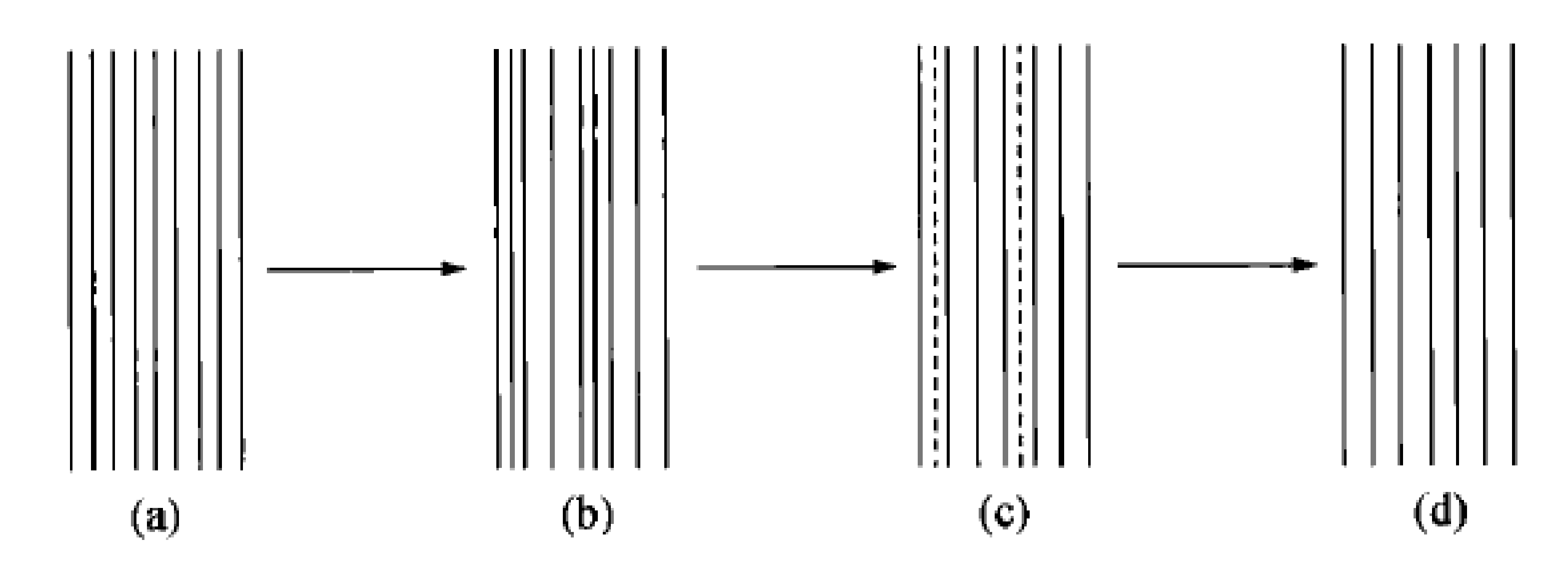


图 9.2 爱克豪斯失稳的示意图

纵向失稳条件 将 $q_x=0$ 代入(9.2.8)式，立即得到 $s_+=-q_y^2(q_y^2+2\delta k)$. 即当 $\delta k\leqslant -q_y^2$ 时系统失稳. 这类失稳被称为扭曲失稳. 扭曲失稳只有在系统初始态的波长大于临界波长时才会发生. 同样地，由于当 $q_y=0$ 时 $s_+=0$，扭曲失稳也是一个长波失稳. 与爱克豪斯失稳不同的是，由于扭曲失稳发生后系统的

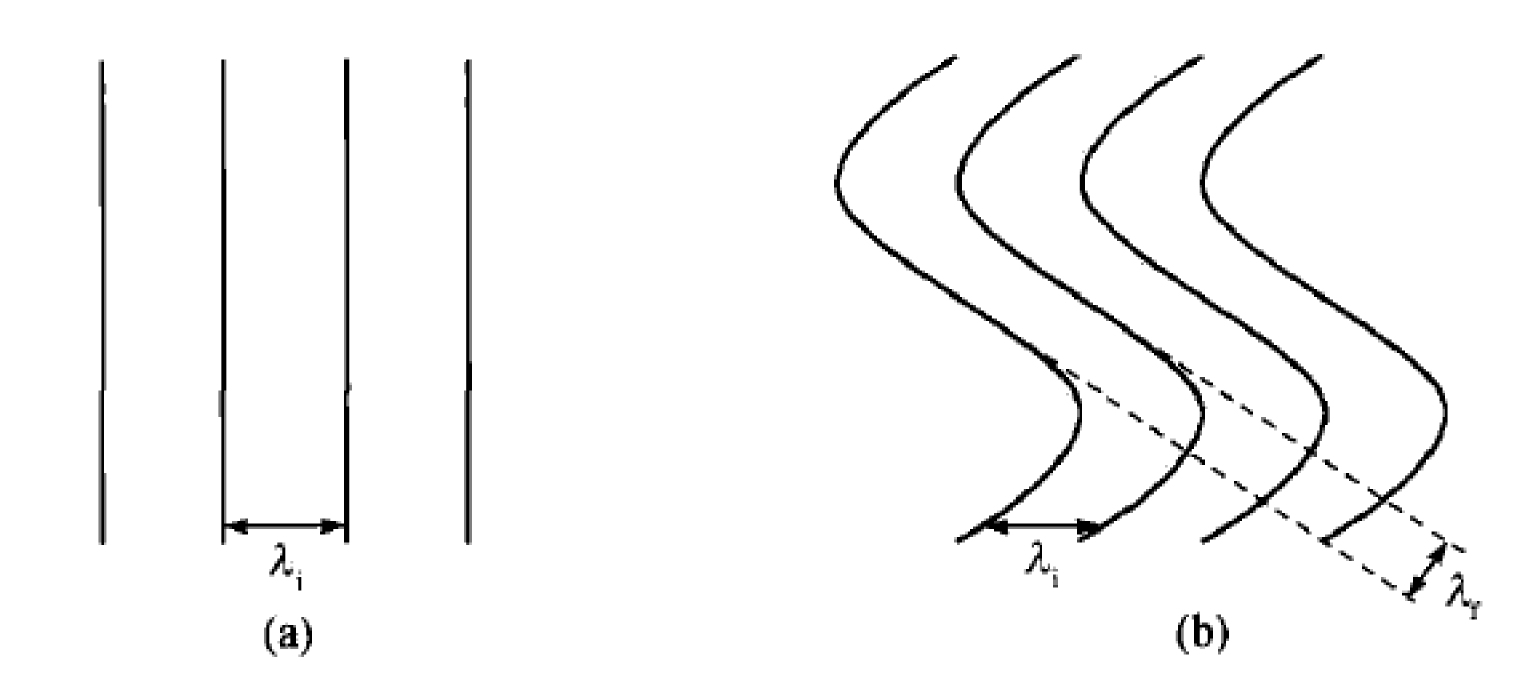


图 9.3　扭曲失稳的示意图

局部波长会逐渐变小(见图 9.3),扭曲失稳后调制波的振幅会在高阶项的作用下饱和.相对于原斑图,扭曲失稳导致了新的对称性破缺.失稳发生后系统会出现如图 9.3 所示的扭曲状条形图纹,它的对称性比原斑图为低.需要指出的是扭曲图纹只有 δk 很小时才是稳定的,当系统的 δk 足够大时,稳定的扭曲图纹不复存在,系统将跃迁至条形斑图态或六边形斑图态.图 9.4 给出数值模拟中观察到的两个例子.从"能量"角度考虑,当 $\delta k<0$ 时,系统扭曲失稳比较容易发生.因为扭曲不产生新的条纹.综上所述,条形斑图非平衡相变的相图可以由图 9.5 表示.该图由布斯(Busse)在分析流体中的瑞利-贝纳尔热对流斑图时首先得出[59],因此被称为布斯球(Busse balloon).

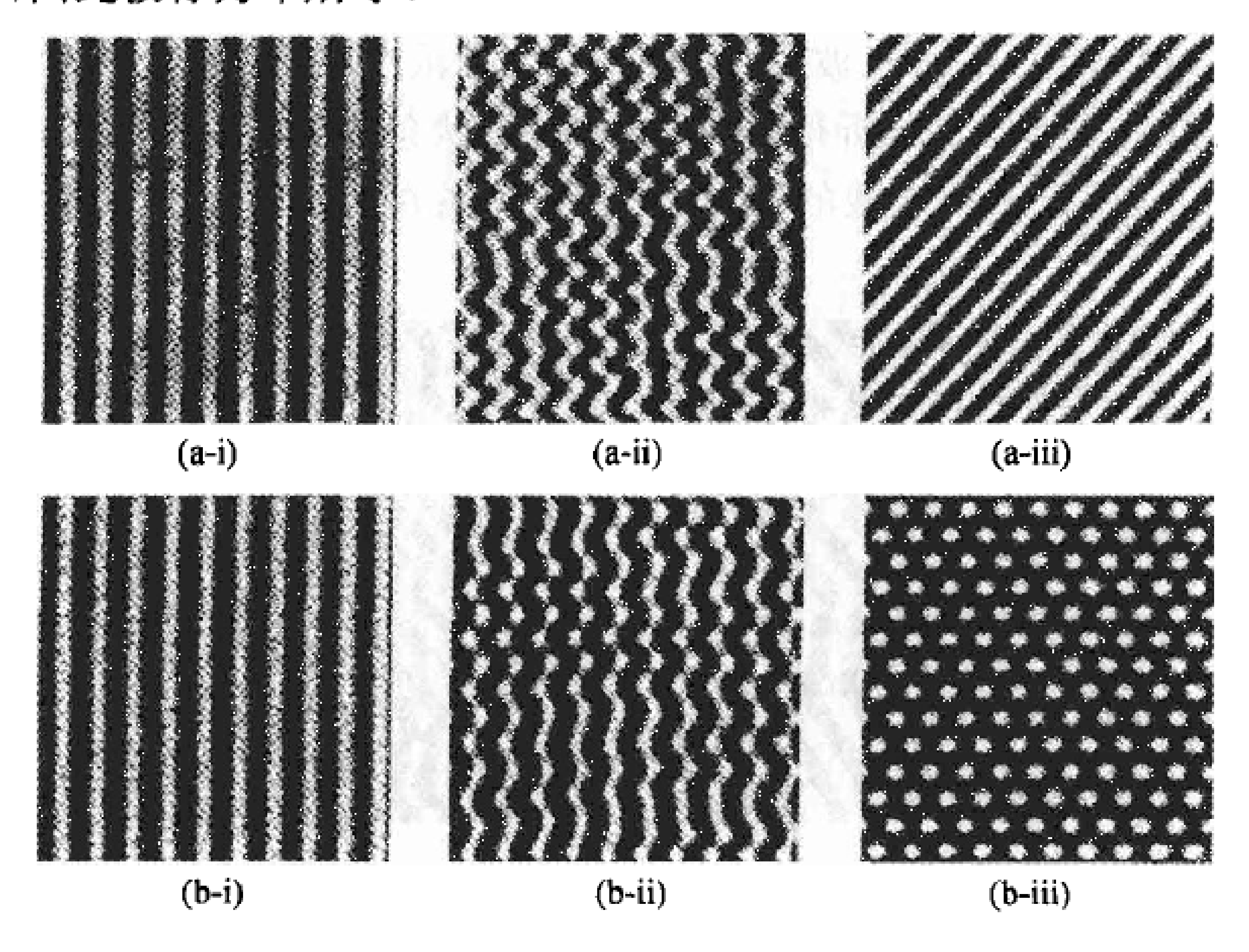


图 9.4　数值模拟中观察到的扭曲失稳的两个例子

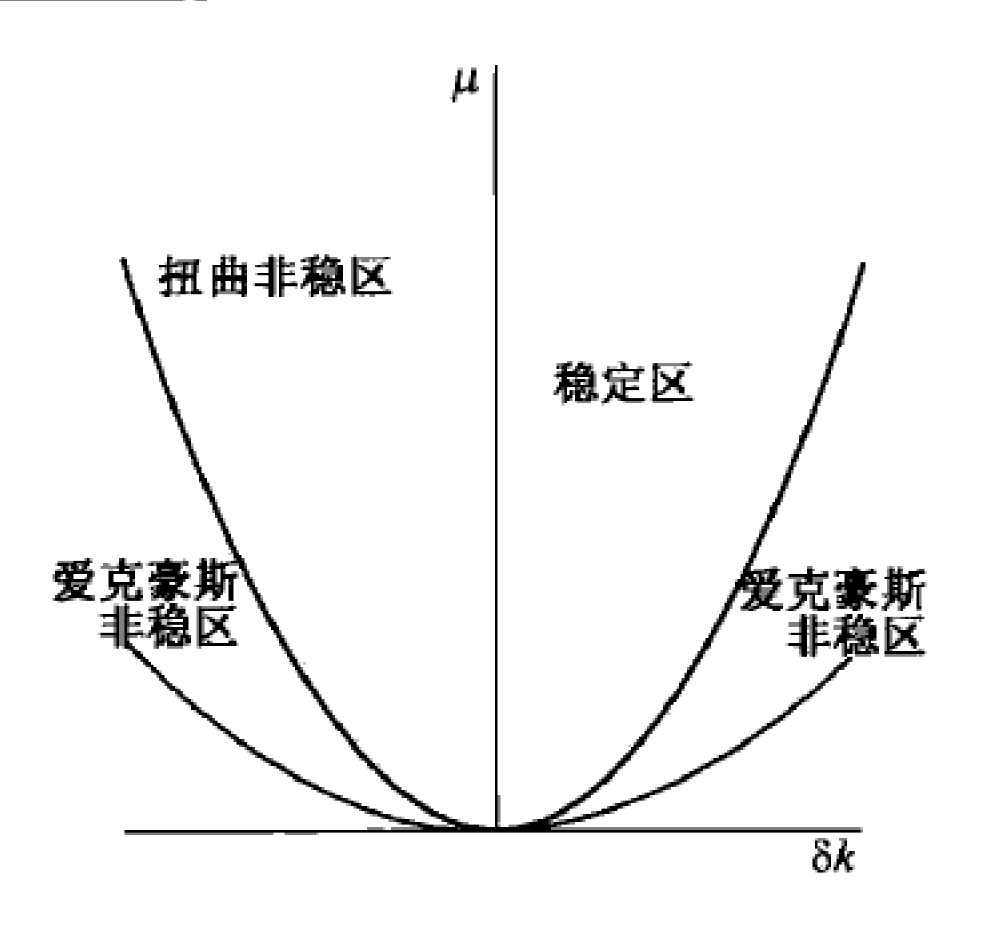


图 9.5　长波失稳的分岔图

在 CIMA 反应系统中，由于在实验中只关心渐近态行为，对爱克豪斯失稳没有作过系统的实验观察．而由于扭曲失稳会产生新的渐近态，可以在实验中观察到．图 9.6 就是实验中观察到的扭曲状条形斑图的两个例子．在实验中扭曲斑图是这样得到的：首先将控制参量选择在条形图纹态(见图 8.9(b))．当条形图纹形成后，将丙二酸的浓度很小心地下调．由于系统的内在波长随丙二酸浓度的下降而减小，如果控制参量变化得足够小(对应于 δk 足够小)，扭曲条纹就会产生．这时控制参量变化前的斑图被看成是初始条件，它的波长略大于系统在控制参量变化后的内在波长．如果丙二酸的浓度变化过大，取而代之的是六边形的图纹．根据以上分析得到的理论，扭曲状条形斑图的长波(扭曲)波数(对应于 δk)应正比于丙二酸的变化量．这种关系在实验中还没有得到定量的验证．

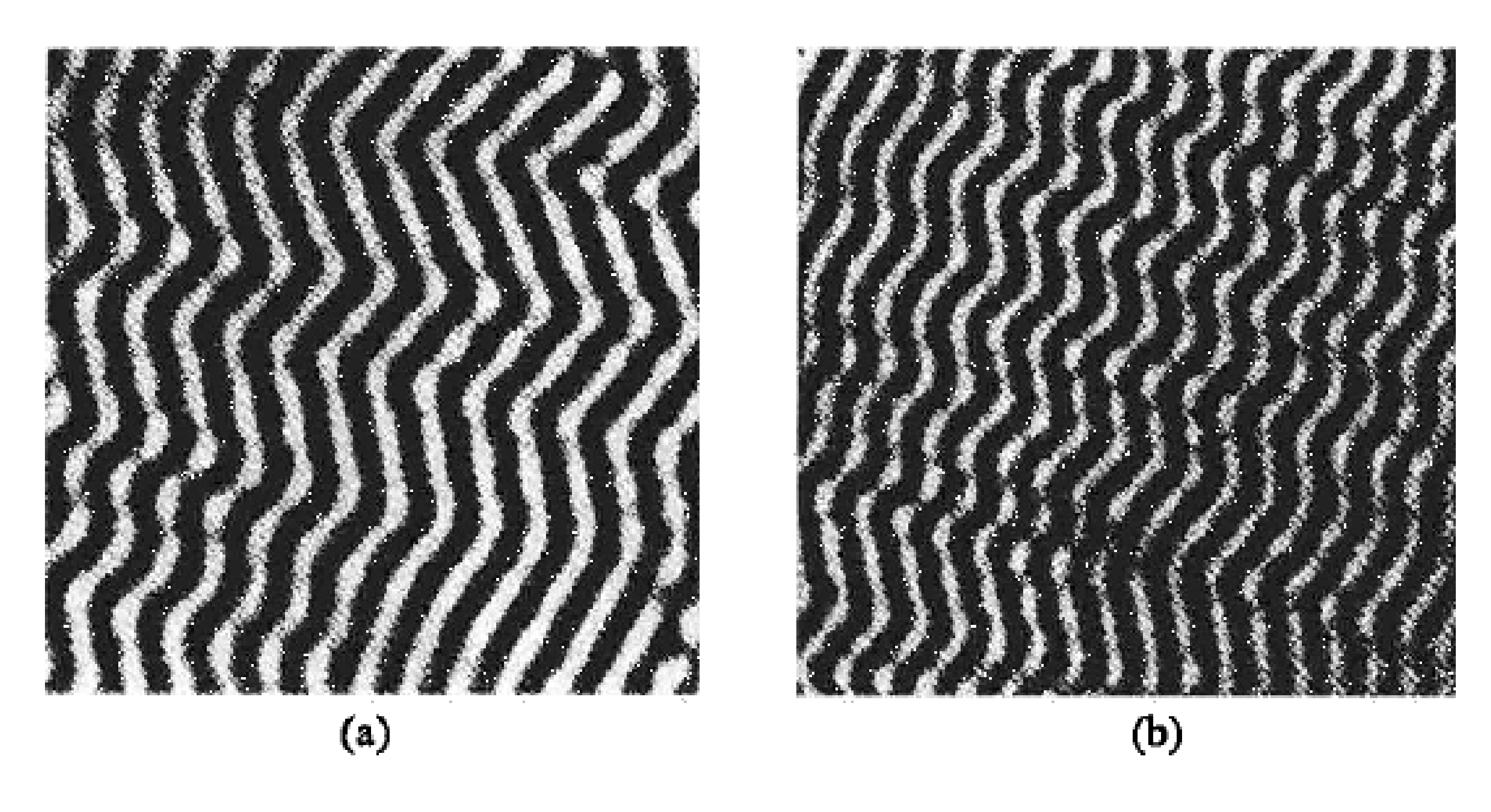


图 9.6　实验中观察到的扭曲斑图

与长波失稳相关的另一类条形斑图的失稳是交叉失稳(cross-over instability).当一个波数不等于临界波数($k\neq k_c$)的条形斑图受到一个波数为临界波数但波矢方向与原斑图不同的条形图纹微扰时,微扰的条纹可能长大,同时原斑图可能消失.描述交叉失稳的振幅方程为

$$\frac{\partial A_1}{\partial t}=(\mu-\delta k^2)A_1-(|A_1|^2+\gamma|A_2|^2)A_1+\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2},\qquad (9.2.9a)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial t}=\mu A_2-(|A_2|^2+\gamma|A_1|^2)A_2,\qquad (9.2.9b)$$

这里 A_1,A_2 分别为原斑图与微扰斑图的振幅.注意对于原斑图 A_1 波矢在 Y 方向上没有分量,因而所有 $\partial/\partial y$ 项为 0;对于微扰斑图 A_2,由于它的波数为 k_c,方程中所有微分项都为 0.初始时 A_1,A_2 分别为

$$A_1=\sqrt{\mu-\delta k^2},\quad A_2=0.\qquad (9.2.10)$$

对 A_2 进行微扰:$A_2=\delta A_2$,代入(9.2.9)式并利用(9.2.9)式,得线性微扰方程

$$\frac{\partial\delta A_2}{\partial t}=[\mu-\gamma(\mu-\delta k^2)]\delta A_2.\qquad (9.2.11)$$

显然,当 $\delta k^2\geqslant\mu(\gamma-1)/\gamma$ 时微扰被放大,交叉失稳产生.如果 $\gamma<1$,条形图纹总是不稳定的,实际上它将跃迁至正方形斑图.这种情况在§8.3中讨论过.图 9.7 是数值模拟中观察到的交叉失稳现象.

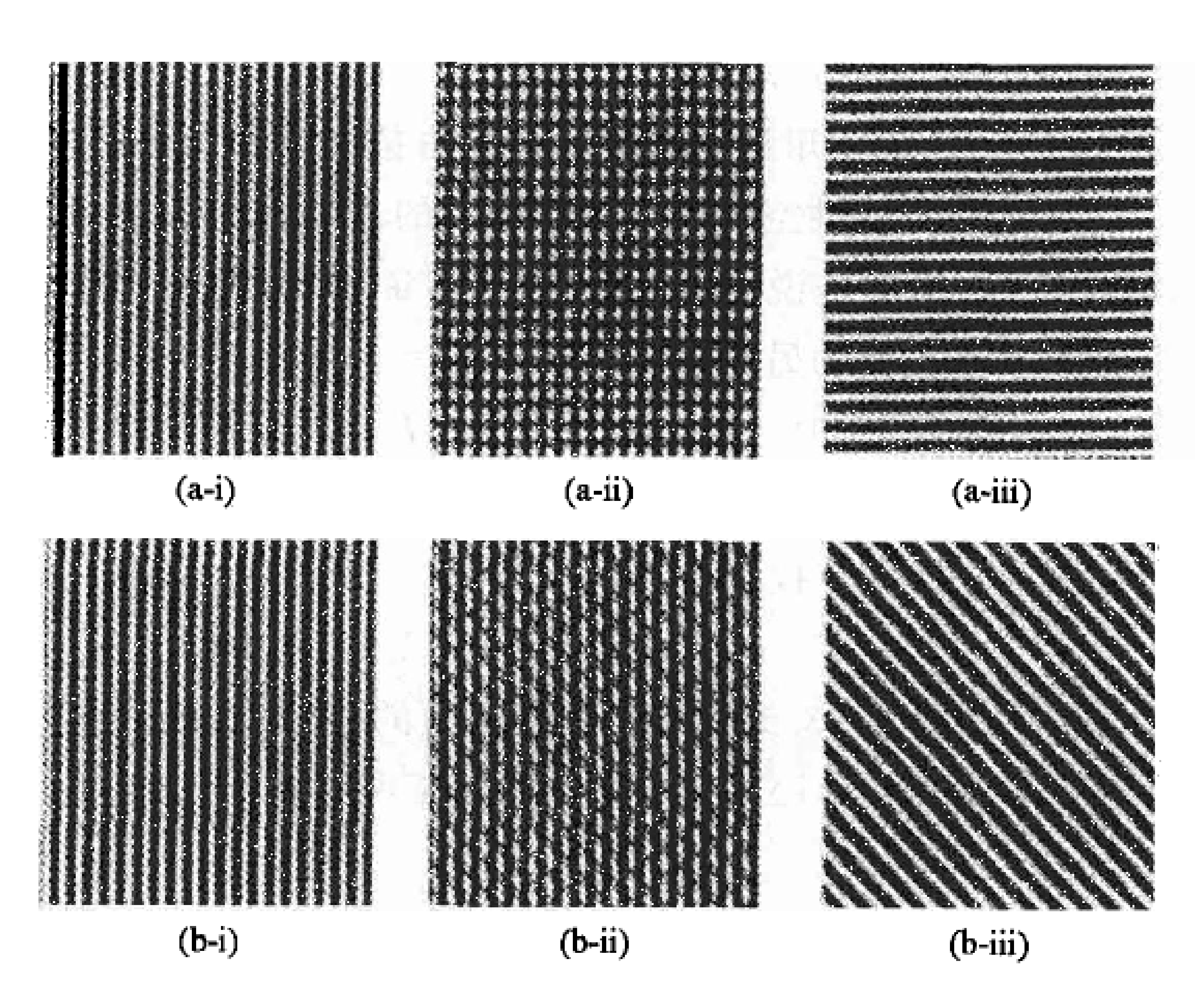


图 9.7　数值模拟中观察到的交叉失稳现象

§9.3　具有旋转对称的包络方程

本章第一节曾说明，NWS 方程只考虑多重尺度分析中同级的项，不考虑对称性原则. 因而它的应用范围原则上只对波矢指向 X 方向上的条形斑图适用. 也就是说 NWS 方程是一个准一维模型. 在二维系统中，对于诸如正方形、六边形斑图，由于系统的主导方向不止一个，用 NWS 方程就不能得出一般性结论. 问题存在的根本原因在于，一般情况下同级的微扰项不满足空间旋转对称. 为弥补 NWS 方程这一缺陷，必须对原方程进行适当的补充. 解决的办法是放弃多重尺度分析中只取同级项的分析方法，将一些高级微扰项加入包络方程，使之满足空间旋转不变性. 此方法是作者与美国休斯顿大学的合作者共同完成的[60]，文章发表后引起一些争论. 争论的焦点是，任意地将某些高阶微扰项加入包络方程是否合理? 作者认为选择何种形式截断高阶微扰项应该具体情况具体分析. 对于存在点缺陷和粒状边界的二维斑图，保持包络方程的对称性比保证方程的各项为同一量级更为重要. 本节首先从对称性角度推导具有旋转对称的包络方程的一般形式，然后对一个简单的动力学系统做多重尺度微扰分析，推导出具有空间旋转对称的包络方程. 读者将可以看到上两节的分析与本节的分析两者之间的相同与不同点.

从对 NWS 方程的推导知道，包络方程是由描述临界点对应的振幅方程(8.3.12)加上一个合适的线性空间微分算符组成的. 容易证明振幅方程(8.3.12)满足空间旋转不变性. 也就是说，如果$U_0=A_1\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r})+\mathrm{c.c.}$是方程(8.3.12)的一个解，则与 X 轴有夹角的另一个条形斑图 $U_\theta=A_1\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1(\theta)\cdot\boldsymbol{r})+\mathrm{c.c.}$ 也是这个方程的一个解. 这里 $\boldsymbol{k}_1(\theta)=(|\boldsymbol{k}_1|\sin\theta)\boldsymbol{i}+(|\boldsymbol{k}_1|\cos\theta)\boldsymbol{j}$. 这意味着振幅方程的解 A_1 与斑图的取向(夹角 θ)无关. 具有旋转对称的包络方程应满足在旋转变换 $A_1\to A_1\exp(\mathrm{i}\Delta\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r})$下方程不变. 这里

$$\Delta\boldsymbol{k}_1=\boldsymbol{k}_1(\theta)-\boldsymbol{k}_1=(k_0\sin\theta)\boldsymbol{i}-k_0(1-\cos\theta)\boldsymbol{j}.$$

也就是说，如果要在方程(8.3.12)加上一个合适的线性空间微分算符，方程的微分算符 Ξ 必须保证 $\Xi_1\exp(\mathrm{i}\Delta\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r})=0$. 容易证明算符

$$\Xi_1=\left(\hat{\boldsymbol{k}}_1\cdot\nabla-\frac{\mathrm{i}}{2k_0}\nabla^2\right)\tag{9.3.1}$$

是满足这个条件的最简单的形式，这里 $\hat{\boldsymbol{k}}_1=\boldsymbol{k}_1/|\boldsymbol{k}_1|$是斑图的波矢取向. 于是对应于振幅方程(8.3.12)，满足旋转对称的包络方程应有以下形式：

$$\tau_0 \frac{\partial A_1}{\partial t} = \mu A_1 + h\bar{A}_2\bar{A}_3 - [g_1|A_1|^2 + g_2(|A_2|^2 + |A_3|^2)]A_1 + \xi_0^2 \Xi_1^2 A_1, \tag{9.3.2a}$$

$$\tau_0 \frac{\partial A_2}{\partial t} = \mu A_2 + h\bar{A}_1\bar{A}_3 - [g_1|A_2|^2 + g_2(|A_1|^2 + |A_3|^2)]A_2 + \xi_0^2 \Xi_2^2 A_2, \tag{9.3.2b}$$

$$\tau_0 \frac{\partial A_3}{\partial t} = \mu A_3 + h\bar{A}_1\bar{A}_2 - [g_1|A_3|^2 + g_2(|A_1|^2 + |A_2|^2)]A_3 + \xi_0^2 \Xi_3^2 A_3, \tag{9.3.2c}$$

以上是通过对称性分析得到的包络方程.下面对一个具体系统作多重尺度微扰分析,推导出以上方程的具体形式.为了简单起见选取斯威福特-豪痕博格(Swift-Hohenberg)方程[61]进行分析.该方程是在分析流体的热对流现象时得到的,其形式为

$$\frac{\partial U}{\partial t} = [\varepsilon^2 - (1+\nabla^2)^2]U - \gamma U^3 + \varepsilon\beta U\nabla^2 U. \tag{9.3.3}$$

方程中,U 代表速度场,β,γ,ε 为控制参量,其中 $\varepsilon \ll 1$.首先定义慢时空变量 $X=\varepsilon x, Y=\varepsilon y, T=\varepsilon^2 t$.与 NWS 方法不同的是,这里对 X 方向与 Y 方向的大尺度变量作一样的尺度变换.根据规则,将空间与时间的微分写为

$$\nabla \to \nabla_0 + \varepsilon\nabla_1, \qquad \frac{\partial}{\partial t} \to \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T},$$

这里

$$\nabla_0 = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}$$

只作用于小尺度变量函数 $\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$,

$$\nabla_1 = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial X} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial Y}$$

只作用于大尺度变量的包络方程振幅 A.

首先将算符 $(1+\nabla^2)^2$ 按 ε 的幂级数分解:

$$(1+\nabla^2)^2 = \boldsymbol{L}_0 + \varepsilon\boldsymbol{L}_1 + \varepsilon^2\boldsymbol{L}_2 + \varepsilon^3\boldsymbol{L}_3 + \varepsilon^4\boldsymbol{L}_4, \tag{9.3.4}$$

其中:

$$\boldsymbol{L}_0 = (1+\nabla_0^2)^2, \quad \boldsymbol{L}_1 = 4(1+\nabla_0^2)(\nabla_0\cdot\nabla_1),$$

$$\boldsymbol{L}_2 = 2(1+\nabla_0^2)\nabla_1^2 + 4(\nabla_0\cdot\nabla_1)^2,$$

$$\boldsymbol{L}_3 = 4\nabla_1^2(\nabla_0\cdot\nabla_1), \quad \boldsymbol{L}_4 = \nabla_1^4.$$

再将变量 U 按 ε 的幂级数展开:

$$U=\epsilon w_1+\epsilon^2 w_2+\epsilon^3 w_3+\cdots, \tag{9.3.5}$$

得到非线性项的幂级数形式：

$$U^3=\epsilon^3 w_1^3+3\epsilon^4 w_1^2 w_2+3\epsilon^5(w_1^2 w_3+w_1 w_2^2)+O(\epsilon^6), \tag{9.3.6}$$

$$\begin{aligned}U\nabla^2 U=&\epsilon^2 w_1\nabla_0^2 w_1+\epsilon^3[w_2\nabla_0^2 w_1+2w_1(\nabla_0\cdot\nabla_1)w_1\\&+w_1\nabla_0^2 w_2]+\epsilon^4[\nabla_0^2(w_1 w_3)+2\nabla_0\cdot\nabla_1(w_1 w_2)\\&+w_2\nabla_0^2 w_2+w_1\nabla_1^2 w_1]+O(\epsilon^5).\end{aligned} \tag{9.3.7}$$

将(9.3.4)，(9.3.5)，(9.3.6)与(9.3.7)式代入(9.3.3)式，按 ϵ 的幂级数展开. 对于 ϵ^1 级，方程为 $\boldsymbol{L}_0 w_1=0$. 解得

$$w_1=A_{11}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\text{c. c.} \tag{9.3.8}$$

对于 ϵ^2 级，方程为 $\boldsymbol{L}_0 w_2+\boldsymbol{L}_1 w_1=0$. 由于 $\boldsymbol{L}_1 w_1=0$，方程的解为

$$w_2=A_{21}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\text{c. c.} \tag{9.3.9}$$

对于 ϵ^3 级，方程为

$$\boldsymbol{L}_0 w_3=-\frac{\partial}{\partial T}w_1-\boldsymbol{L}_2 w_1-\boldsymbol{L}_1 w_2-\gamma w_1^3+\beta w_1\nabla_0^2 w_1.$$

根据弗来得霍姆可解性条件，该方程有解的条件为方程右边的项与 $\boldsymbol{L}^+$ 的零特征向量垂直. 这个条件将导致对 A_{11} 的动力学方程

$$\frac{\partial A_{11}}{\partial T}=A_{11}+4(\boldsymbol{k}\cdot\nabla_1)^2 A_{11}-3\gamma|A_{11}|^2 A_{11}. \tag{9.3.10}$$

可以验证算符 $(\boldsymbol{k}\cdot\nabla_1)^2$ 不满足空间旋转不变. 为了导出满足旋转对称的包络方程，需要加入高阶微扰项. ϵ^3 级的方程有如下形式的解：

$$w_3=A_{30}+A_{31}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+A_{32}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+A_{33}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\text{c. c.} \tag{9.3.11}$$

其中

$$A_{30}=-\beta|A_{11}|^2,\quad A_{32}=-\frac{1}{9}\beta A_{11}^2,\quad A_{33}=-\frac{1}{64}\gamma A_{11}^2.$$

在 ϵ^4 与 ϵ^5 级的方程上应用弗来得霍姆可解性条件，可以分别得到关于 A_{21} 与 A_{31} 的动力学方程：

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_{21}}{\partial t}=&A_{21}+4(\boldsymbol{k}\cdot\nabla_1)^2 A_{21}-4\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\nabla_1)\nabla_1^2 A_{11}\\&-3\gamma(A_{11}^2\bar{A}_{21}+2|A_{11}|^2 A_{21}),\end{aligned} \tag{9.3.12}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_{31}}{\partial t}=&A_{31}+4(\boldsymbol{k}\cdot\nabla_1)^2 A_{31}-4\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\nabla_1)\nabla_1^2 A_{21}-3\gamma(A_{11}^2\bar{A}_{31}\\&+2|A_{11}|^2 A_{31}+A_{11}|A_{31}|^2+2A_{11}|A_{21}|^2+\bar{A}_{11}A_{21}^2)\\&-\nabla_1^4 A_{11}-\frac{14}{9}\beta^2|A_{11}|^2 A_{11}.\end{aligned} \tag{9.3.13}$$

这样斑图基本模 $\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$的振幅为

$$A_1=\varepsilon A_{11}+\varepsilon^2 A_{21}+\varepsilon^3 A_{31}+\cdots. \tag{9.3.14}$$

将(9.3.10),(9.3.12),(9.3.13)式合并,利用(9.3.14)式,将时空尺度转换回来:$x\to\varepsilon^{-1}X, t\to\varepsilon^{-2}T$,并在(9.3.12),(9.3.13)式中只选择那些能使方程满足空间旋转不变的项,得到 A_1 的包络方程在$O(\varepsilon^3)$下的形式

$$\frac{\partial A_1}{\partial t}=\varepsilon^2 A_1+4k_0^2\Xi^2 A_1-\left(3\gamma-\frac{14}{9}\beta^2\varepsilon^2\right)|A_1|^2 A_1. \tag{9.3.15}$$

其中 Ξ 是式(9.3.1)定义的算符.显然(9.3.15)式满足旋转对称.注意到(9.3.10)中的空间微分算符实际上是(9.3.15)式空间微分算符的低级近似.因此如果想用一级近似推导斑图的包络方程,同时要求方程满足旋转对称,可以把高阶近似中才出现的一部分微分项搬来,从而使(9.3.10)中的$(\boldsymbol{k}\cdot\nabla^2)A_1$ 项变为 $k_0^2\Xi^2 A_1$.这样从对称性分析中得到的方程就与从多重尺度分析中得到的方程一致.

§9.4　菱形斑图

由于当系统离开临界点后稳定模在波矢空间中变为一个环状波带,空间共振关系 $\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3=0$ 就不只限于六边形斑图的情况,稍微区别于六边形的菱形图纹也可能存在.这种菱形斑图可以通过将六边形的一条对称轴拉长或压缩一点而得到.在下面的分析中,假定六边形的一条对称轴在 Y 轴上,将 X 轴作一个拉长变换(见图 9.8):

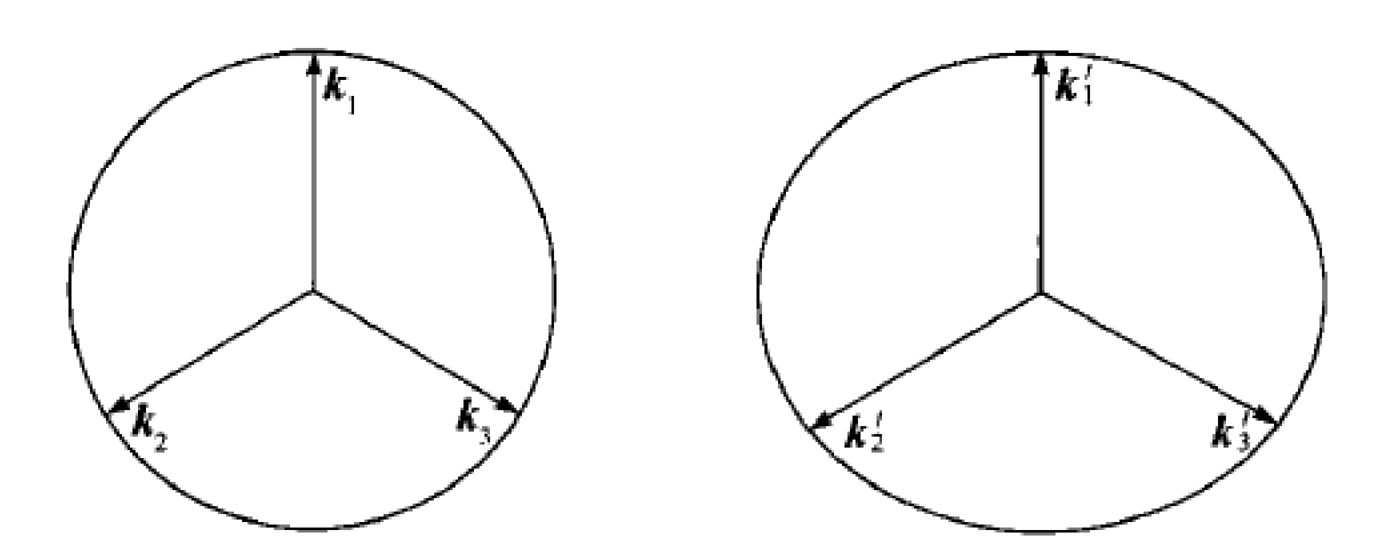


图 9.8　菱形斑图的空间共振关系

$$(x,y)\to((1+\bar{\delta})^{-1}x,y). \tag{9.4.1}$$

这种方式形成的斑图可以表示为

$$U_R(\boldsymbol{r},t)=\sum_{n=1}^{3}a_n e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_n\cdot(S^{-1}\boldsymbol{r})}, \tag{9.4.2}$$

这里

$$\boldsymbol{k}_1 \cdot (\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{r},$$

$$\boldsymbol{k}_2 \cdot (\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{k}_2 \cdot \boldsymbol{r} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{\delta}x,$$

$$\boldsymbol{k}_3 \cdot (\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{k}_3 \cdot \boldsymbol{r} - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{\delta}x.$$

在以六边形为基的表示中，有

$$A_1 = a_1, \quad A_2 = a_2 e^{i\delta x}, \quad A_3 = a_3 e^{-i\delta x},$$

这里 $\delta = \sqrt{3}\bar{\delta}/2$. 将此关系代入方程组(9.3.2)(注意该方程组是以六边形斑图为基的包络方程)，求该方程组的定态解，得代数方程

$$\mu a_1 + h a_2^2 - (g_1 a_1^2 + 2g_2 a_2^2) a_1 = 0, \tag{9.4.3a}$$

$$\mu - \xi_0^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\delta + \frac{\delta^2}{2k_0} \right)^2 + h a_1 - (g_1 + g_2) a_2^2 - g_2 a_1^2 = 0. \tag{9.4.3b}$$

由于对称关系，$a_2 = a_3$. 为了了解方程(9.3.3)的解的稳定性，要将它的定态解(a_1, a_2, a_3)加上微扰$(\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3)$，并代入(9.3.2)中作线性稳定性分析. 这个过程比较繁琐，这里不详细列出. 图9.9(a)给出由线性稳定性分析得到的菱形斑图的相图. 图中偏离角($\Delta\theta$)是指对 120°角的偏离角度. 当系统控制参量 μ 逐渐增大时，在临界点 $\mu = 0$ 系统只出现六边形斑图($\Delta\theta = 0$). 越过临界点，所有在图 9.9(a)心形区内所得的斑图(包括六边形斑图在内)都是稳定的. 继续增大控制参量系统由六边形或菱形斑图跃迁至条形斑图. 条形斑图区与六边形/菱形斑图区有一定程度的重叠，在图中没有表示出.

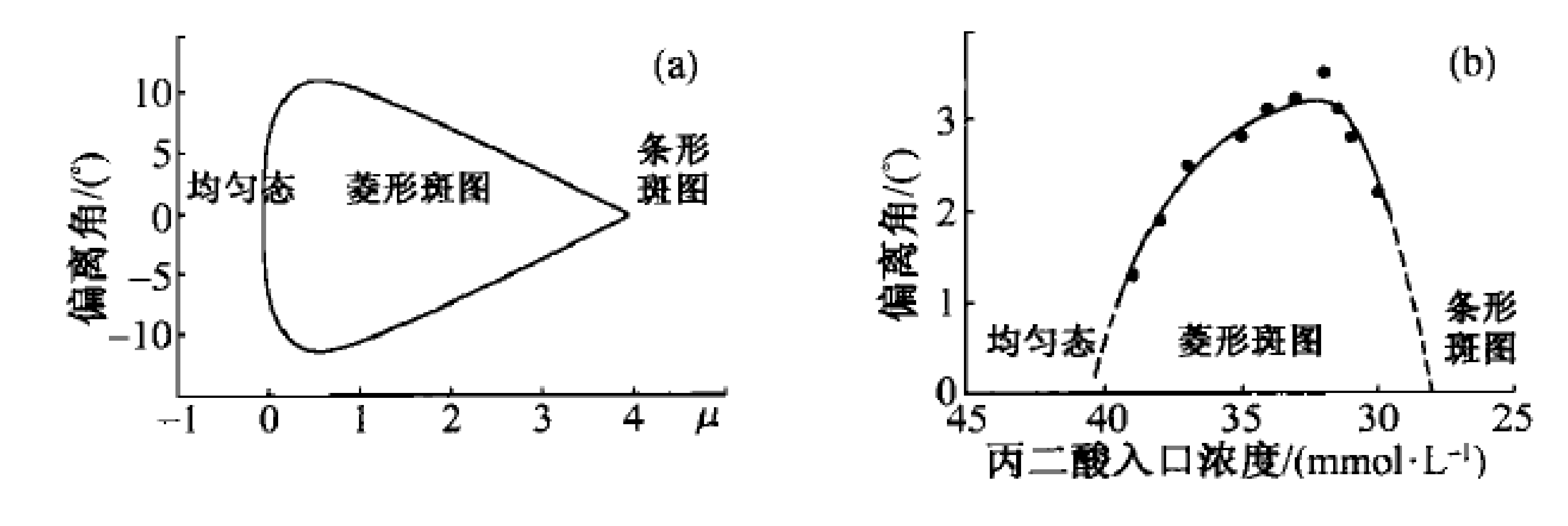


图 9.9 菱形斑图的相图

在 CIMA 反应实验中人们曾系统地研究了菱形斑图的形成. 图 9.10 给出了实验中观察到的菱形斑图的两个例子. 其中一个的夹角是 66°，见图之(a)，(c)，另一个是 57°，见图之(b)，(d). 在实验中，区分菱形斑图的最方便的方法是对斑图做二维空间傅里叶变换. 在傅里叶空间，对于规则的六边形图纹，斑图能

谱的角度分布是波数相等的六个等强度的峰，相邻峰之间相差 60°角；对于条形图纹，斑图能谱的角度分布是波数相等的两个等强度的峰，相邻峰之间相差 180°角；而对于菱形图纹，斑图的能谱的角度分布是三对峰，其中一对峰的波数和强度都是与另两对峰不同，相邻峰之间的相差角度也不是 60°. 图 9.10(e)，(f)分别是图(c)，(d)的能谱角度分布图.

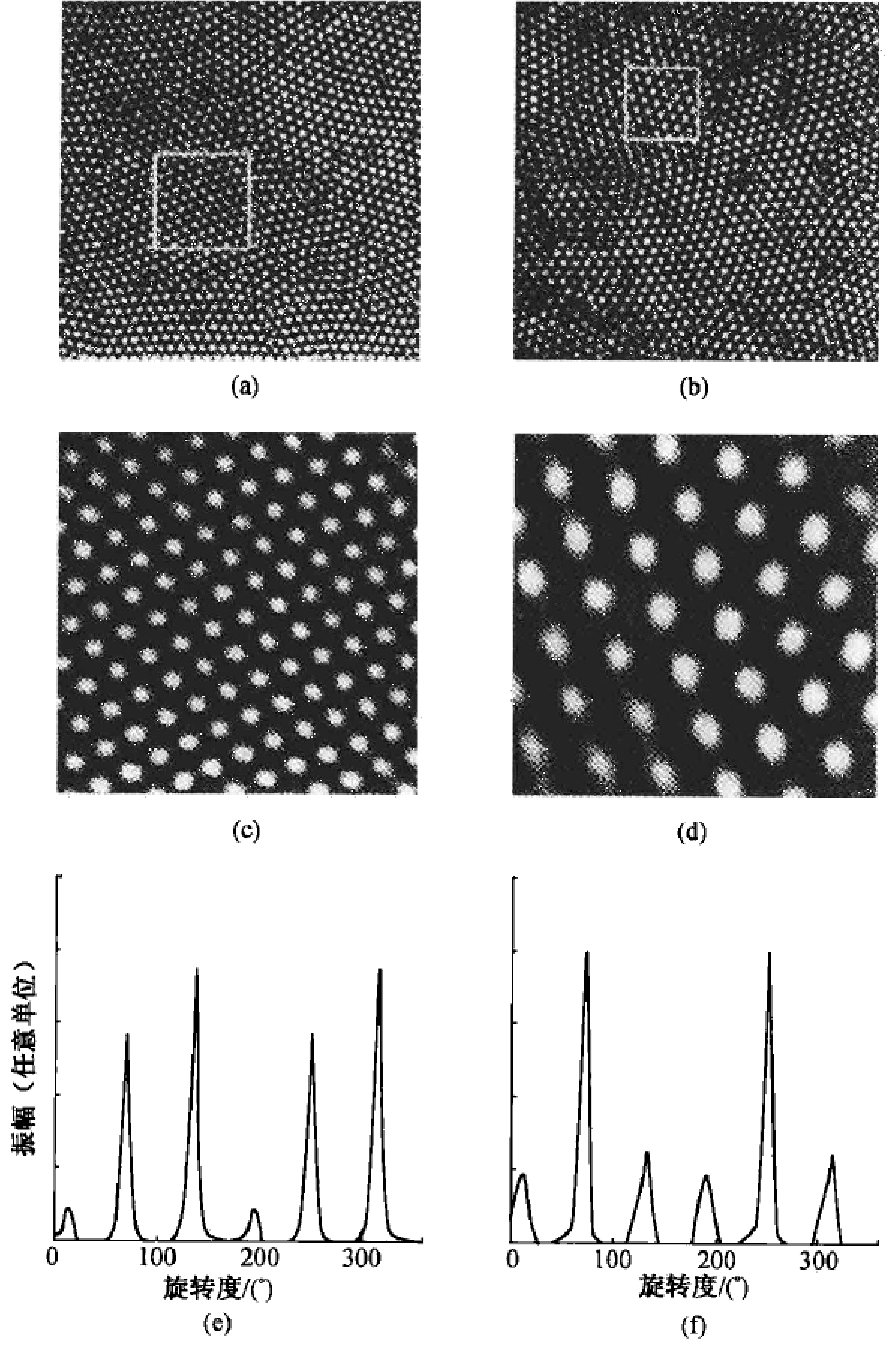
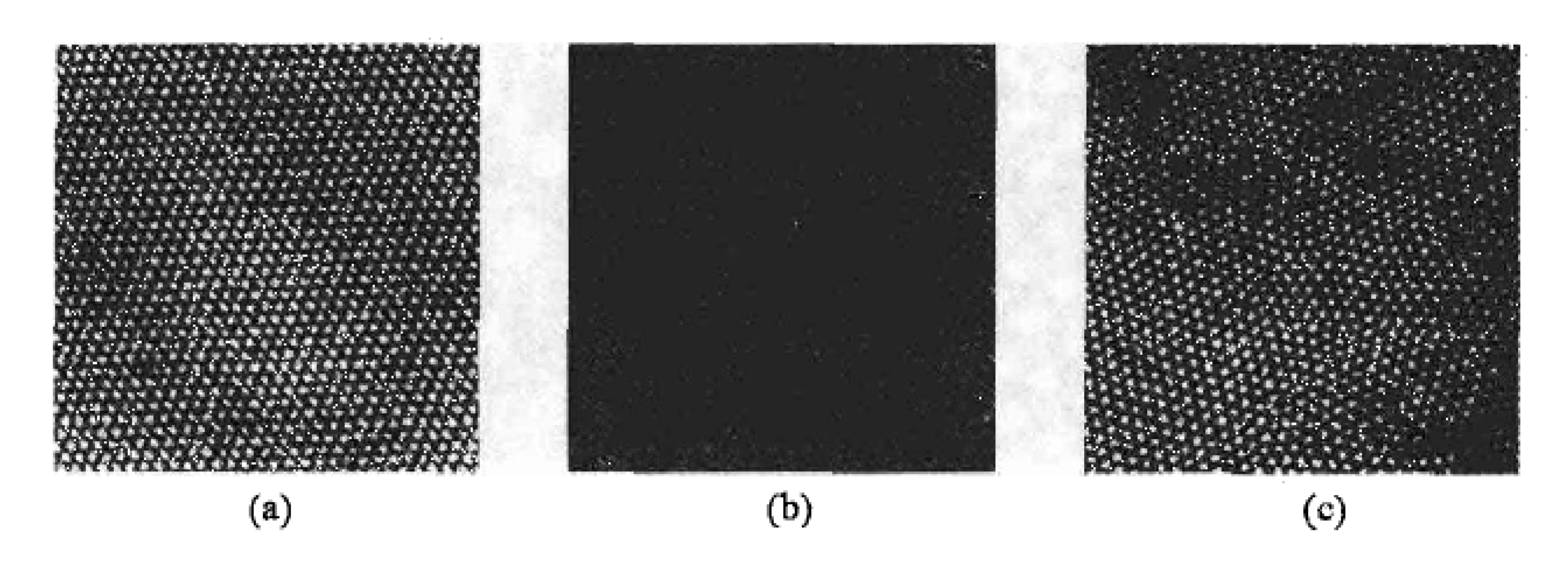


图 9.10　实验中观察到的菱形斑图

在实验中，菱形斑图的获得需要将系统从均匀态忽然变化至离开临界点的某个控制参量点. 如果将控制参量足够缓慢地从均匀态向失稳方向移动，就只能得到六边形图纹. 离开临界点后六边形图纹会保持下去，因为它仍然是一个稳定态. 也就是说系统会被锁定在六边形斑图上. 当控制参量突然跳至六边形/菱形斑图区时，系统的不同区域会同时产生不同的斑图，如图 9.10(a)，(b)所示. 每一个区域都包含相当规则的菱形图纹，它们的特征角度各不相同，包括特征角为 60°的六边形图纹.

菱形斑图只有在它的特征角为 60°左右的一个区域内才是稳定的. 在实验中，可以选各种特征角不同的菱形斑图作为系统的初始态，来研究它的稳定性. 具体做法是，以带有菱形斑图的强光照射系统，因为 CIMA 反应有光敏性，这个菱形斑图就被"印"在系统上了. 在实验中"印"上的菱形斑图的角度变化为 45°到 75°，波长被小心地控制在系统的特征波长上. 初始条件为六边形斑图态总是稳定的，特征角在一定范围内的菱形斑图也是稳定的. 但如果特征角超过了这个范围，菱形斑图就变得不稳定. 图 9.11 是实验中观察到的不稳定菱形斑图随时间的演化过程.



(a) (b) (c)

图 9.11 实验中观察到的菱形斑图失稳

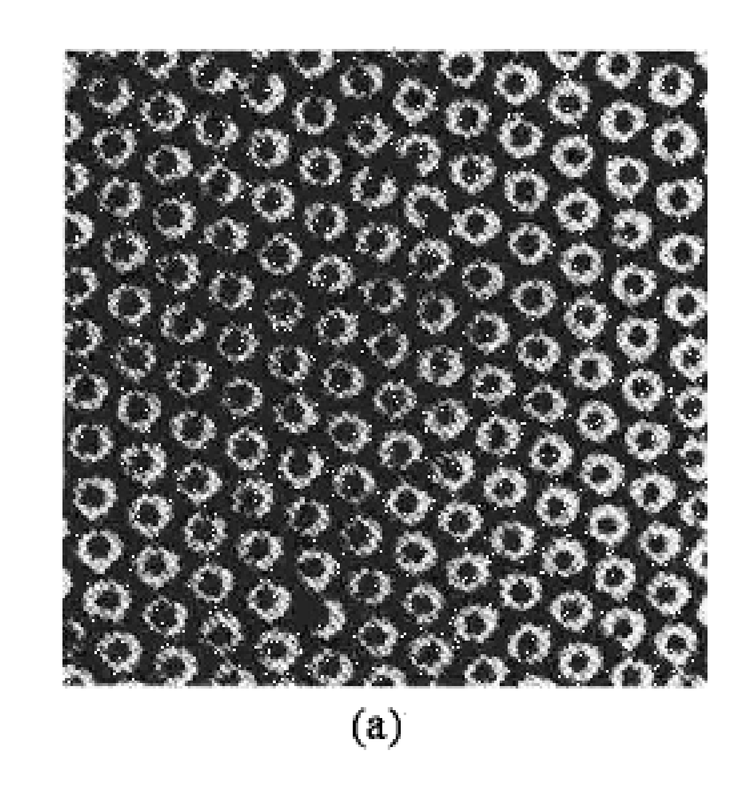
图 9.9(a)的理论预测在实验中也得到了定性的符合. 由于在一定范围内各种不同特征角的菱形斑图可以共存，在实验中只能用特征角的均方差作为一个度量来构造类似于图 9.9(a)的相变图. 具体做法是先找出所有斑图点的中心位置，再将相邻的斑图点用线连接并计算连线之间的角度. 图 9.9(b)给出特征角均方差偏离 60°角的大小随丙二酸浓度的变化，它与图 9.9(a)的理论计算定性吻合.

需要指出的是虽然菱形斑图的出现对应于一个对称破缺(系统由 D_6 群变为 D_2 群)，但它的出现不应该算做一个非平衡相变. 原因是与它对应的六边形斑图也还是稳定的. 而且可以证明它比菱形图纹更稳定. 也就是说，菱形斑图的

出现不伴随任何一个旧态的失稳. 我们知道任何一个相变,不论是非平衡相变还是平衡相变,都伴随着系统内某种对称性的改变. 但系统内的一种对称性改变不一定伴随着系统的一个相变. 菱形斑图的出现就是一个例子.

§9.5　图灵斑图的研究方向

从目前情况看,图灵斑图在初级分岔点附近的动力学行为已被人们比较清楚地了解,实验结果与理论有定性的吻合. 当系统在初级图灵分岔点附近时,由于系统对图纹波长的选择是单一的,或只是一条较窄的波带,图纹花样的自组织受图形选择规律,即空间共振规律的约束,只局限于几种简单的晶态上,如六边形,条形,四方形,特征角不远离 60°的菱形斑图等. 图灵斑图的失稳也只有爱克豪斯失稳、扭曲失稳及交叉失稳等几种简单的现象. 当系统远离分岔点时,系统有可能出现更多的再分岔,从而产生不同波长组成的为数众多的复合晶态斑图,甚至出现准晶态. 图 9.12(a)就是在实验中观察到的一类复合晶态的斑图,称为黑眼斑图(black-eye pattern)[62]. 从二维傅里叶变换(见图 9.12(b))中可以明显看出,黑眼斑图中的黑眼是由于原六边形斑图的三个模 $\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3$ 的线性组合 $\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_3-\boldsymbol{k}_1$ 形成的. 一种猜测是,当这组新模被包括进不稳定波矢区时,由于出现新的空间共振关系,系统选择了黑眼斑图. 但是这种理论解释现在还没有实验方面的进一步证据. 另一个可能的解释是系统变为具有三维结构的体心立方斑图. 从一个特定的角度观察,体心立方斑图的二维投影也会表现出图 9.12(a)所示的黑眼斑图. 最近我们的实验否定了第二种理论解释,但也没有足够证据支持第一种解释.


(a)

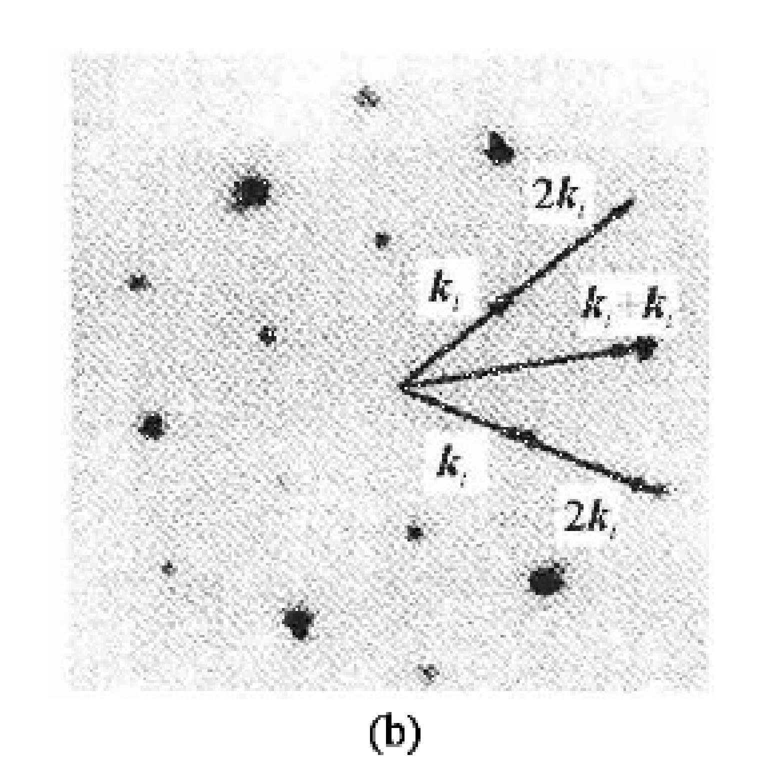
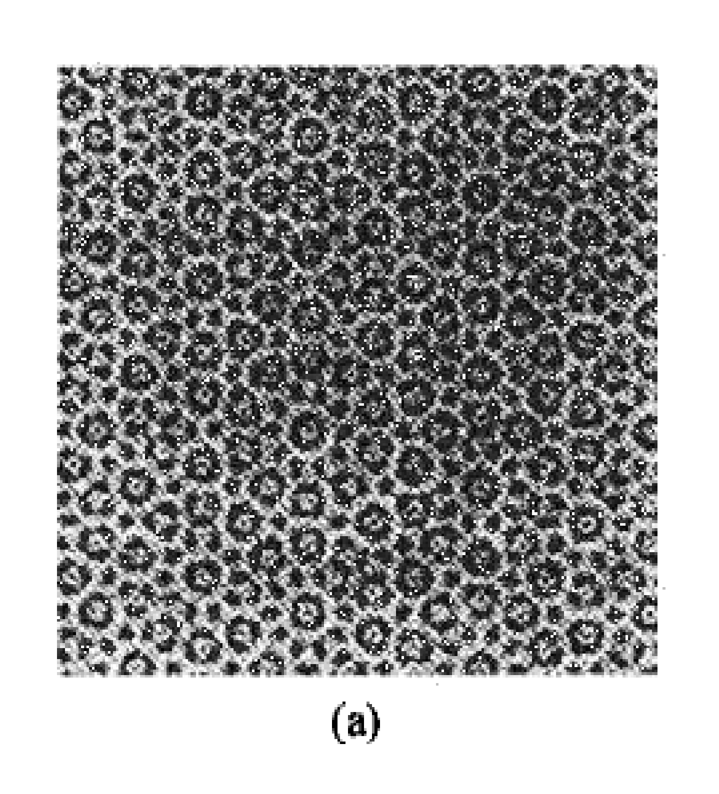
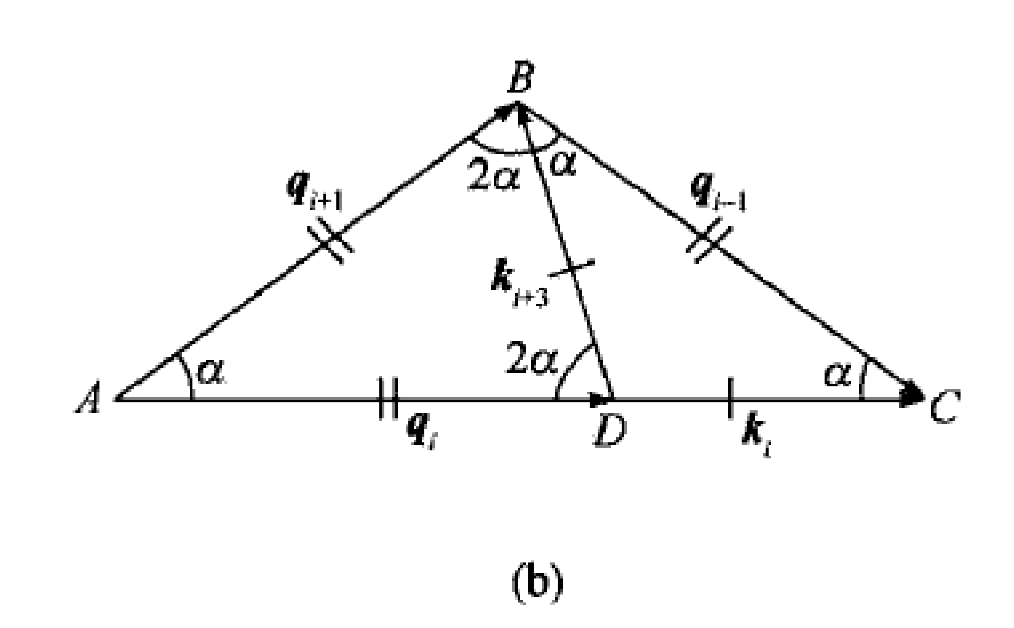

(b)

图 9.12　实验中观察到的黑眼斑图

另一个具有吸引力的目标是在反应扩散系统中寻找准晶结构. 准晶态是由两组波数不同的模所组成的. 怎样在实验中制造准晶态并研究它的稳定性，是一个很有趣的问题. 图 9.13(a)是数值模拟中观察到的一个 10 重旋转对称的准晶态. 所研究的模型系统是双变量耦合的斯威福特-豪痕博格方程[63]. 这个二维准晶态是由 10 对波矢组成的：5 对短波矢 $\boldsymbol{k}_i(|\boldsymbol{k}_i|=k)$，5 对长波矢 $\boldsymbol{q}_i(|\boldsymbol{q}_i|=q)$. 相邻 $\boldsymbol{k}_i$ 之间与相邻 $\boldsymbol{q}_i$ 之间的夹角都是 36°，$\boldsymbol{k}_i$ 与 $\boldsymbol{q}_i$ 同方向. 它们在傅里叶空间的关系如图 9.13(b)所示. 为了满足共振关系，k 与 q 的比值必须一定. 不难看出当 $k/q=2\sin(\pi/10)$ 时，波矢之间满足共振关系

$$\boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{q}_{i+1} - \boldsymbol{k}_{i+3}, \quad \boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{k}_{i+1} - \boldsymbol{k}_{i+4}. \tag{9.5.1}$$


(a)



(b)

图 9.13 数值模拟中观察到的准晶斑图

对应的振幅方程很容易由对称性原则导出：

$$\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} = \mu_1 A_i + a(A_{i+1}\bar{B}_{i+3} + \bar{A}_{i+4}B_{i+2}) + 2bB_{i+1}\bar{B}_{i+4} - 3\alpha A_i[|A_i|^2 + 2(|A_{i+1}|^2 + |A_{i+2}|^2 + |A_{i+3}|^2 + |A_{i+4}|^2)], \tag{9.5.2a}$$

$$\frac{\mathrm{d}B_i}{\mathrm{d}t} = \mu_2 B_i + c(B_{i+3}\bar{A}_{i+4} + B_{i+2}\bar{A}_{i+1}) + 2\mathrm{d}A_{i+2}\bar{A}_{i+3} - 3\alpha B_i[|B_i|^2 + 2(|B_{i+1}|^2 + |B_{i+2}|^2 + |B_{i+3}|^2 + |B_{i+4}|^2)]. \tag{9.5.2b}$$

其中 A_i 是波数为 $\boldsymbol{q}_i$ 的模的振幅；B_i 是波数为 $\boldsymbol{k}_i$ 的模的振幅. 准晶态在晶体结构中比较容易制造. 关键是选择两种尺度符合空间共振关系的物质. 在反应扩散系统的实验中，制造准晶的难点是怎样在系统图灵失稳时压制六边形图纹与条形图纹的产生. 这在反应扩散系统中很不容易实现. 迄今人们还没有想出好的办法.

另一个引人注目而没有满意的理论解释的问题，是怎样描写系统中自然形成的缺陷与粒状边界. 当图灵分岔出现时，系统内所有区域内同时生长出图灵斑图. 由于系统的旋转对称，不同区域产生的斑图具有不同的取向，因而在交界处会出现粒状边界和点缺陷. 实验中观察到这些点缺陷与粒状边界并不是定态的，而是以一个极缓慢的速度游走. 游走的规律因为时间尺度太大现在还没有作系统的观察. 从理论上讲这是缺陷动力学问题. 这个理论的发展将对其他学科，如材料学有很大影响. 实验中曾系统地观察到因有缺陷而引起的时空无序态. 图 9.14 显示了这个无序态. 由于"混沌"一词在非线性动力学中有明确的含义，这类斑图被称为化学湍流. 化学湍流态的出现是由于六边形或条形斑图失稳引起的. 当系统远离图灵分岔时，在一定条件下，系统中的点缺陷数目随控制参量忽然大幅度增加，这些缺陷迅速破坏原有的有序结构，产生出如图 9.14 所示的化学湍流态. 湍流态是由许多小的斑点与条纹不规则地混在一起组成的. 它们随时间变化的速率比有序结构中的缺陷快 10 倍左右. 在实验中曾对这类时空无序态的产生与动力学行为做过系统的实验观察[50]，证明它是一类缺陷引起的湍流(defect-mediate-turbulence). 但由于缺乏相应的理论指导，这项工作还没有确定的结果.

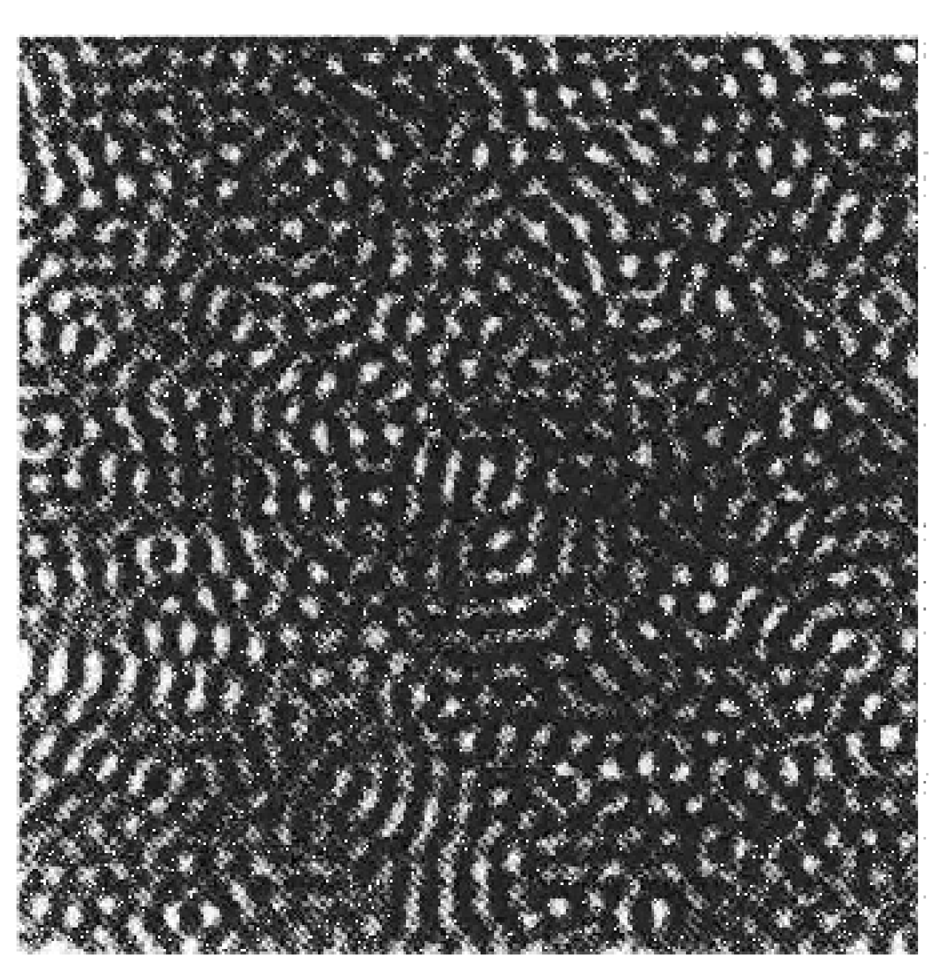


图 9.14　实验中观察到的化学湍流斑图

最后讨论一下图灵-霍普夫分岔交叉时发生的切空间(co-dimension)上系统的行为. 在第八章曾经介绍过，利用调节活化子与阻滞子的扩散系数比值，即在实验中调节淀粉的浓度，可以把系统定在图灵分岔与霍普夫分岔的交叉点附近的位置. 在这种情况下，图灵分岔出现的空间振荡模与霍普夫分岔出现的时间振荡模都是主动模，描述此类行为的振幅方程是两个模的耦合. 在一级微扰

近似下振幅方程由如下形式：

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\mu_T T-g|T|^2T-\lambda|H|^2T+D_T\nabla^2T, \tag{9.5.3a}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\mu_H H-(\beta'+\mathrm{i}\beta'')|H|^2H-(\delta'+\mathrm{i}\delta'')|T|^2H$$
$$+(D'_H+\mathrm{i}D''_H)\nabla^2H. \tag{9.5.3b}$$

这里 T 是图灵分岔产生的模的振幅，H 是霍普夫分岔产生的模的振幅. 注意在霍普夫分岔时系统不满足 $\boldsymbol{r}\to-\boldsymbol{r}$ 对称. 因此方程的系数一般是复数. 理论与数值模拟显示在图灵-霍普夫切空间上，系统会出现非常丰富的动力学行为，包括时空混沌. 图 9.15 是其中一个有序结构. 可以看到螺旋波与六边形斑图共存的现象. 这类现象的实验观察由于临界慢化的出现比较困难，有时测量一个点的渐近行为需要几十小时. 目前为止只有法国波尔多小组做过有限的系统观察[64].

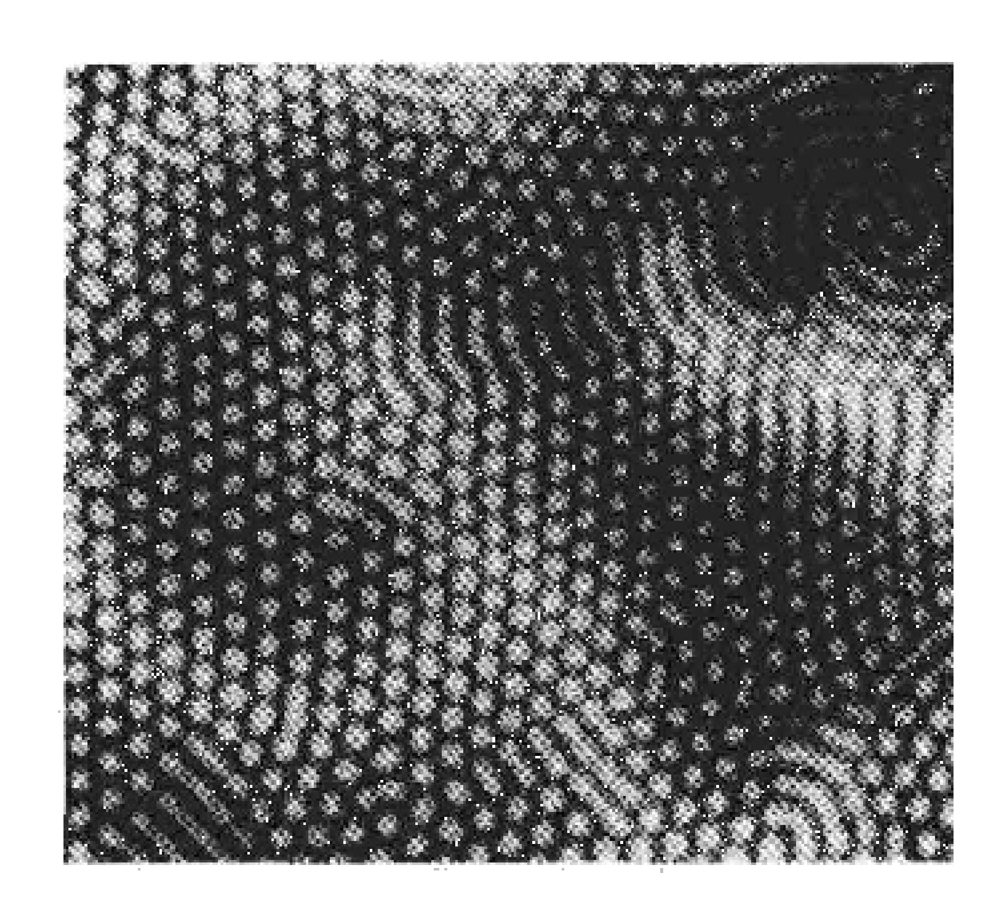


图 9.15　实验中观察到的螺旋波与六边形斑图共存的现象

总之，未来图灵斑图动力学的研究重点将集中于高级分岔点的动力学行为，其中包括不同波长和谐波的斑图空间共振对系统图纹选择的影响，准晶态的寻找，图灵-霍普夫切空间附近时空混沌的可能性，化学湍流产生的动力学机制，等等. 在这些课题中，理论科学家对某些现象已有一些推测，实验中也发现了某些相关的斑图. 但深入系统的实验研究还没有真正展开. 这些实验无疑会对斑图动力学的发展有举足轻重的影响.

第十章　螺旋波斑图

第八章中讨论的图灵斑图的形成,代表了一类由系统局部失稳引发的斑图形成机制.这类机制起源于系统在相空间中一个空间均匀定态的失稳.对应的非平衡相变可以通过对方程均匀定态解的微扰分析得到.结论具有很大的普适性.在斑图动力学的研究中,我们还会遇到另一类斑图形成的机制.这类斑图起源于系统的全局失稳.对于这一类斑图形成机制,系统在相空间中的空间均匀定态解是稳定的.但由于系统的某些特殊性质,它在一些情况下会自组织形成各类时空斑图.由于不同系统的动力学特征不同,一般来讲很难找到它们之间的共同特征.但是反应扩散系统中的一个典型类型——可激发系统是一个特殊情况.本章通过分析可激发系统中螺旋波的形成,介绍可激发系统的斑图动力学共性.首先介绍什么是动力系统的可激发性,并对螺旋波的产生做一个定性的描述.接下两节分析可激发系统的反应扩散方程,目的是推导出决定螺旋波动力学行为的两个重要关系,色散关系与本构关系.最后介绍在反应扩散系统中对螺旋波的实验研究,并将实验中得到的标度率与理论预测比较.

§10.1　螺旋波的产生

在诸多非线性系统的斑图花纹形成中,螺旋波动力学的研究一直是最为非线性科学家关注的课题之一.原因首先在于它们的普遍存在性.从流体中的瑞利-贝纳尔对流,到液晶中的伊辛-布洛赫(Ising-Bloch)相变,从反应扩散系统中的化学波,到黏性霉菌的自组织,从心脏中的心电信号,到卵细胞中钙离子波都可以看见它的踪迹.图 7.1 (e),(f)分别表示了黏性霉菌系统的螺旋波自组织斑图与卵细胞中钙离子波的螺旋波斑图.最近的理论与实验研究表明,螺旋波的动力学行为存在跨系统的普适性规律.研究和掌握这些规律具有很大的潜在应用价值.例如,生理学的实验表明,在心脏病人中观察到的一类心律不齐或心动过速现象,可能是由于心肌电信号出现螺旋波而引起的.而心颤至死的过程与螺旋心肌电波的失稳有密切关系.怎样把心脏中的螺旋波电信号消除,是当前心脏病学研究的热点之一.它的最后解决有待于非线性科学界对螺旋波规律的

彻底了解.非线性科学家关心螺旋波现象的另外一个重要原因,是组成螺旋波的动力学中心是一个时空点拓扑缺陷.从数学角度看它是一个奇点,而在奇点附近的足够小区域内反应扩散方程不再适用.怎样处理此类时空缺陷问题,一直是非线性科学家的研究课题,但迄今为止还没有找到解决此类问题的有效办法.在不远的将来,了解这类现象的主要途径还是要依靠物理实验及数值模拟.由于数值模拟受计算机容量与速度的限制不可能研究大尺度、长时间的二维时空动力学行为,物理实验还是研究螺旋波行为的主要手段.

反应扩散系统是螺旋波得以产生的最简单的系统之一.其中 BZ 反应是最早发现螺旋波现象的反应系统.虽然对 BZ 反应中的螺旋波的研究起始于 20 世纪 70 年代初,但迄今为止大多数工作都只局限于封闭系统,此类实验结果只可能对螺旋波作定性描述,而对其渐近行为及相变规律的了解与掌握没有实质性的帮助.在二维开放系统中对螺旋波的渐近行为与相变的实验研究始于 20 世纪 80 年代末到 90 年代初,作者在这个领域里做了许多工作,得到了一些重要的试验结果.这些结果很好地验证了一些螺旋波动力学理论的预测,并进一步推动了此领域的理论发展.

螺旋波在反应扩散系统中按其形式可分为两类,可激发系统中的螺旋波与时序振荡系统中的螺旋波.从表面上看,前者的特点是系统中除螺旋波中心外每个空间点都作弛豫型振荡,而后者作正弦振荡.从本质上讲,两者的起因截然不同.前者形成于系统的全局失稳,后者形成于系统的局部失稳;前者属于可激发波(trigger wave),后者是相波(phase wave);前者的波速受系统内反应物的扩散系数的限制,后者从原则上讲波速可以从零到无穷大.在 BZ 反应系统中,应用不同的控制参量,这两种形式的螺旋波都能够被观察到.

首先解释一下可激发反应系统.最简单的可激发系统可以用一个双变量反应扩散方程描述,其形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon}f(u,v)+D_u\nabla^2 u, \qquad (10.1.1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=g(u,v)+D_v\nabla^2 v. \qquad (10.1.1b)$$

其中 u,v 为系统变量,ε 为一个远小于 1 的量,等式右边第一项为反应动力学项,第二项为扩散项.与§8.2 式(8.2.1)相比,方程(10.1.1a)中多了一个小量 ε,它的存在是使变量 u,v 的动力学行为有了不同的时间尺度.BZ 反应的动力学模型(3.2.5)属于这种形式.式(3.2.5)的动力学函数在(u,v)坐标上的图形由图 10.1 给出.$f(u,v)=0$ 的曲线形状类似于一个倒 N 形,也就是说,给定一个 v 值,在一定区域内 u 可能有三个不同的定态值,这种情况是系统可激发的

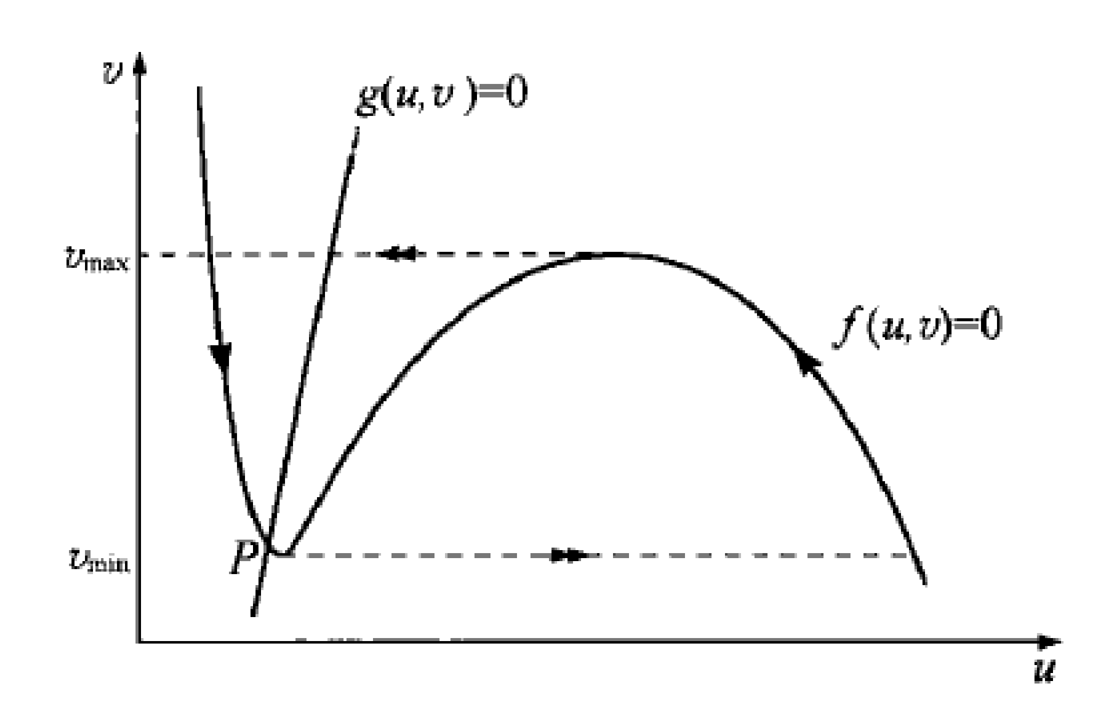


图 10.1 可激发系统在相空间的动力学行为

一个必要条件. 图 10.1 表明系统有一个唯一的均匀定态解(点 P). 对这个定态解做线性稳定性分析,可以证明它是渐近稳定的. 也就是说当系统受到一个小的扰动时,它会迅速回到它的均匀定态. 但是由于 $f(u,v)$ 函数的特殊性质,以及变量之间的动力学时间尺度有很大差别,系统对大的扰动是不稳定的. 如图 10.1 所示,当扰动超过一定阈值,对应于$v<v_{min}$时,由于变量 u 的动力学时间尺度远小于变量 v 的动力学时间尺度,系统首先会被很快地激发到远离定态解的区域,对应于 $f(u,v)=0$ 曲线的另一个分支,然后慢慢沿 $f(u,v)=0$ 曲线运动到 $v=v_{max}$的位置,再很快地跃迁至 $f(u,v)=0$ 曲线的稳定分支,最后弛豫到初始位置,其路径如图 10.1 中虚线所示. 这就是可激发系统. 需要说明的是,系统可激发性的一个重要量度是 ϵ 值的大小. 只有在 ϵ 值足够小时,系统才是可激发的,否则系统的稳定点将是一个稳定焦点,没有可激发性.

一个空间均匀分布的、由可激发单元所组成的反应扩散系统可能出现行波. 设想如果在空间上的某一个局限区域内系统被激发到临界值以上,反应物 u 的自催化效应使其本身的浓度在激发区猛然增加,从而使该区域与和它相邻的区域之间产生一个很大的浓度梯度. 由于扩散效应,反应物 u 将会扩散到与原激发区相邻的区域,并将它们拖向临界值以上,使得它们也被激发,这就形成了一个化学波锋. 在波锋的背后激发区会逐渐弛豫到激发前的状态. 从整体上观察,系统表现为一个孤立波从激发源向外移动. 如果激发源处的激发是周期性的,系统表现为一连串的行波. 行波的速度取决于激发强度与扩散速度. 由于系统的可激发性是由于变量 u 的自催化效应引起的,而变量 u 与 v 的相互作用使得系统恢复到原来状态,人们称 u 为触发变量(trigger variable),v 为恢复变量(recovery variable). 不同可激发系统中的触发变量与恢复变量各不相同. 在 BZ 反应中,触发变量是次溴酸浓度,恢复变量是催化剂的还原态浓度. 在另外

一些系统,如神经肌肉组织(心肌)中电信号的传波,触发变量是膜电动势,恢复变量是离子传导率;在黏性霉菌自组织形成的行波中,触发变量是 cAMP,恢复变量是膜感受器.在宏观世界里,流行病的传播也是行波形式.这时触发变量是病原,恢复变量是免疫力.在宇观世界里,螺旋状星系也可以看成是一种行波的自组织现象.在这个过程中触发变量是分子云密度,恢复变量是分子云温度.

在二维系统中如果激发源是一个点,系统会形成一个环状化学波向外扩张.如果这个点激发源是周期性的,则可能观察到环状系列行波,或叫靶波(target wave).如果激发源是一条线,系统会形成一个平行线状波.波的行进方向与线的方向垂直.那么螺旋波是怎样产生的呢?作这样一个假想实验:首先制造一个线状波,然后将线波从中间切断并抹掉一小段,也就是说在线波上造两个端点.现在考察这时行波的动力学行为.如图 10.2 所示,在远离端点的区域,线波波锋的邻近点受左右两个方向上扩散而来的触发变量的影响,比较容易受激发,因而波速较高;而在端点区域,线波波锋的邻近点只受到来自一个方向上的触发变量的激发,激发强度相对弱小,因而波速较慢.这样,从总体上看,当线波向前移动时,端点的相对位置会有一个滞后.这个滞后使得线波在端点附近弯曲,线波的局部运动方向发生变化(见图 10.2).由于这种端点效应总是存在,随着时间的增长,线状波会逐渐转变为螺旋波,图 10.2 表示了这个动力学过程.在这里有两点需要进一步说明.第一,螺旋波与靶波不同,它不需要一个周期性的激发源,因而它是自持续的;第二,螺旋波的组织中心是一个点缺陷,系统所有的动力学行为都受这个点缺陷行为的左右.怎样描述这个点缺陷的动力学行为是非线性科学中的一个难题.另外,在一个系统中制造一个缺陷比较容易,但是系统中一旦产生了缺陷就很难将之消除.研究螺旋波动力学规律的一个重要目的,就是要寻找消除螺旋波组织中心(点缺陷)的有效途径,这对心脏病研究将会产生重要影响.

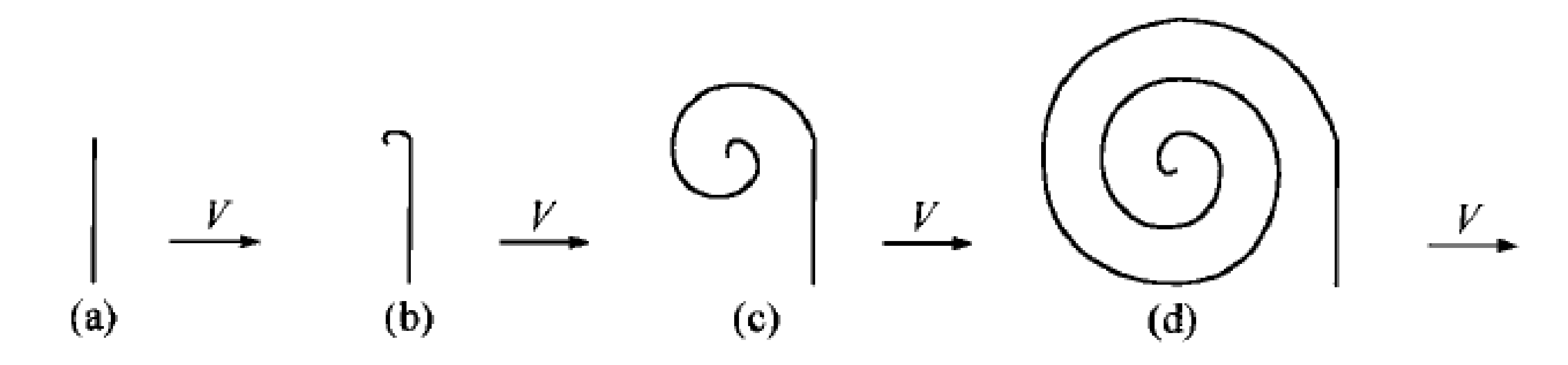


图 10.2 可激发系统中螺旋波的产生

在一些情况下,螺旋波也可以在振荡系统中观察到.振荡系统中行波的起因是周期振荡的时空相位差,因此在振荡系统中的行波又称相波.在霍普夫分

岔附近，一个反应扩散系统的化学振荡可以用如下公式描述：

$$c = c_0 + A(\boldsymbol{r}, T)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_c t + \phi_0)} + \mathrm{c.\,c.} \tag{10.1.2}$$

其中 T 是描写振荡振幅 A 的慢变量，ϕ_0 是相位角. 该系统应满足空间平移对称. 利用第八章所述的对称性分析方法，并注意到式(10.1.2)可能描写的是一个行波，振幅方程只满足空间平移对称，而不满足镜像对称. 这样，与图灵分岔的振幅方程比较，霍普夫分岔的振幅方程右边的系数一般是复数. 经过无量纲标度变换，霍普夫分岔附近的振幅方程有以下形式：

$$\frac{\partial A}{\partial T} = A + (1 + \mathrm{i}\beta)\nabla^2 A - (1 + \mathrm{i}\gamma)|A|^2 A. \tag{10.1.3}$$

该方程被称为金兹堡-朗道(Ginzburg-Landau)方程. 容易验证此方程存在平面波解：

$$A = F\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r} - \omega T)}, \tag{10.1.4}$$

其中 $F^2 = 1 - q^2$，$\omega = \gamma + (\beta - \gamma)q^2$. 如果在平面波上引入一个点缺陷，平面波会转化为螺旋波，道理与可激发系统中的螺旋波类似，只是缺陷点附近波速减慢的原因是由于相扩散引起的.

§10.2 色散关系

这一节将以 BZ 反应模型(3.2.2)为例分析可激发系统中行波的动力学规律，主要目的是介绍决定行波行为的色散关系(dispersion relation)，即行波波速与激发周期之间的关系. 在 BZ 反应动力学方程式(3.2.2)的右端加入扩散项，重新对时间与变量进行无量纲化处理，得如下形式的反应扩散方程：

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, v) + \varepsilon\frac{1}{k_5 B}D_u\nabla^2 u,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g(u, v) + \frac{1}{k_5 B}D_v\nabla^2 v.$$

这里 u 与 v 分别对应于方程(3.2.5)中的变量 x 与 z，

$$f(u, v) = u - u^2 - \hat{f}v\frac{u - q}{u + q}, \quad g(u, v) = u - v.$$

对空间自变量做如下标度变换：

$$\hat{x} = \left(\frac{k_5 B}{\sqrt{k_3 A D_u}}\right)x, \quad \delta = \frac{D_u}{D_v},$$

去掉空间坐标变量 $\hat{x}$ 上的帽子，得到无量纲的方程

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, v) + \varepsilon^2\nabla^2 u, \tag{10.2.1a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=g(u,v)+\varepsilon\delta\nabla^2 v. \tag{10.2.1b}$$

在上一节的定性分析中,我们知道以上方程可能支持行波.现在在一维空间中,寻找方程(10.2.1)的行波解.令 $u(x,t)=u(z)$, $v(x,t)=v(z)$, $z=x-ct$.这里 c 是常数,对应于系统行波的波速.在这个移动坐标系中,方程(10.2.1)变为如下常微分特征方程形式:

$$\varepsilon^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2}+\varepsilon c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}+f(u,v)=0, \tag{10.2.2a}$$

$$\varepsilon\delta\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2}+c\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}+g(u,v)=0. \tag{10.2.2b}$$

行波的波速 c 是此特征常微分方程的特征值.现在寻求此方程的一级近似解.首先令 $\varepsilon=0$,方程(10.2.2a)变为 $f(u,v)=0$.由图 10.1 知,对于 $v_{\min}\leqslant v\leqslant v_{\max}$, $f(u,v)=0$ 有两个稳定解 $u=h_{\pm}(v)$,这里设 $h_+(v)>h_-(v)$(第三个解介于 $h_+(v)$ 与 $h_-(v)$ 之间,它是不稳定的,所以不予考虑).现在假定系统处在这样的一种状态:在 $z<0$ 的空间中系统在 $u=h_+(v)$ 上,在 $z>0$ 的空间中系统在 $u=h_-(v)$ 上.那么在这两个极限之间必定存在一点($z=0$),在这个点上 $f(u,v)=0$ 的解变得不连续,因此不能再忽略方程中系数为ε 的项.这时需要考虑 $u=h_+(v)$ 与 $u=h_-(v)$ 之间的边界层的情况.边界层的厚度应为 $O(\varepsilon)$.

为了分析系统在边界层附近的函数形式,在方程中引入一个延展的坐标系:令 $\xi=z/\varepsilon$.在这个新的坐标变量下,方程(10.2.2)变为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}+c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+f(u,v)=0, \tag{10.2.3a}$$

$$\delta\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\xi^2}+c\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}+\varepsilon g(u,v)=0. \tag{10.2.3b}$$

边界层上的连续性要求当 ξ 趋于负无穷大时,方程(10.2.3)的解与 $u=h_+(v)$ 相对应;当 ξ 趋于正无穷大时,其解与 $u=h_-(v)$ 相对应.在一级近似中令 $\varepsilon=0$,并要求变量 v 对所有 ξ 有界.在这些条件下方程(10.2.3b)有唯一解:$v=v_0=$常数,其中 $v_{\min}<v_0<v_{\max}$.因此在 $u=h_+(v)$ 与 $u=h_-(v)$ 之间的边界层上,系统的一级($O(\varepsilon)$)近似解由下式决定:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}+c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+f(u,v)=0,\\&u(-\infty)=h_+(v_0),\quad u(+\infty)=h(v_0),\\&v=v_0.\end{aligned}\right\} \tag{10.2.4}$$

方程(10.2.4)是一个对于波速的特征值问题，波速 c 由 v_0 决定. 一般来讲 $c=c(v_0)$ 是一个对于 v_0 的单调减函数，见图 10.3. 将方程(10.2.4)两边同乘 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}\xi$ 并对 ξ 的全空间积分，由于当 $\xi\to\pm\infty$ 时 $u=\pm h(v_0)$，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}\xi=0$，我们有

$$c=\int_{h_-(v)}^{h_+(v)}f(u,v_0)\mathrm{d}u\bigg/\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2\mathrm{d}\xi, \tag{10.2.5}$$

如果存在 v^* 满足

$$\int_{h_-(v_0)}^{h_+(v_0)}f(u,v^*)\mathrm{d}u=0,$$

则系统存在 $c(v^*)=0$ 状态. 由图 10.3 看出在波锋位置的变量 $v=v_0$ 控制行波的波速与方向. 当 $v_{\min}<v_0<v^*$ 时，因为 $c>0$，系统形成"上跳"形波锋，波锋通过后系统的局部状态由 $u=h_-(v)$ 跳跃至 $u=h_+(v)$；当 $v^*<v_0<v_{\max}$ 时，$c<0$，系统形成"下跳"形波锋，波锋通过后系统的局部状态由 $u=h_+(v)$ 跳跃至 $u=h_-(v)$.

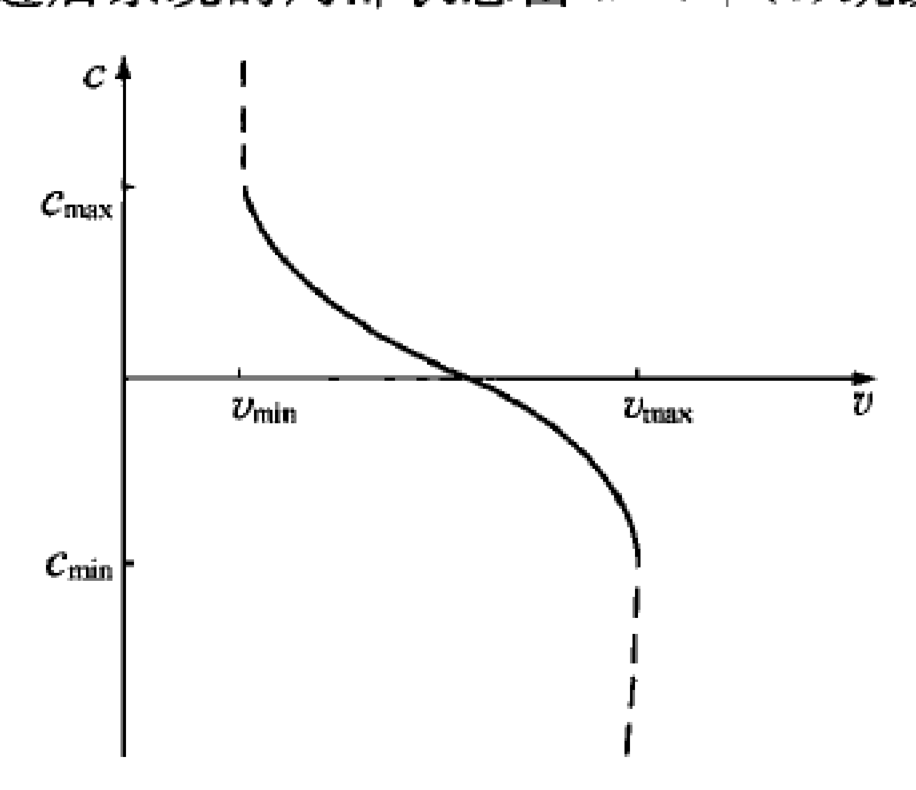


图 10.3　行波波速 c 与变量 v 的关系

行波波速的绝对值在 v_0 不太接近于 v^* 时为 $O(1)$，注意上式的 $c(v_0)$ 是一个无量纲量. 还原到有量纲量时，行波的波速有下列形式：

$$\text{波速}=c(v_0)\sqrt{k_3AD}. \tag{10.2.6}$$

这里 D 是触发变量 u 的扩散系数，量纲为[长度][时间]$^{-1}$，k_3 是触发变量在被激发时自催化反应的反应速度常数，k_3A 的量纲是[时间]$^{-1}$. 方程(10.2.6)被称路德(Luther)方程，它是德国科学家路德在 1906 年经过对反应扩散系统中的行波作量纲分析而得到的[65]. 设想一个化学反应 A+B→C，它的反应速度常数是 k. 显然系统的特征时间尺度 τ_R 来自化学反应速率，因而有 $\tau_R^{-1}=k[A][B]$. 系统的空间尺度必然与扩散系数相关：在反应特征时间内物质的扩散距离为 $(D\tau_R)^{1/2}$，因此波速应为 $c\propto(D\tau_R)^{1/2}\tau_R^{-1}\propto(Dk[A][B])^{1/2}$. 对于 BZ 反应系统，$c(v_0)\approx2$，$k\approx0.2\ \mathrm{s}^{-1}$，$D\approx2\times10^{-5}\ \mathrm{cm^2/s}$，因此波速应为 4×10^{-3} cm/s. 这个数

值大约等于在 BZ 反应实验中观察到的波速. 再看一看其他系统行波的行为. 对于乌贼鱼的神经轴突的电脉冲传导, $k\approx 3\times 10^3\ \mathrm{s}^{-1}$, $D\approx 0.034\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$, 传导速度应有 20 m/s 左右, 与实验数据相符合[66]. 心脏中电信号的转播速度约为 30 cm/s, 这是因为人心脏的膜电动势的反应速度与乌贼的神经轴突相比是后者的 1/10 ($k\approx 3\times 10^2\ \mathrm{s}^{-1}$), 同时"扩散"系数是后者的 1/600($6\times 10^{-5}\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$). 对于黏性霉菌的自组织行波, 它们速度大约在 5×10^{-4} cm/s 左右, 这与测量得到的 $D\approx 4\times 10^{-6}\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$, $k\approx 10^{-2}\ \mathrm{s}^{-1}$ 相吻合[67]. 在宏观系统中, 人们对狂犬病在狐狸群中的传播行为做了系统调查[68], 测量得 $k\approx 160\ \mathrm{y}^{-1}$, $D\approx 200\ \mathrm{km}^2/\mathrm{y}$, 模型得到的 $c(v_0)=0.28$, 从而方程(10.2.6)给出的传播速度应为 50 km/y, 大约在预料范围之内[69].

现在回到对可激发系统的分析. 设 (u_s, v_s) 是可激发系统(10.2.1)的均匀稳定态解: $f(u_s,v_s)=0$, $g(u_s,v_s)=0$, 其解落在 $u=h_-(v)$ 分支上. 并设系统的初始条件为非均匀的、宽度为 $2x_0$ 的矩形波:

$$u(x,0)=\begin{cases} h_+(v_s): \text{当 } |x|\leqslant x_0 \text{ 时}, \\ h_-(v_s): \text{当 } |x|\geqslant x_0 \text{ 时}, \end{cases}$$

$$v(x,0)=v_s,\quad -\infty < x < +\infty.$$

由于问题的对称性, 只需要考虑在 $x>0$ 时系统的行为. 在这个初始条件下, 一个波锋将在 $x=x_0$ 处形成. 并且, 如果 $v_{\min}<v_s<v^*$, 波锋将向右边以波速 $c(v_s)$ 传播. 在波锋到来以前的区域内, 系统保持在稳定态上; 在波锋过后, 变量 v 的变化由 $\partial v/\partial t=g(u,v)$ 决定. 这里将(10.2.1)中的 $\varepsilon\delta\nabla^2 v$ 忽略掉, 因为变量 v 的变化总是很缓慢, 它在空间的二阶微分通常非常小. 由图 10.1 知 $g(h_+(v),v)>0$, 所以在波锋过后变量 v 开始增加, 同时变量 u 也以 $u=h_+(v)$ 的形式随变量 v 变化. 当 v 增至 $v=v_{\max}$ 时, $h_+(v)$ 分支与 $h_0(v)$ 分支合并并消失. 这时系统从 $u=h_+(v)$ 分支跃迁至 $u=h_-(v)$ 分支, 一个下跳波锋就必然会形成, 通常称这个下跳波锋为行波的波背. 如果这时 $c(v_s)>c(v_{\max})$, 也就是说波锋的波速快于波背的"激发"波速, 行波的波速完全由波锋的速度决定, $c=c(v_s)$; 波背的行为由系统的自然弛豫时间决定. 如果 $c(v_s)<c(v_{\max})$, 也就是说波背的波速快于波锋的波速, 这时波背与波锋的距离会越来越近, 由于二者的时间差变小, 这使得变量 v 没有时间在波锋过后增长到 $v_{\max}$ 位置. 迫使下跳波形成时有 $v_b<v_{\max}$, 从而 $c(v_b)<c(v_{\max})$. 最终行波的波背会稳定在 v_b 上, $v^*<v_b<v_{\max}$, 满足 $|c(v_s)|=|c(v_b)|$. 在波背以后, $u=h_-(v)$, 所以 $g(u,v)<0$, v 逐渐减少至原来的稳定态 v_s 上.

由以上分析可知, 一个孤立波的波速由系统中稳定点 v_s 唯一地决定. 如果系统上有一个微扰源以周期 T 对系统做激发性扰动, 这时行波的波速就不再只

是 v_s 的函数，同时也与扰动周期 T 有关．设想系统在周期扰动下向外传播激发波．第一个激发波的波速与孤立波一样，$c=c(v_s)$．但是如果激发周期 T 足够短，第二个激发波会在局部系统弛豫到稳定态 (u_s, v_s) 之前就到来．设这时系统变量 v 的值是 v_2，因为 $v_2 > v_s$，所以对第二个波 $c(v_2) < c(v_s)$．对于连续激发波的不断到来，系统会逐渐自动调节到一个时空周期稳定态，这时在波锋与波背的位置上恢复变量 v 分别为 v_f, v_b，满足 $|c(v_f)| = |c(v_b)|$．对于激发周期，如果忽略变量在两个分支间跳跃所用的时间，我们可以将其分为两部分：$T = T_+ + T_-$，这里

$$T_+ = \int_{v_f}^{v_b} \frac{dv}{g(h_+(v), v)}, \quad T_- = \int_{v_b}^{v_f} \frac{dv}{g(h_-(v), v)}. \qquad (10.2.7)$$

很显然激发周期 T 与波速 c 都可以表达为 v_f 的函数．将这两个关系结合并去掉 v_f，就可以得到波速 c 与激发周期 T 的关系，这个关系叫色散关系．一般地讲 $c(v_f)$ 与 $T(v_f)$ 都是 v_f 的减函数，而对于足够大的 T，c 是 T 的增函数．当 $T \to \infty$ 时，回到孤立波的情形，$c \to c(v_s) \equiv c_{max}$，这里 c_{max} 是指系统孤立波的波速．当 T 减小时，v_f 增加，c 减慢．当 T 减少到一定值时，由于 v_f 很大，系统丧失了可激发能力，行波将不再产生．对于 BZ 反应扩散系统，利用方程(10.2.1)—(10.2.4)的数值解可得如图 10.4 所示的色散关系图．在一般情况下对于一个 T 存在着两个 c 值，其中高速度的 c 是稳定的，低速的 c 是不稳定的．系统并不一定在 (c_{min}, T_{min}) 处交换稳定性．对于 BZ 反应系统，稳定性的交换发生在高速分支上靠近转折点的位置，见图 10.4．

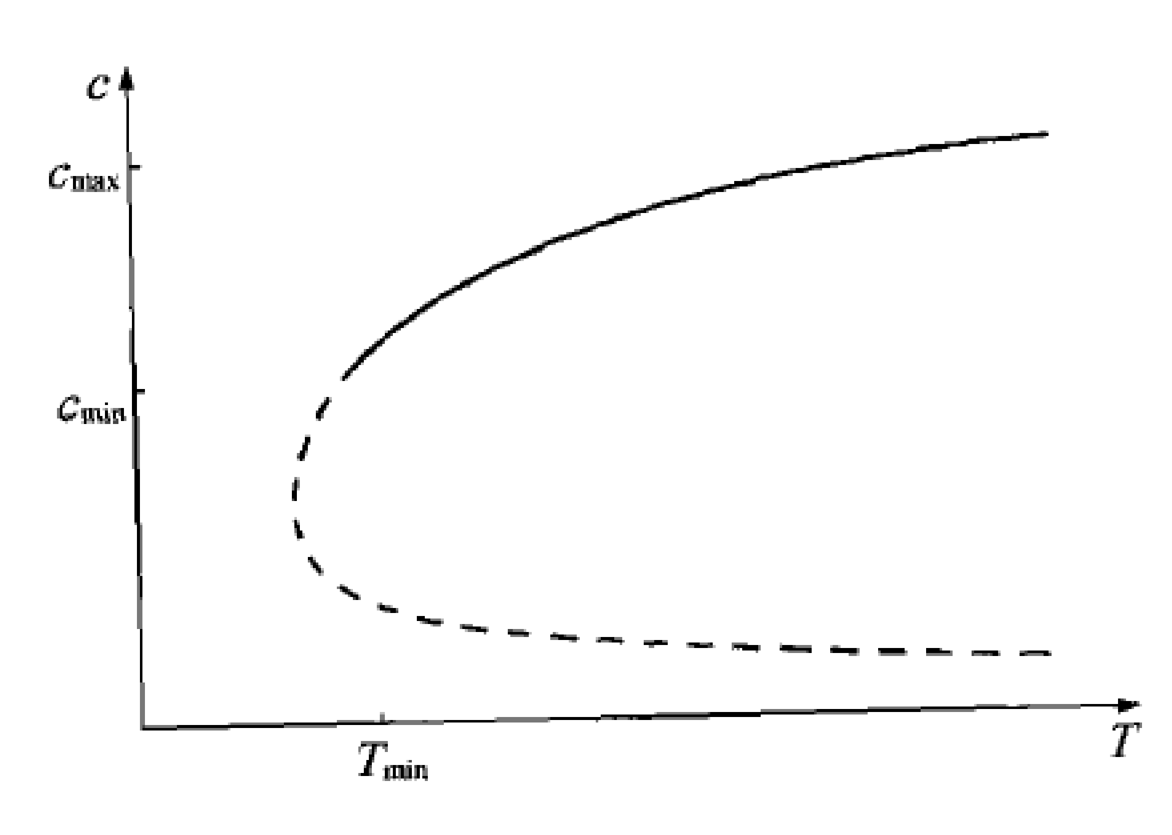


图 10.4 色散关系

得到色散关系的另一方法是对方程(10.2.1)作如下坐标变换：$\varphi = kx - \omega t$，这里 k 是周期行波的波数，ω 是振荡频率，φ 是相位角．这时(10.2.1)式变为

$$\varepsilon^2 k^2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} + \varepsilon\omega \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} + f(u,v) = 0, \tag{10.2.8a}$$

$$\varepsilon^2 k^2 \delta \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} + \varepsilon\omega \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} + \varepsilon g(u,v) = 0. \tag{10.2.8b}$$

然后，寻求方程(10.2.8)对 φ 的 2π 周期解. 在周期解的限制下系统的 k 与 ω 必须满足一定限制. 这是表达色散关系的另一种形式.

§10.3 本构关系

上节介绍的色散关系是在一维系统中得到的结果. 在高于一维的系统中，系统的行波会出现弯曲. 本章第一节中分析的螺旋波就是弯曲波锋的一个例子. 这时行波的速度不再仅是恢复变量 v_f 与激发周期 T 的函数，而且是波锋线上曲率的函数. 为了导出曲率对行波的影响，在分析中需要引入新的坐标系. 首先把方程(10.2.1)的坐标原点移到要研究的波锋对应的曲率中心上，做平移变换

$$x \to x - x_0, \qquad y \to y - y_0.$$

在这个变换下方程(10.2.1)的形式不变. 第二步，将方程(10.2.1)由直角坐标系表示变为以曲率中心为原点的极坐标表示，方程(10.2.1)变为

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = f(u,v) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\varepsilon^2}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g(u,v) + \varepsilon\delta \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\varepsilon\delta}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\varepsilon\delta}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}.$$

在波锋面上，切线方向是反应物浓度的等高线，因而在这个方向上的浓度梯度可以忽略不计. 可令

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0.$$

另外，极坐标的原点是曲率中心，因而有 $1/r = \kappa$. 这里 κ 是波锋的曲率. 经过这样的处理，以上方程变为

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = f(u,v) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \kappa\varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial r},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g(u,v) + \varepsilon\delta \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \kappa\varepsilon\delta \frac{\partial v}{\partial r}.$$

第三步，将坐标原点移到波锋面上，这一步对以上方程的形式没有影响. 最后，我们寻找系统的行波解，令 $r' = r - Nt$，得到

$$\varepsilon^2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r'^2} + \varepsilon[N + \varepsilon\kappa] \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r'} + f(u,v) = 0, \tag{10.3.1a}$$

$$\varepsilon\delta\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}r'^2}+[N+\varepsilon\delta\kappa]\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r'}+g(u,v)=0. \tag{10.3.1b}$$

这里 N 为波锋的法向速度. 当 $\kappa=0$ 时，以上方程还原成(10.2.2)式的情形. 根据上一节的分析知道，如果令 $\epsilon=0$，系统有一个波锋解：在波锋前方的空间中系统在 $u=h_-(v)$ 上；在波锋后方的空间中系统在 $u=h_+(v)$ 上. 与上节的分析方法一样，为了得到常微分特征方程(10.3.1)的解，需要在波锋附近将系统延展. 令 $\xi=r'/\epsilon$，代入(10.3.1)，得

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2}+[N+\varepsilon\kappa]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+f(u,v)=0, \tag{10.3.2a}$$

$$\delta\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\xi^2}+[N+\varepsilon\delta\kappa]\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}+\varepsilon g(u,v)=0. \tag{10.3.2b}$$

令 $\epsilon=0$，重复与上一节同样的分析得到

$$\begin{aligned}&v=v_0,\\&\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2}+(N+\varepsilon\kappa)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+f(u,v)=0,\\&u(-\infty)=h_+(v_0),\qquad u(+\infty)=h(v_0).\end{aligned} \tag{10.3.3}$$

与(10.2.4)相比得到

$$N=c(v_f)-\epsilon\kappa, \tag{10.3.4}$$

也就是说，波锋的法向速度等于平面波的波速加上一个曲率修正. 当波锋线向行波传导方向弯曲时($\kappa>0$)，波速会小于对应的平面波波速；当波锋线向行波传导方向弯曲时($\kappa<0$)，波速会大于对应的平面波速. 对于波背，由于 $c(v_b)<0$，同时 κ 与 N 的值都与对应波锋方向相反，所以总体效应与波锋一致. 方程(10.3.4)的结论与在第一节对螺旋波产生的定性分析所得到的结论相符合. 在实验中，该式与实验数据有很好的吻合. 方程(10.3.4)是在 ϵ 的一级近似下得到的，它只有当 $\kappa\gg1$ 时有效. 在 $|\kappa|=O(1)$ 时，可以将行波看成是平面波. 但在大曲率、慢速度行波中这类曲率效应就必须考虑.

方程(10.3.4)被称为可激发系统中行波的“程函”(eikonal)关系，与几何光学中的程函关系一致. 程函关系决定在给定初始值后波锋的位置随时间的变化. 这类关系还可以在其他系统中推导出来，比如，火焰锋线运动，晶体的生长，等.

对于可激发的 BZ 反应系统，在将方程(10.3.4)的物理量纲还原后，程函关系变成 $N=c-D\kappa$. 其中 D 是触发变量 u 的扩散系数，$D\kappa$ 项决定曲率对波速的影响. 这种影响只有在行波曲率半径的空间尺度与扩散尺度相当时才变得明显起来. 对于可激发波来说，由路德关系 $c\propto(D/\tau_R)^{1/2}$ 知，曲率的影响在 $D\kappa\approx(D/\tau_R)^{1/2}$

时才会明显，这要求曲率半径大约在$(D\tau_R)^{1/2}$左右. 对于反应扩散系统，$D\approx 10^{-5}\ cm^2/s$，$\tau_R\approx 1\sim 100\ s$，因此，当曲率半径为0.03～0.3 mm时，曲率对波速的影响变得显著. 这样的情形在反应扩散系统中有两种状态下会出现，一是当两个同心波相碰撞时，碰撞的边界处会产生很大的负曲率，它使碰撞产生的边界尖点迅速弥合. 另一个状态是行波出现点缺陷，在缺陷点上曲率为很大的正值，它使波速在这个局部领域变慢，这与第一节从定性分析出发得出的结论一致.

在继续分析推导本构关系之前，先看一看(10.3.4)式对行波稳定性的影响. 设想有一平面波以波速c移动. 如果在此平面波上加一个速度微扰，这个微扰使行波在某一区域波锋突出一点. 此时在波锋突出的位置上锋线曲率为正；在波锋突出的两端锋线曲率为负. 由程函关系可知，在突出点的位置波速减慢，而它的两端波速加快，总的效果是使突出点渐渐地不突出，最后回到平面波形式上. 同理，如果微扰使得波锋在某一个区域落后一点，曲率效应将会使它渐渐加速赶上，重新回到平面波形式. 所以程函关系在$D>0$时保证了行波行进状态的稳定性. 在某些系统中，程函关系中的D不再是简单的扩散系数，而是一个可正、可负的量. 当此量为负值时，波锋对微扰是不稳定的. 这时微扰将会被放大，系统经过一个非平衡相变形成一个定态的时空斑图或时空混沌，这种情况在第十二章中将作详细讨论.

对于一个逆时针旋转的螺旋波，它的波锋曲线满足如下关系：

$$x = r\cos(\theta(r) - \omega t), \qquad y = r\sin(\theta(r) - \omega t).$$

对应的波锋法线速度与曲率分别为

$$N = \frac{\omega r}{(1+\psi^2)^{1/2}}, \quad \kappa = \frac{\psi'}{(1+\psi^2)^{3/2}} + \frac{\psi}{r(1+\psi^2)^{1/2}}. \qquad (10.3.5)$$

这里$\psi(r)=r\theta'(r)$. 将(10.3.5)式代入(10.3.4)式得到一级微扰近似下关于ψ的常微分方程：

$$r\frac{d\psi}{dr} = (1+\psi^2)\left(\frac{rc}{\varepsilon}(1+\psi^2)^{1/2} - \frac{\omega r^2}{\varepsilon} - \psi\right). \qquad (10.3.6)$$

从方程(10.3.6)可以得到$\psi(r)$，从而进一步得到螺旋波的具体形式：

$$\theta(r) = \int r^{-1}\psi(r)dr. \qquad (10.3.7)$$

方程(10.3.6)的解取决于体系的边界条件. 这个问题对于螺旋波来说，在很大程度上是悬而未决的. 原因是现在还无法确定缺陷点的运动形式. 为了简单起见，这里首先采取这样的边界条件：

$$\psi(r=0) = 0, \qquad \psi(r\to\infty) = kr. \qquad (10.3.8)$$

这里 $k=\omega/c$ 是螺旋波在远离中心时的波数. 这个边界条件的含意是螺旋波的缺陷点是固定不动的. 在远离缺陷点时,螺旋波锋为阿基米德螺线. 至少在远离缺陷点上,这样的边界条件是合理的,并与实验相符.

在 1951 年,伯顿(Burton) 等人分析了在边界条件(10.3.8)下方程(10.3.6)的解的形式[70],并指出在 r 很小时,(10.3.6)的解有如下形式:

$$\psi = -\frac{cr}{2\varepsilon} + \frac{\omega r^2}{3\varepsilon} + O(r^3), \tag{10.3.9}$$

而在 r 很大时解的形式为

$$\psi = -\frac{\omega r}{c} - \frac{\omega\varepsilon}{c^2} + O(1/r). \tag{10.3.10}$$

可以证明,函数

$$\psi = -\frac{\omega r}{c}\left[1 + \left(\sqrt{3} + \frac{cr}{\varepsilon}\right)^{-1}\right] \tag{10.3.11}$$

在 $r\to 0$ 时演化至(10.3.9)式,在 $r\to\infty$时演化至(10.3.10)式. 其先决条件是螺旋波的旋转频率 ω 与波速 c 的关系满足

$$\omega = m^* c^2/\varepsilon, \tag{10.3.12}$$

其中 $m^* = (3-\sqrt{3})/4 = 0.317$. 将(10.3.11)式积分可得螺旋波锋的分析表示式:

$$\theta(r) = -m^*\left[\frac{cr}{\varepsilon} + \ln\left(\sqrt{3} + \frac{cr}{\varepsilon}\right)\right] + \text{const.} \tag{10.3.13}$$

式(10.3.13)的近似分析结果,与对方程(10.3.6)的数值积分结果相比有非常好的吻合. 但吻合最优时要求 $m^* \approx 0.331$,而不是0.317. (10.3.12)式在不同文献中被称为本构关系(constitutive relation),曲率关系或临界关系(critical relation).

在实验中人们发现螺旋波的端点并不是静止不动的. 对于周期性螺旋波,它的端点是沿一个小圈作圆周运动. 为了与实验结果相符合,方程(10.3.6)的边界条件应定为

$$\psi(r_0) = 0, \qquad \psi(r\to\infty) = kr. \tag{10.3.14}$$

其中 r_0 为螺旋波端点轨道的半径. 应用伯顿的方法,可能得到如下形式的近似解:当 $r\to r_0$ 时,

$$\psi = -(\bar{\omega} - \bar{c}) + \left(\frac{\bar{r}}{r_0}\right) + \frac{1}{2}\bar{c}\left(\frac{\bar{r}}{r_0}\right)^2 + O(\bar{r}^3), \tag{10.3.15}$$

其中 $\bar{r} = r - r_0$, $\bar{\omega} = \omega r_0^2/\varepsilon$, $\bar{c} = cr_0/\varepsilon$. 当 $r\to\infty$时,

$$\psi = -\left(\frac{\bar{\omega}}{\bar{c}}\right)\left(\frac{\bar{r}}{r_0}\right) - \left(\frac{\bar{\omega}}{\bar{c}}\right)(1+\bar{c})^{-1} + O(1/r). \tag{10.3.16}$$

可以证明函数

$$\psi = \frac{\alpha\bar{r}}{r_0} + \frac{\beta\bar{r}}{r_0 + \gamma\bar{r}} \tag{10.3.17}$$

在 $\bar{r}\to 0$ 时演化至式(10.3.15)，在 $\bar{r}\to\infty$ 时演化至式(10.3.16). 这里 $\alpha = -\bar{\omega}/\bar{c}$，$\beta = \bar{\omega} + (\bar{\omega}/\bar{c}) - \bar{c}$，$\gamma = -\bar{c}/2\beta$，条件是

$$\omega = m^* c^2/\varepsilon + \alpha^* c^4 r_0^2/\varepsilon^3, \tag{10.3.18}$$

其中：$c/\varepsilon > 10$，$r_0 \approx 0$，$m^* \approx 0.331$，$\alpha^* \approx 0.097$. 数值积分的结果显示关系式(10.3.18)是对微分方程(10.3.6)+(10.3.14)的解的一个非常好的近似. 比较(10.3.18)与(10.3.12)式看到两个本构关系在一级近似，即 $r_0\to 0$ 是相等的，只是 m^* 值有一些改变.

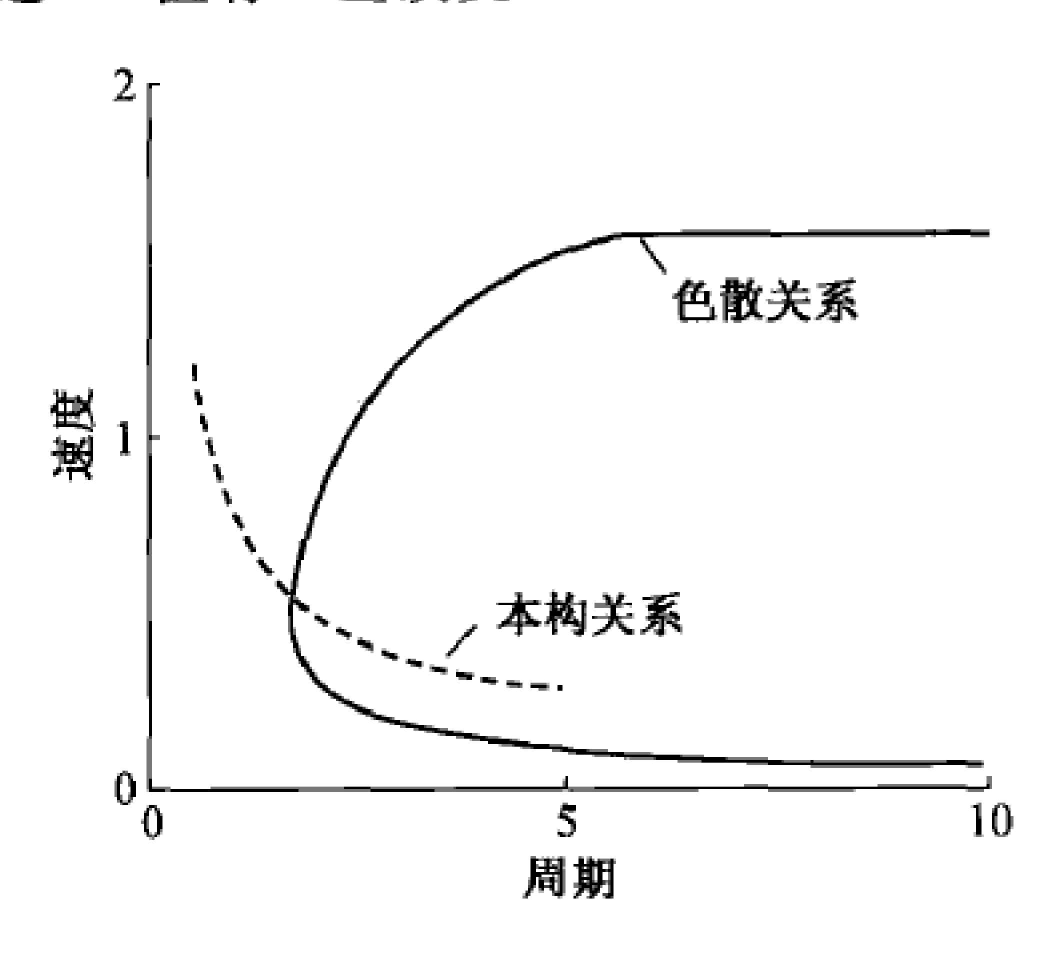


图 10.5　螺旋波的色散关系与本构关系

本构关系中的波速 c 在波锋远离缺陷点时，即波锋曲率近似为零时与波锋的法向波速一致. 在这些区域内体系的行波可以看成是平行波，所以它也应同时满足上一节讨论的色散关系. 色散关系与本构关系的结合，决定了螺旋波的动力学行为，即波速、波数与频率之间的关系. 图 10.5 给出了从 BZ 反应模型(10.2.1)中计算得出的色散关系与本构关系，这两个关系完全决定了可激发 BZ 反应系统中螺旋波的动力学行为.

在以上的分析中，决定螺旋波本构关系的方程不涉及具体动力学过程，即方程(10.3.6)不包含具体的动力学函数 $f(u,v)$，$g(u,v)$. 所以本构关系是普适性的，适用于一切可激发体系，与具体动力学形式无关. 而色散关系的推导一定要引入具体的 $f(u,v)$，$g(u,v)$ 函数，对于不同的系统它的形式不同.

最后要指出的是，上节与本节讨论的理论只是可激发系统行波理论的一种. 它是泰森(Tyson)和基诺(Keener)在 20 世纪 80 年代逐步完成的. 作者认为这个理论比较好地说明了下节要描述的实验. 从 20 世纪 80 年代以来，许多科学家对可激发系统中行波的动力学行为做了大量的理论研究. 由于关于这方面的研究文献太多，作者在这里不能一一介绍. 有兴趣深入研究这个问题的读者可以参阅参考文献[64]和[71]以及它们所引用的文献.

§10.4 螺旋波的实验研究

在反应扩散系统中,化学螺旋波的实验研究自从1968年扎布亭斯基首次在BZ反应系统中发现以来,一直是一个实验研究热点.根据作者不完全统计,仅在英国《自然》与美国《科学》两家杂志上发表的关于BZ反应系统中螺旋波的论文就有近50篇.利用BZ反应系统研究化学螺旋波有很大的方便之处,主要原因是BZ系统向热力学平衡态的移动速度很慢,在一般情况弛豫时间要几到十几个小时.因此螺旋波在一个封闭系统也可以支持相当长的一段时间.这样每一个离开热力学平衡点一定距离的实验观测点,都可以近似地被看成是系统的一个渐近态.虽然系统一直不间断地向热力学平衡态移动,人们还是可以掌握相当的螺旋波动力学的规律.但是,在封闭系统中研究BZ系统的螺旋波还是有它的局限性.主要缺点是不能研究非平衡相变现象.因为观测到的实验现象毕竟不是渐近行为,当系统在临界点附近出现临界慢化现象时,就不知道系统的行为是渐近性行为还是由于它在不断地向热力学平衡态移动而产生的现象.

对于BZ反应系统中的螺旋波动力学渐近行为的系统研究,是到20世纪90年代初随着空间开放型反应器的开发成功才开始的,其中作者做了一定的实验工作[48,49,51],本节的主要内容是对这些实验的一个大概的介绍.读者可以在参考文献[71]与它引用的参考文献中找到20世纪90年代以前人们对BZ反应系统螺旋波的研究情况.实验是在§7.3介绍的开放型反应器中进行,主要控制参量选为硫酸、溴酸钠和丙二酸的浓度.图10.6概括了实验研究的主要结果,也

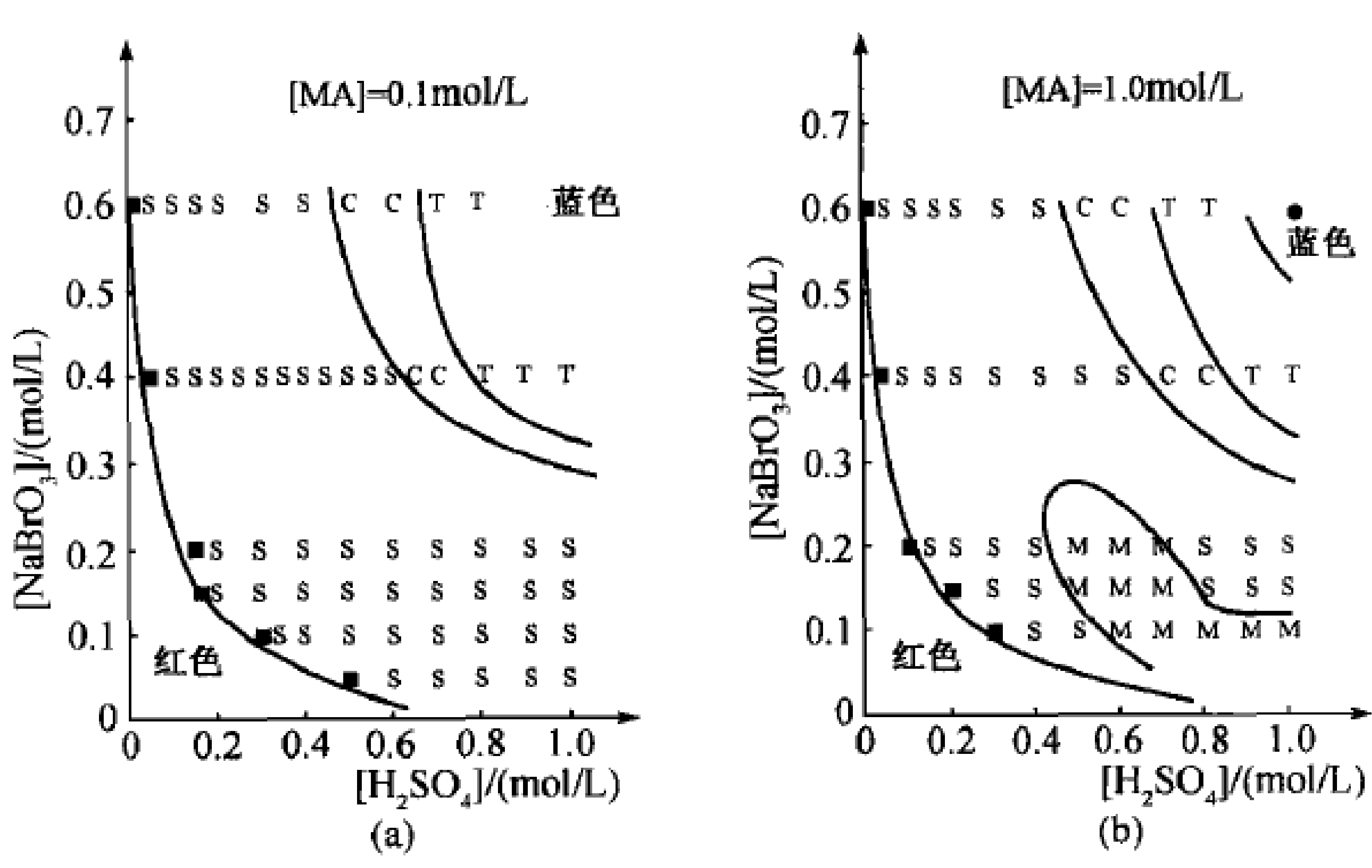


图10.6 BZ反应系统中螺旋波状态的相图

是本节描述螺旋波动力学的总纲.图中两张非平衡相变的相图对应于三维控制参量空间的两个不同切面,其中包括了三百个左右不同的实验点.每个实验点按照所观察到的不同斑图做如下分类:简单螺旋波"S",这类螺旋波的端点在二维空间平面沿一个小圆圈作周期运动,它的运动轨迹是上两节的理论所能近似描述的;复杂螺旋波"M",这类螺旋波的端点运动不是一个简单的圆,而是不同形式的圆滚线,一般来讲它的运动频率或周期有两个或更多,从简单螺旋波到复杂螺旋波的相变将在下一章中描述;对流不稳定螺旋波"C",它的意义也将在下一章讨论;无序湍流态"T",这种状态由上百上千个缺陷点组成,每个缺陷点都在试图组成一个螺旋波,结果系统表现为一种时空混沌态,这种状态被称为缺陷混沌.图 10.7 给出了简单螺旋波、复杂螺旋波、对流不稳定螺旋波与无序端流态的例子.另外,还存在无斑图的空间均匀态.在实验中,系统的初始态总是选为只有一个缺陷点的螺旋波态.如果初始时系统没有螺旋波而只有同心波,可以用氦-氖激光将一段行波割断,从而在系统内制造出两个缺陷点,这样就会形成两个螺旋波(见图 10.2),然后可以利用激光将其中一个引出系统之外;如果系统初始时存在多个缺陷,也就是说有多个螺旋波,可以将其他缺陷点

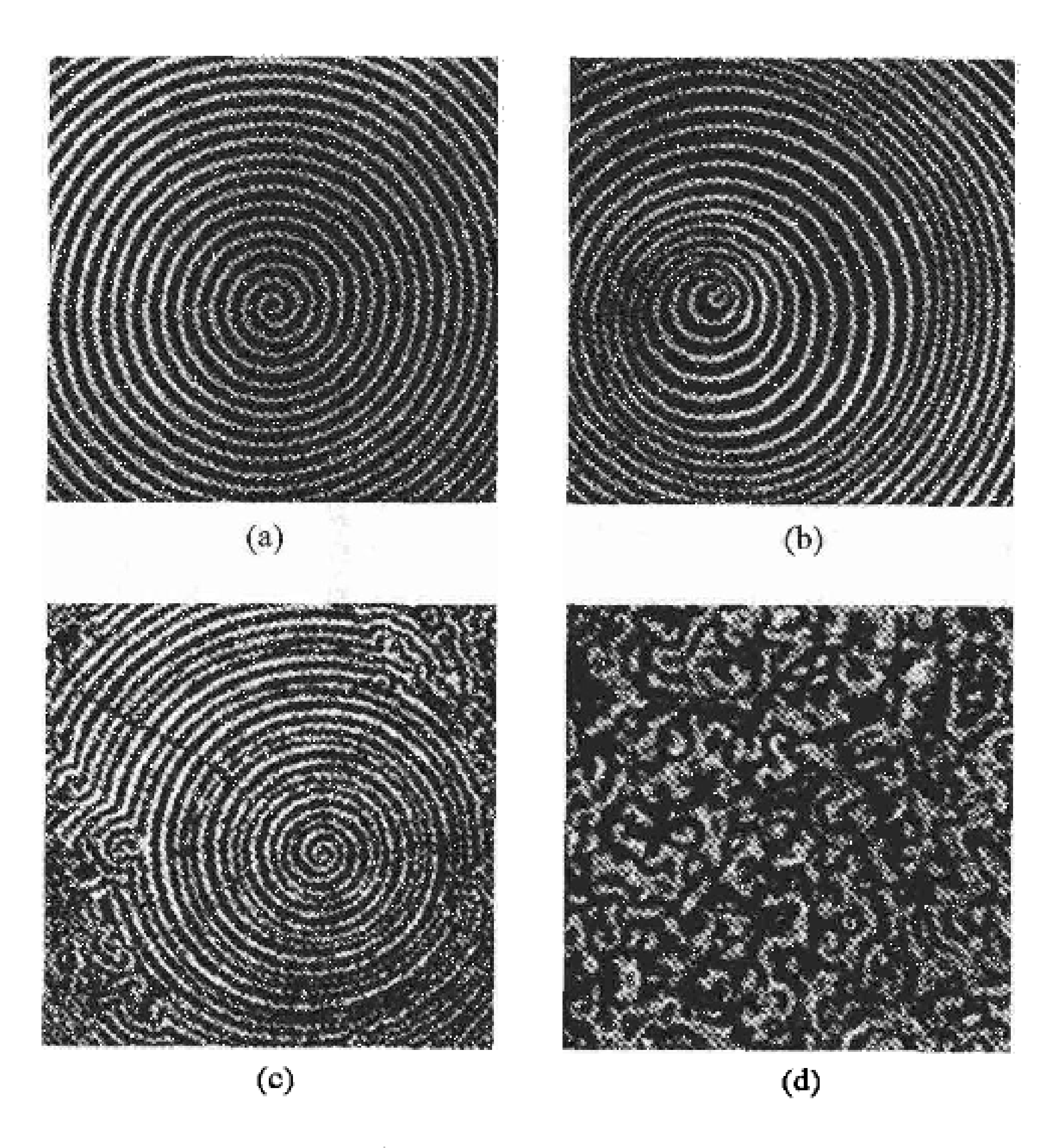


图 10.7　BZ 反应实验中观察到的几个典型的斑图态

一一引出系统之外，而只剩下一个.

相图在下方的边界线代表系统支持螺旋波存在的最小条件，称之为波锋失稳线，临界边界的螺旋波为可激发系统的螺旋波，越过这条边界线系统由可激发系统变为亚可激发系统，在边界线上螺旋波破裂并消失，如图 10.8 所示. 图中白色区的位置代表系统在氧化态上，实际颜色为蓝色，黑色背景表示系统在还原态上，实际颜色为红色. 跃过边界线，系统变为均匀的化学还原态. 决定边界线的实验点构成临界浓度（$[H_2SO_4]_c$，$[NaBrO_3]_c$）. 如果用（$[H_2SO_4]_c$，$[NaBrO_3]_c^{-1}$）做曲线拟合，可以得到一条过原点的直线，这表明波锋失稳线满足如下临界关系：

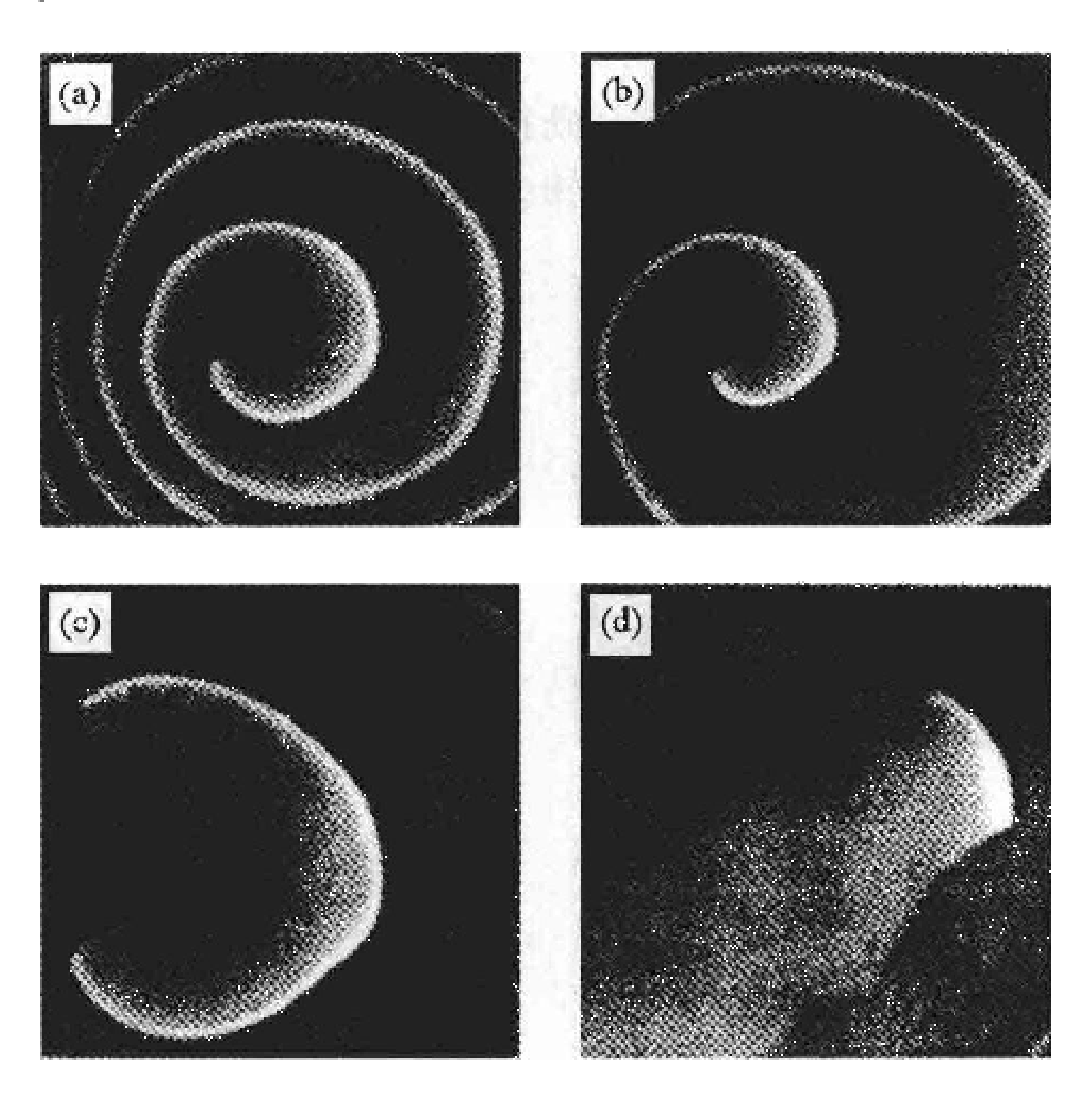


图 10.8　螺旋波消失的过程

$$[H_2SO_4]_c[NaBrO_3]_c \equiv \Delta_c = (0.022 \pm 0.003)\text{mol}^2 \cdot \text{L}^{-2}. \quad (10.4.1)$$

螺旋波存在的条件是$[H_2SO_4][NaBrO_3] = \Delta > \Delta_c$，在相图 10.6 中表现为双曲线，它与丙二酸的浓度无关. 在后面会看到 Δ 是 BZ 系统中螺旋波的最重要控制参量.

相图的右上方确定了另一类螺旋波失稳过程，称为爱克豪斯失稳. 在爱克豪斯失稳后，系统随控制参量 Δ 的增加进入缺陷湍流态. 继续增加控制参量系统到达均匀的化学氧化态. 图 10.6 还确定了由简单螺旋波到复杂螺旋波的相

变边界，相变是霍普夫分岔引起的. 所有这些相变现象将在下一章螺旋波的失稳中逐一讨论. 这一节集中总结简单螺旋波的动力学规律，并与上两节讨论的理论预测相比较.

图 10.9 给出螺旋波斑图态随控制参量[H_2SO_4]的变化. 对于每一个简单螺旋波，都可以找到一个唯一的波长 λ 与周期 T. 螺旋波在远离端点的波速 c 可由 $c=\lambda/T$ 得到. 由图 10.9 看到，当控制参量[H_2SO_4]从 0.075 mol/L 增加到 0.6 mol/L 时，螺旋波的波长从 $\lambda\approx3.5$ mm减至 $\lambda\approx0.3$ mm，同时螺旋波的周期也由 $T\approx200$ s 降至 $T\approx4$ s. 用螺旋波周期的倒数 T^{-1} 与控制参数[H_2SO_4]作图可得一条直线，但对于不同的[$NaBrO_3$]值，直线的斜率与截距各不相同，见图 10.10(a). 如果用控制参量 Δ，并定义无量纲控制参量 $\mu=(\Delta-\Delta_c)/\Delta_c$ 再与 T^{-1} 作图，所有图 10.10(a)上的点都会大概折叠到一条直线上，见图 10.10(b). 由此得到由实验观察到的第一个实验规律：

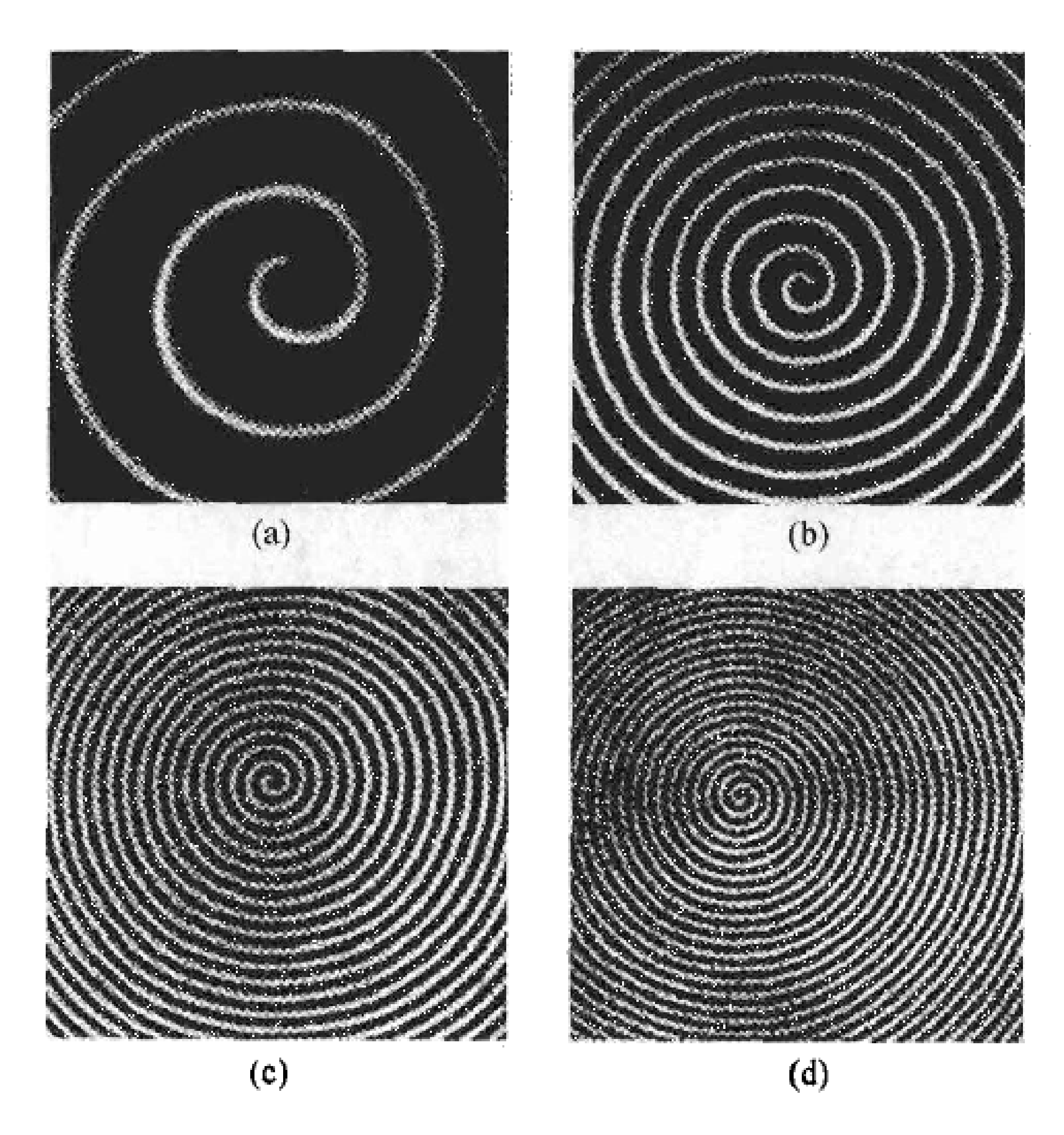


图 10.9 几个简单螺旋波的例子

$$T = T_0\mu^{-1}, \tag{10.4.2}$$

这里 $T_0=(41.5\pm2.5)$s.

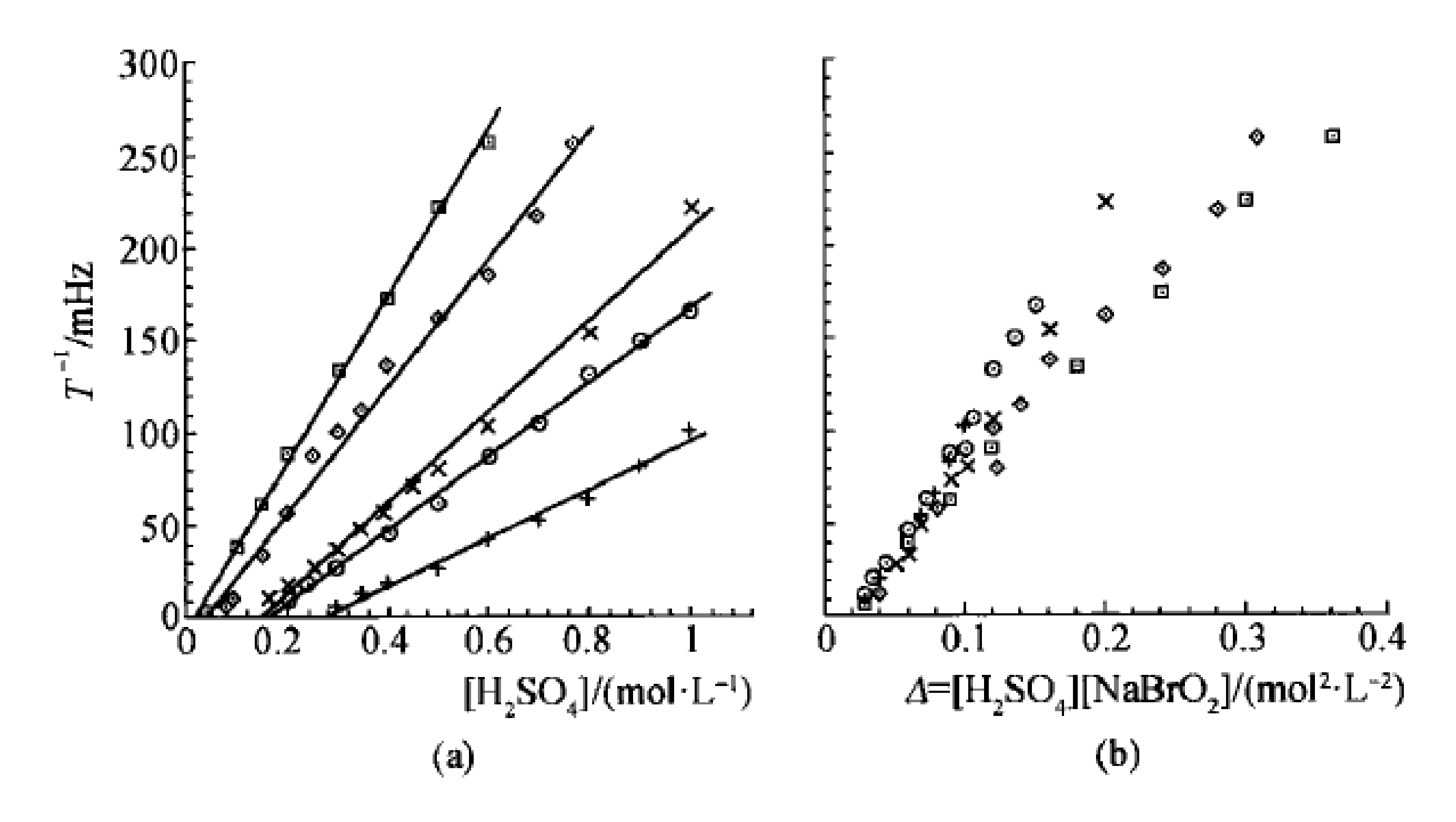


图 10.10 螺旋波的频率随控制参量的变化

螺旋波自组织选择的波长 λ 是系统最明显的空间尺度. 在既没有任何反应物浓度做参考,也没有做任何坐标重组的情况下,螺旋波的波长 λ 与它的周期 T 的关系在对数坐标下都落在同一条直线下,如图 10.11 所示. 由测量得到如下关系:

$$\lambda = (139 \pm 5)T^{0.51\pm0.02}, \tag{10.4.3}$$

这里 λ 的单位是 μm, T 的单位是 s. 从这个测量可以推测螺旋波系统应有如下不依赖于具体实验控制参量的标度关系:

$$\lambda \propto T^{1/2}. \tag{10.4.4}$$

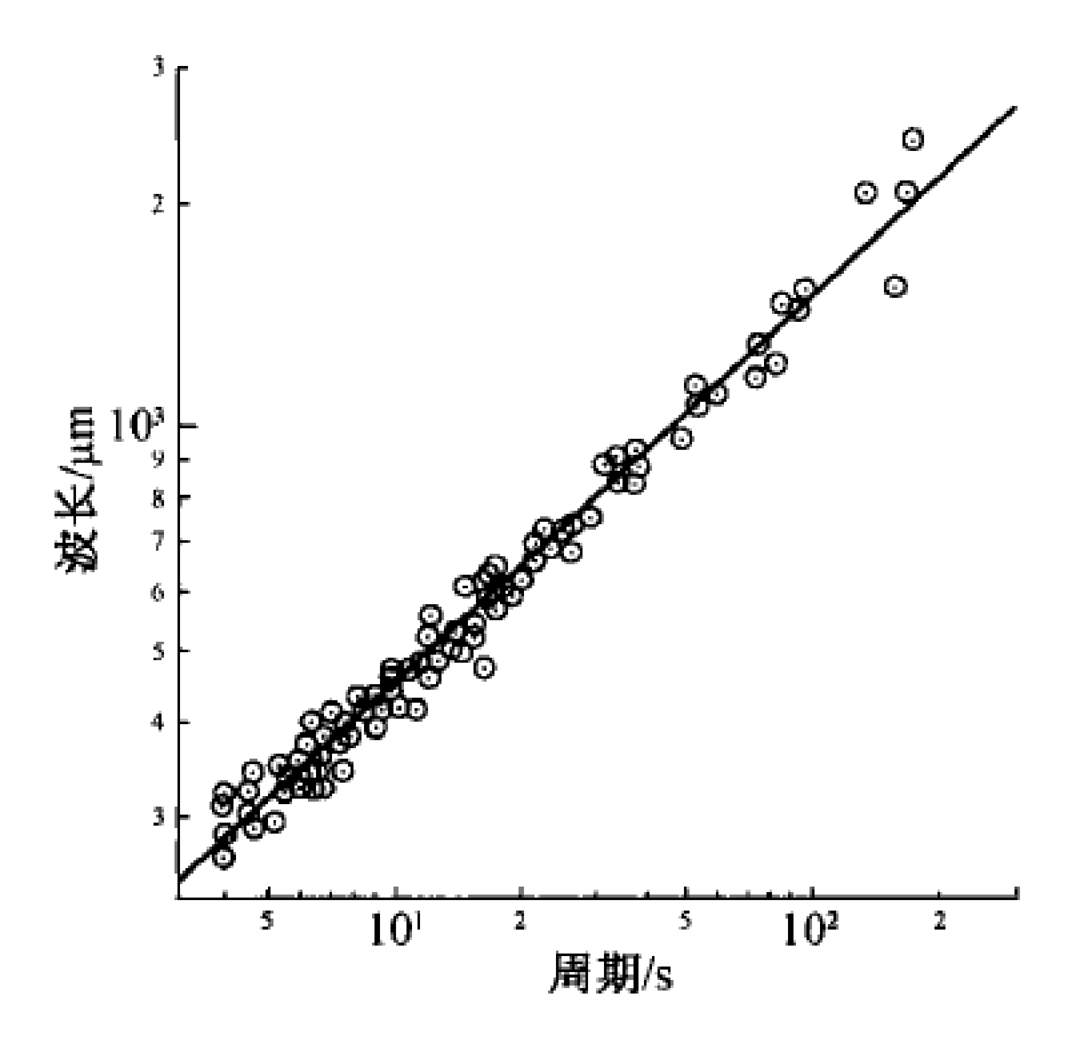


图 10.11 螺旋波的波长与周期的关系

这是从实验中得到的第二个规律. 这个标度规律对于研究螺旋波自组织机制有重要意义. 因为它意味着 λ^2/T 是一个常数,而这个常数的量纲与扩散系数相同. 这表明螺旋波的动力学行为主要由扩散过程控制. 对于图 10.6 所示的所有实验点中的简单螺旋波做统计计算,得到这个常量值为 $(22\pm4)\times10^{-5}\ \mathrm{cm^2/s}$,由此可以定义一个无量纲数 M,称为螺旋波扩散数:

$$M \equiv \lambda^2/DT, \tag{10.4.5}$$

其中 D 为反应系统中触发变量的扩散系数. 对于 BZ 反应,它是次溴酸盐的扩散系数. 由于该反应物在反应系统内的扩散系数无法准确测定,从已有的实验数据只能估计此螺旋波扩散系数对 BZ 反应为 50～100 之间.

比较由实验得到的标度关系(10.4.4)和上一节推导得到的本构关系(10.3.18),会发现实验规律与理论预测定性吻合. 将式(10.3.18)还原到有量纲的关系并取 $r_0\to0$:

$$\omega = m^* c^2/D, \tag{10.4.6}$$

由于 $\omega=2\pi/T, c=\lambda/T$,代入(10.4.6)就得到实验规律(10.4.5),其中螺旋波扩散数 $M=2\pi/m^*$. 将理论值 $m^*=0.331$ 代入得$M\approx19$. 这要求次溴酸的扩散系数在 $10^{-5}\ \mathrm{cm^2/s}$ 左右. 表面看来这个数值是非常合理的,因为所有小分子在水中的扩散系数都在这个数量级. 但是实验是在多孔玻璃做反应媒介时得到的. 实验证明,在多孔玻璃媒介中,一般小分子的表观扩散系数会减小 3～5 倍. 所以实验得到的螺旋波扩散数比理论预测大了 5 倍左右. 这个定量的误差原因目前还没有一个满意的解释.

实验观测到的关系(10.4.2)可以类比于路德关系:

$$c \propto \sqrt{Dk[A][B]}. \tag{10.4.7}$$

将关系 $c=\lambda/T$ 代入(10.4.2)并利用本构关系(10.4.4)可以得到

$$c = c_0\mu^{1/2}, \tag{10.4.8}$$

这里 $c_0=22.2\ \mu\mathrm{m/s}$. (10.4.8)与(10.4.7)有类似的结构. 对路德关系的推导可知控制参量中的硫酸与溴酸钠参与的反应应该是 BZ 反应的控制步骤,这对 BZ 反应系统来说是正确的,因为 BZ 反应的控制步骤为

$$BrO_3^- + Br^- + H_2SO_4 \longrightarrow BrO_2^- + BrO^-,$$

从这个角度来说实验结果与理论预测有定性的吻合.

如果将关系(10.4.2)与第二节导出的色散关系相比,会发现二者之间有本质上的区别,甚至会得出相反的结论. 由式(10.2.1)可知,实验中的控制参量 Δ 与第二节中的微量 ϵ 之间有简单反比关系

$$\Delta \propto \varepsilon^{-1}. \tag{10.4.9}$$

因此，根据实验结果式(10.4.2)，会得到螺旋波的波长与成正比. 但如果仔细分析第二节的推导过程，至少在 ω 很小时，即 T 很大时应该有：$\omega = O(\varepsilon)$. 即螺旋波的周期与 ε 成反比，正好与实验结果相反. 理论与实验结果的不符原因在何处？仔细分析方程(10.2.1)，发现方程中的系数与动力学函数 $f(u,v)$，$g(u,v)$ 存在一定的联系. 也就是说在实验中变化控制参量 Δ 并不仅仅是改变了方程(10.2.1)中的 ε，同时也改变了 $f(u,v)$，$g(u,v)$ 的系数. 而周期 T 与 $g(u,v)$ 有直接联系，见式(10.2.6). 这种错综复杂的关系使得在理论预测具体系统时，很难得到清楚的定量关系，而只能得出一般性结论，例如不依赖具体系统的本构关系. 这是在反应扩散系统中研究螺旋波以至斑图动力学的一大弱点. 与流体系统相比，至少在斑图产生的分岔点附近，流体系统的物理参量如瑞利数、雷诺数等与方程中的系数之间有简单的对应关系.

第十一章　螺旋波的失稳

从上一章知道，螺旋波是由缺陷点为中心自组织形成的一类特殊的行波. 对于一个稳定的螺旋波斑图态，系统中的缺陷点数量(或缺陷密度)很少，并且它不随时间变化. 但是如果系统中的控制变量超过某些临界值时，螺旋波会自发地产生出新的缺陷，每个缺陷都趋向于产生新的螺旋波. 因此系统中的缺陷数目会随着时间以指数形式增加，直到系统达到一个饱和的缺陷密度. 此时系统中被缺陷充满，它的长程有序现象不复存在，系统进入"化学湍流"态，或化学时空混沌态. 由于这种湍流态的出现总是伴随着系统内缺陷数量的大规模增加，而每一个缺陷点都伴随着一个小的螺旋波，人们称此类混沌现象为缺陷引起的湍流(defect-mediated turbulence)，或螺旋波湍流(spiral turbulence). 本章的主要内容是讨论两种缺陷导致混沌的动力学机制. 第一种机制起源于对行波的长波微扰，失稳机制为爱克豪斯失稳. 在上一章中曾介绍了爱克豪斯失稳对图灵斑图的影响，这里讨论它对螺旋波的影响. 第二种失稳机制起源于螺旋波缺陷中心的轨迹不稳定性，此类失稳为螺旋波的漫游失稳. 当漫游的幅度达到一定阈值时，由于行波的多普勒效应，两个波锋的距离会小于色散关系所允许的临界值. 这时螺旋波会破裂，系统进入螺旋波湍流.

§11.1　螺旋波的爱克豪斯失稳

爱克豪斯失稳是对相平面波作长波微扰得到的. 前一章介绍过在一个随时间振荡的时空系统中，可能存在因相位差引起的行波现象，即相波. 对于一个处在霍普夫分岔附近的动力学系统，系统的变量随时间的局部变化可以写为

$$c = c_0 + A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_c t} + \mathrm{c.c.}, \qquad (11.1.1)$$

这里 $\omega_c=\sqrt{\Delta_0}$，A 是系统随时间振荡的复振幅. 对振幅 $\partial A/\partial t=f(A,\bar{A})$ 的动力学方程作平移不变性的限制，容易得出该方程应有如下形式：

$$\tau_0\frac{\partial A}{\partial t} = \mu A - (g_1+\mathrm{i}g_2)|A|^2A + \xi_0^2(d_1+\mathrm{i}d_2)\nabla^2 A. \qquad (11.1.2)$$

由于不考虑曲率对可能的行波解的影响，分析可以在一维系统中完成. 对方程

(11.1.2)作如下标度变换：

$$A' = \sqrt{\frac{g_1}{\mu}}A, \qquad t' = \mu t/\tau_0, \qquad x' = \sqrt{\frac{\mu}{d_1\xi_0^2}}x,$$

去掉变量上的撇，方程变为如下形式：

$$\frac{\partial A}{\partial t} = A + (1 + \mathrm{i}\alpha)\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - (1 + \mathrm{i}\beta)|A|^2 A. \tag{11.1.3}$$

其中：$\alpha = d_2/d_1$，$\beta = g_2/g_1$. 这就是在§8.1提到的金兹堡-朗道方程在一维系统下的形式.

方程(11.1.3)有两种重要的极限形式. 对于，$\alpha, \beta \to \infty$，α/β 为常数，方程(11.1.3)转变为非线性薛定谔方程. 这个方程在一维系统中可以得到解析形式的解，它对应于一族孤立波[72]. 对于 $\alpha = \beta = 0$，并认为振幅是空间均匀的，这时方程回到在§8.3讨论过的朗道方程形式. 此方程是图灵斑图在一维空间系统中的振幅方程(8.3.8).

容易验证方程(11.1.3)有如下形式的一族行波解：

$$A_0 = \sqrt{1 - q^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(qx - \omega t)}, \tag{11.1.4}$$

行波的色散关系为

$$\omega(q) = \beta(1 - q^2) + \alpha q^2. \tag{11.1.5}$$

显然，解的存在条件是 $q^2 < 1$. 这里 q 为相波的波数，ω 是相波的频率. 为了检验解(11.1.4)的稳定性，对这个行波解做如下形式的微扰：

$$A(x,t) = A_0[1 + a(x,t)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x,t)}, \tag{11.1.6}$$

这里 $a(x,t)$ 是对振幅的微扰，$\varphi(x,t)$ 是对相位的微扰. 将(11.1.6)，(11.1.4)式代入(11.1.3)式并只保留线性项，得到相应的线性微扰方程：

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - 2q\alpha\frac{\partial a}{\partial x} - 2(1 - q^2)a - \alpha\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2q\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tag{11.1.7a}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + 2q\frac{\partial a}{\partial x} - 2\beta(1 - q^2)a + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2q\alpha\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tag{11.1.7b}$$

将微扰 $a(x,t)$，$\varphi(x,t)$ 在傅里叶空间分解：

$$a = \sum a_p \mathrm{e}^{st + \mathrm{i}px}, \qquad \varphi = \sum \varphi_p \mathrm{e}^{st + \mathrm{i}px}, \tag{11.1.8}$$

代入方程(11.1.7)可得线性特征方程

$$s\begin{pmatrix} a_p \\ \varphi_p \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -p^2 + 2\mathrm{i}q\alpha p - 2(1 - q^2) & \alpha p^2 - 2\mathrm{i}qp \\ -\alpha p^2 + 2\mathrm{i}qp - 2\beta(1 - q^2) & -p^2 - 2\mathrm{i}q\alpha p \end{bmatrix}\begin{pmatrix} a_p \\ \varphi_p \end{pmatrix}. \tag{11.1.9}$$

由它规定的特征值为

$$s_{\pm}=-p^2-2\mathrm{i}q\alpha p-(1-q^2)\\ \pm\{(1-q^2)^2-(\alpha p^2-2\mathrm{i}qp)[\alpha p^2-2\mathrm{i}qp+2\beta(1-q^2)]\}^{1/2}. \tag{11.1.10}$$

现在定量地分析一下色散关系 $s=s(p)$. 由式(11.1.10)容易看出,当 $p=0$ 时,$s_+=0$,$s_-=-2(1-q^2)<0$. 由此推论,当系统由稳定的行波态向非稳定的行波态过渡时,系统出现鞍-结点分岔. 对应的特征值 s 应是由 $s_+<0$ 向 $s_+>0$ 过渡. 由于对于式(11.1.10)总有 $s_+|_{p=0}=0$,因而最危险的微扰模一定是对应于 $p\to 0$ 时的模,即系统对于长波微扰最容易变得不稳定. 对式(11.1.10)进行关于 p 的泰勒级数展开并保留前两项:

$$s_+=\mathrm{i}v_g p-D_{ef}p^2+O(p^3), \tag{11.1.11}$$

其中

$$v_g=2(\beta-\alpha)q,\quad D_{ef}=1+\alpha\beta-\frac{2q^2(1+\beta^2)}{1-q^2}. \tag{11.1.12}$$

当 $D_{ef}>0$ 时,方程(11.1.3)的行波解(11.1.4)对微扰(11.1.6)是稳定的,反之系统失稳. 因而 $D_{ef}=0$ 规定了系统在长波微扰下失稳的临界条件. 由它规定的失稳被称为爱克豪斯失稳. 对这类失稳的一个特例,$\alpha=\beta=0$,在讨论图灵斑图的稳定性时有过分析. 将 $\alpha=\beta=0$ 代入式(11.1.12),得爱克豪斯失稳条件为 $q^2>1/3$,这与在§9.2分析得到的结论一致. 另外,当 $1+\alpha\beta<0$ 时,系统对所有行波状态都是不稳定的,即对于所有的 q,都有 $D_{ef}<0$. 这类失稳被称为本杰明-费尔(Benjamin-Feir)失稳. 当 $1+\alpha\beta>0$ 时,行波解(11.1.4)对微扰(11.1.6)的稳定条件是

$$q^2<\frac{1+\alpha\beta}{2(1+\beta^2)+1+\alpha\beta}. \tag{11.1.13}$$

由式(11.1.12)的第一式看出,当 $\beta-\alpha\neq 0$ 时,$v_g\neq 0$. 在这种情况下,系统长波失稳的失稳模存在一个相对于载波的非零的群速度 v_g,相对于实验室坐标系,这个群速度为

$$V_g=\frac{\omega_c+\omega}{q}-v_g,$$

其中右边第一项为载波速度,方向由螺旋波中心外指. 在这种情况下,爱克豪斯失稳有对流失稳(convective instability)的性质. 由于这种性质,即使 $D_{ef}<0$,系统在有限的空间内并不一定导致斑图态的解体. 这种对流失稳的性质在实空间中可能更容易理解. (11.1.11)式在实空间中相对于实验室坐标系可以写为如下形式:

$$\frac{\partial \phi_p}{\partial t} + \mathbf{V}_g \cdot \nabla \phi_p = D_{ef} \nabla^2 \phi_p. \tag{11.1.14}$$

这里 ϕ_p 是微扰方程(11.1.9)在 s_+ 方向上的微扰量，$\mathbf{V}_g$ 的方向由螺旋波中心外指，与行波行进方向一致. 在 BZ 反应系统中，一般情况下 $\beta-\alpha>0$，因而，相对于实验室坐标系的对流速度要比载波速度慢. 很明显上式中左边第二项为对流项，右边为扩散项. 当表观扩散系数 D_{ef} 为负值时系统失稳. 但失稳的模在被放大的同时，受一个群速度为 V_g 的对流作用影响，使得它沿行波方向移动. 如果 V_g 足够大，在有限的空间不会看见微扰被放得足够大的情形. 一个日常生活中经常看见的对流失稳的例子是一根点燃的香烟. 在一个没有空气对流的房间里，烟在离开烟头时是一条直线，离烟头稍远一点时开始有一点左右摇摆. 这种左右摇摆的幅度随着烟离烟头的距离很快加大，并变得越来越复杂，最后变成湍流态. 实际上烟的微扰源在烟头上，当微扰被放大时，它同时被带得远离烟头. 如果说观察者只注意离开烟头一定距离内烟的动力学行为，他们不会观察到湍流态. 在香烟的例子中，将微扰带走的原因是浮力. 对于一个行波，将微扰带离微扰源的是行波本身，其情形可以类比于涨潮时的海浪对海面漂浮物的作用. 在一个反应扩散系统中，虽然系统中不存在对流运动，但由于行波的存在，微扰还是可以由对流效应被带着离开微扰源，这种情况在下一节中将给出一个具体实例.

在对流不稳定系统中，系统的稳定区由两个因素决定，对流速度 V_g 与包络速度 V_e，后者正比于微扰的生长速度，见图 11.1. 当包络速度 V_e 小于对流速度 V_g 时，系统经历对流不稳定. 这时，对于一个微扰临界值 φ_c，可以在空间中找到一个以微扰源为中心以 d 为半径的稳定区，当 $x<d$ 时 $\varphi<\varphi_c$，行波稳定；当 $x>d$ 时 $\varphi>\varphi_c$，系统失稳，见图 11.1(a). 当包络速度 V_e 大于对流速度 V_g 时，对于任何一个微扰临界值 φ_c，都找不到一个空间位置，在系统临近渐近态时 $\varphi<\varphi_c$，见图 11.1(b). 这后一种情况对应于系统的绝对失稳.

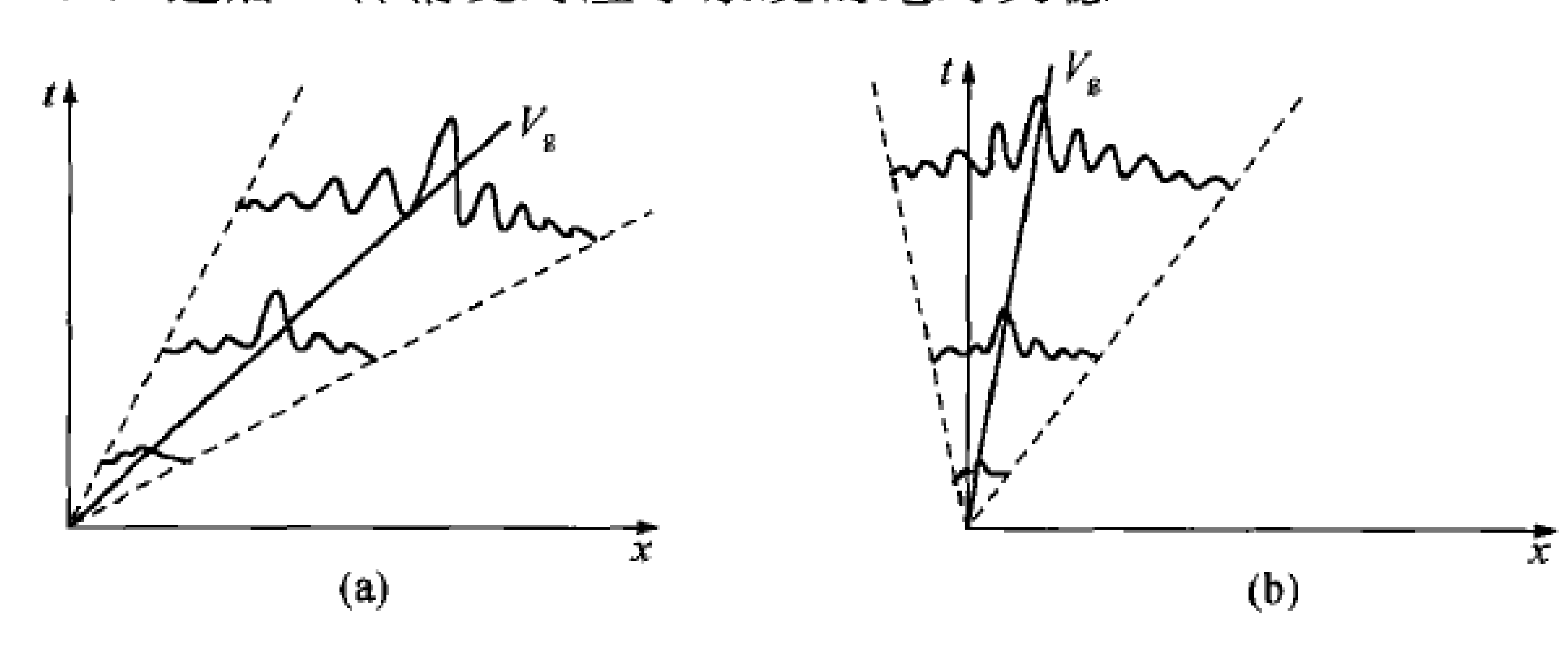


图 11.1　对流失稳与绝对失稳的示意图

由式(11.1.11)可知,临界微扰值 φ_c,初始微扰值 φ_0,微扰波数 p 与表观扩散系数 D_{ef} 的关系应为

$$\varphi_c = \varphi_0 e^{-D_{ef} p^2 t_c}, \tag{11.1.15}$$

其中 t_c 为微扰从初始值 φ_0 到临界值 φ_c 所用的时间. 很明显,螺旋波的稳定半径应为

$$d_c = v_g \cdot t_c. \tag{11.1.16}$$

将上式代入(11.1.15)可得

$$-D_{ef} p^2 d_c / v_g = \ln(\varphi_c / \varphi_0). \tag{11.1.17}$$

这个关系对于任何一个对流失稳的系统都应该成立. 虽然对于一个具体的系统,D_{ef} 与 v_g 具有不同的数值,从(11.1.11)中还是可以得出一些关于对流失稳的普遍关系. 比如对于螺旋波来说,在对流失稳时它的稳定区半径 d_c 与长波微扰波数 p 的关系应为: $d_c \propto p^{-2}$;它与初始微扰强度 φ_0 的关系应有 $d_c \propto \ln\varphi_0$. 这些关系都可以在实验中获得验证. 另外,可以通过测量不同的微扰波数 p 与初始微扰强度 φ_0 对稳定半径 d_c 的影响,得到系统的 D_{ef}/v_g 比值,同时得到系统失稳即行波破裂生成缺陷时的临界值 φ_c.

§11.2 对流失稳的实验观测

从第十章最后一节的讨论中知道,在 BZ 反应系统中,如果控制参量$[H_2SO_4] \cdot [NaBrO_3]$远离 Δ_c,系统的螺旋波将由可激发型螺旋波向螺旋相波过渡. 在实验中很难确定两者交换时的确切临界位置. 对不同的螺旋波斑图态做二维傅里叶变换,发现当 $\Delta = 0.2\ \mathrm{mol^2 \cdot L^{-2}}$ 时,主频率的二级谐振减弱到噪声以下. 也就是说,这时螺旋波在远离中心的位置可以很好地用正弦振荡描写. 一般认为这时的螺旋波应为相波. 当 Δ 增加到 $0.24\ \mathrm{mol^2 \cdot L^{-2}}$ 时,螺旋波的波长为 0.35 mm,振荡周期为3.9 s,此时螺旋波还是稳定的,见图 11.2(a). 继续增加控制参量 Δ 使其越过临界值 $\Delta_c = 0.25\ \mathrm{mol^2 \cdot L^{-2}}$,系统经历爱克豪斯失稳. 这时系统中的螺旋波变得不稳定. 在离螺旋波中心一定距离以外的区域行波解体. 每一行波都断裂成许多小的片断,每一个片断的端点都是一个新形成的点缺陷. 这些缺陷点都试图自组织形成以它为中心的新的螺旋波. 但由于缺陷点在这些区域内密度很高,每一个点缺陷自组织形成的螺旋波都不超过一个波长的距离,这些小的螺旋波在空间与时间上都没有长程关联,因此被称之为化学湍流态. 这种湍流态的形成,是由于原来的螺旋波不断产生出新的点缺陷引起的,所以它属于

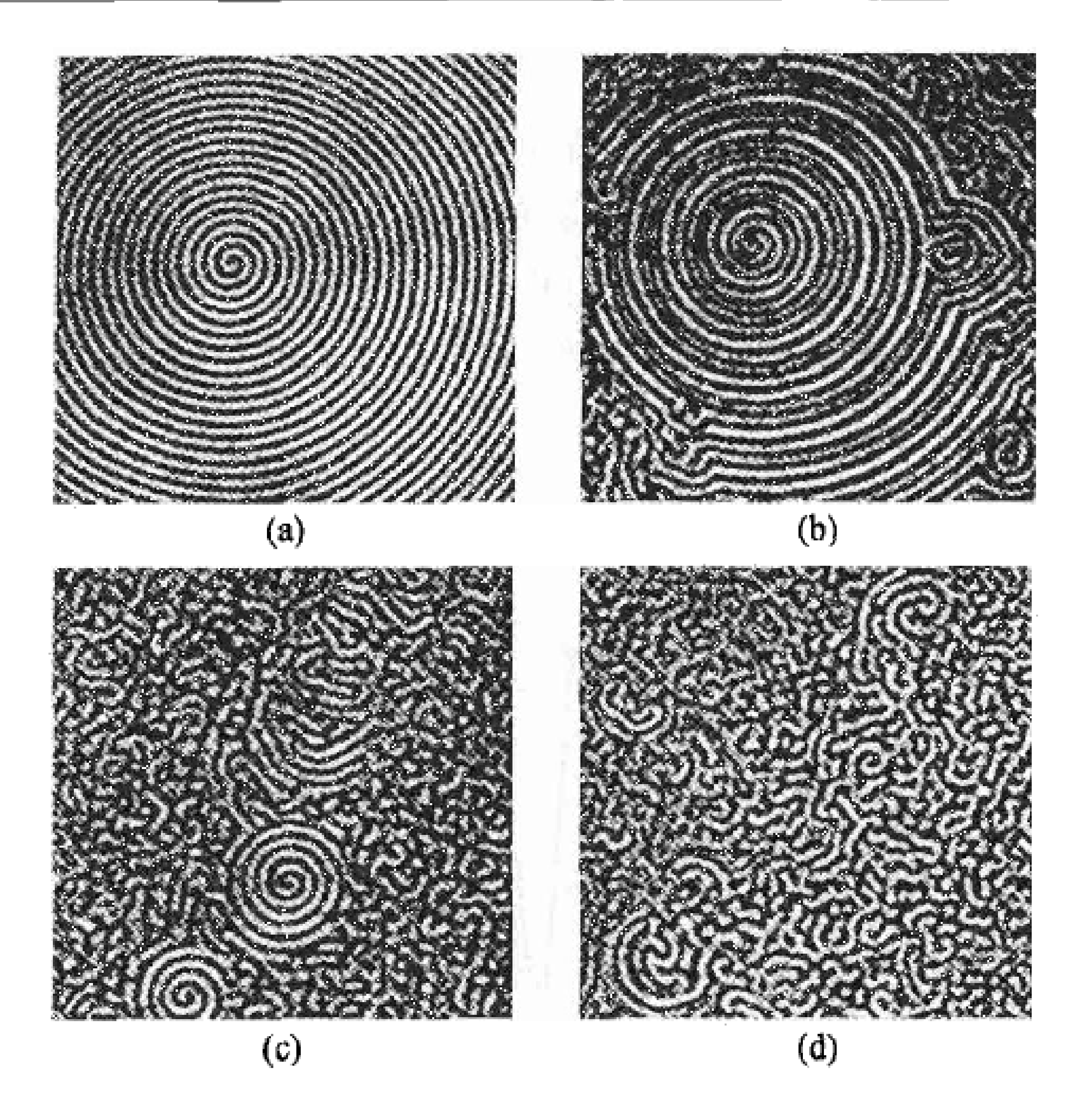


图 11.2　实验中观察到的爱克豪斯失稳

缺陷引起的湍流(defect-mediated turbulence). 图 11.2(b)给出此类对流失稳产生的这种湍流态的一个实验观察[51]. 整个系统可以分成两个动力学行为截然不同的区域: 在离螺旋波中心一定距离内的区域,螺旋波是稳定的,系统有一个时空有序结构;在螺旋波稳定区外,系统是无序的,它由密度很高的点缺陷组成. 由于每个点缺陷的行为都受它邻近点缺陷的影响,它的运动轨迹是全然无序的. 这些缺陷点试图进入螺旋波稳定区,但总是被螺旋波稳定区内不断送出的行波推向稳定区外,这就是系统的对流特点. 这里需要指出的是对于英文 convective instability 的中译"对流失稳"是不很确切的. 在现在这种情况下 convective 应译为"运流",这种运流可能是流体力学中的对流引起的. 但大多数情况下,如香烟的运动轨迹或喷气式飞机的射流,都是物质的搬运过程,之后产生的对流现象是由于系统中搬运过程中失稳的表现. 在更一般的情形中,搬运过程的媒体不仅可以是物质的,如流体力学中的流体,也可以是其它形式,在上述 BZ 实验里,它是以相波的形式存在的.

对图 11.2(b)做仔细观察,会发现在稳定区内的螺旋波中存在着一个长波调制,它的波长是原螺旋波的 4 倍左右. 调制波的振幅在中心很弱,随着它离开螺旋波中心向外移动而逐步加强. 如前一节的理论讨论中所述,调制波的振幅

应分为两部分，振幅振幅 a 与相位振幅 φ_0. 在实验中，调制波的振幅振幅由于摄像机对图像反差的饱和效应，很难进行定量的观测. 而相位振幅的信息可以通过测量螺旋波的局部波长得到. 图 11.3 表示图 11.2(b)中局部波长随着测量点到螺旋波中心距离的变化，它的振幅由中心向外不断增加. 当相位调制波的振幅增加到一定值时，原螺旋波破裂，并产生出许多小的点缺陷，系统在这些区域变成化学湍流态.

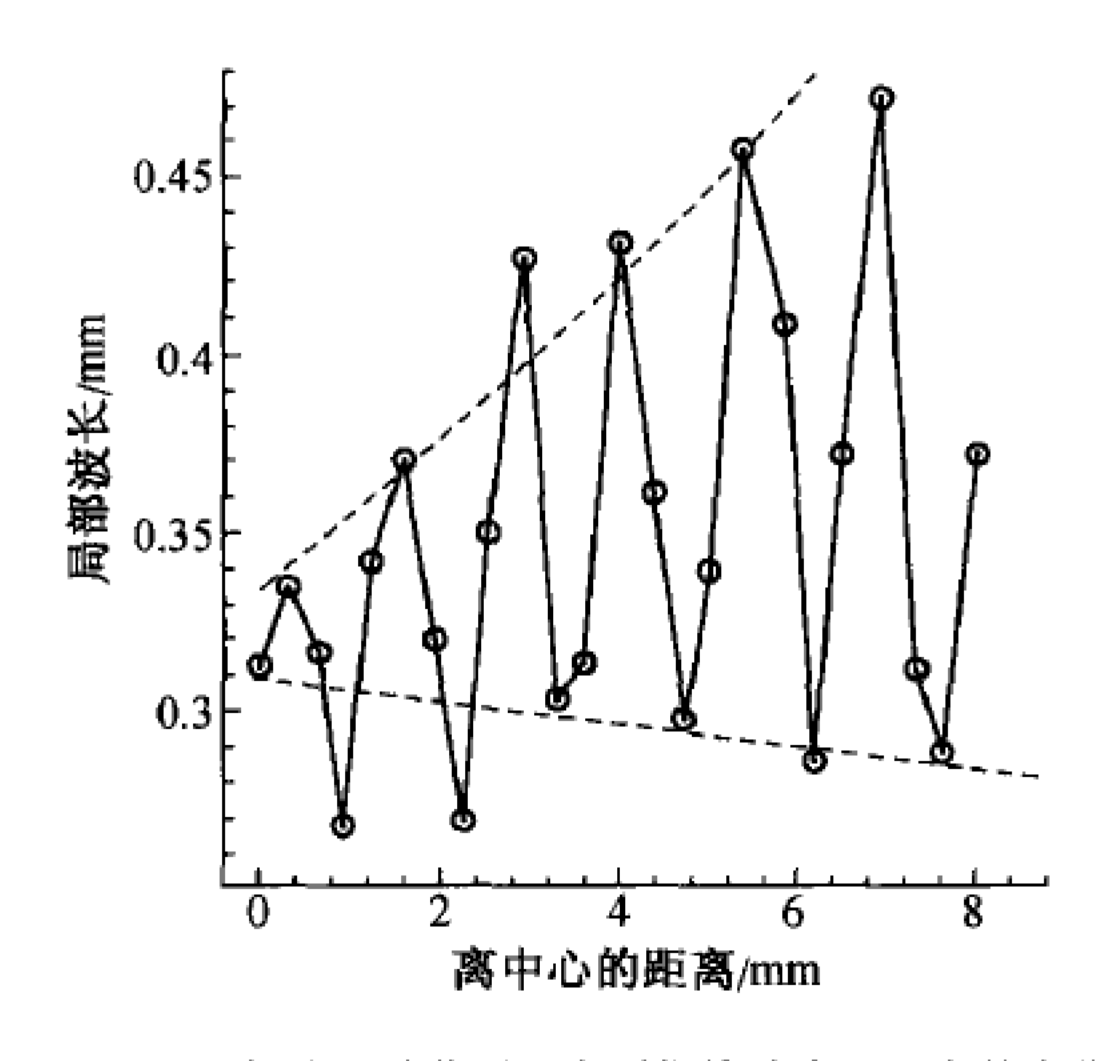


图 11.3　局部波长随着测量点到螺旋波中心距离的变化

如果继续增加系统的控制参量 Δ，螺旋波的稳定半径会不断减少，见图 11.2(c)，同时实验中看到一些派生的螺旋波会成长成为具有稳定半径大小的形状. 一般来讲这种成长过程很慢，图 11.2(c)是变换控制参数后一小时的一个观察，它还不能算是系统的一个渐近态. 我们最近的实验证实系统的渐近态结构是由具有稳定半径的螺旋波的一个集合. 其原因是：当系统经对流失稳产生出新的点缺陷时，每一个点缺陷都试图以它为中心产生出一个新的螺旋波斑图，每一个新产生的螺旋波斑图，由于本身的运动都对其他点缺陷有排斥作用. 这样，由于这些派生螺旋波之间存在的固有的微小差异，一些派生螺旋波斑图会随时间长大，而另一些会被逐渐压缩，以至在边界上消失. 另一方面，由于对流失稳的原因，逐渐长大的螺旋波斑图在大小上有一个极限值，螺旋波在大于这个极限值时外围的行波会自动解体. 因此随着时间的增加，系统会自组织形成一个以稳定半径的螺旋波为基本单元的大的有序结构. 可以猜想，在这种结构中螺旋波斑图的堆集应该是密集型的，在二维系统中，它应该取六边形斑图态. 当然这个推论正确与否有待于实验的检验.

当控制参量增加到 $\Delta=0.32\ mol^2\cdot L^{-2}$ 时，系统由对流失稳过渡到绝对失稳. 图 11.2(d)是系统绝对失稳的一个实验观测. 在绝对失稳时所有的螺旋波态，不论它的半径多小，都是不稳定的. 系统完全由密度很高的点缺陷控制，每个点缺陷都做无序运动. 继续增加控制参量，系统逐渐变为均匀氧化态.

前面提到，在对流失稳前后的一个控制参量区域内，系统的每个局部点都作正弦振荡. 由此假设 BZ 反应在这个区域内的动力学规律可以用超临界霍普夫分岔描述，它服从复变量金兹堡-朗道方程(11.1.3). 在这个前提下，上面试验中观察到螺旋波失稳现象可以很好地用上一节的理论解释. 应该指出，BZ 反应在这个控制参量区域内是超临界霍普夫分岔，还是次临界霍普夫分岔还没有确实的实验根据，但一般认为超临界霍普夫分岔的假设是可行的，因为这个假设所推导的结论与实验相符合.

为了将方程(11.1.3)表现的动力学行为与实验观测做直接比较，需要找到(11.1.3)中参数 α,β 与实验控制参数 Δ 之间的关系. 从理论上说这是可以做到的，但从实验角度考虑这种做法既费时间又得不到简明的、有意义的关系. 最方便、有效的方法还是直接来自于实验. 20 世纪 90 年代初，哥本哈根大学的海恩(Hynne) 和邵壬申(Sorensen)研究出了一个非常聪明的、从实验数据中直接提取 α,β 参数的方法，他们称此方程为“淬火”法[73—76]. 主要思想是将一个稳定极限环暂时“淬灭”，然后观察极限环重建时的动力学行为，并根据霍普夫分岔的一般理论找到参数 α 与 β. 他们的实验表明，金兹堡-朗道方程中的参数 α 与化学物质的扩散系数有关，而 β 与具体的反应动力学有关. 在以铈离子催化的 BZ 反应中，α 的值约为 -1.4，β 在 0.7 左右. 将这个数值代入本杰明-费尔失稳依据中发现 $1+\alpha\beta\approx 0$，系统在失稳边缘. 在研究螺旋波失稳的实验系统中，催化剂是铁离子. 假定这个反应系统的 α 值还是 -1.4，并且它不随控制参量变化；β 值随控制参量的增加，由 0.5 增加到 0.7. 图 11.4 是在二维系统中数值模拟金兹堡-朗道方程的结果. 由图 11.4 知，当 $\beta=0.5$ 时，螺旋波是稳定的，见图 11.4(a)；当 β 由 0.5 增至 0.55 时，对流失稳发生，在螺旋波的稳定边界上有大量缺陷点产生，见图 11.4(b). 在图 11.4(b)中很难观察到调制波信号，但如果将它做一个特殊的滤波，调制波就会很清楚地显现出来. 继续略增 β 值至 0.56，稳定螺旋波的稳定半径缩小，见图 11.4(c). 当控制参量使 β 增加到 0.7 时，系统呈现出整体的化学湍流态，见图 11.4(d). 比较图 11.2 与图 11.4 可知，用金兹堡-朗道方程可以定性描写实验中螺旋波失稳的基本过程. 这从某种程度上证明了实验中观察到的螺旋波失稳是爱克豪斯失稳，并且由于行波的存在，失稳具有运流的特征.

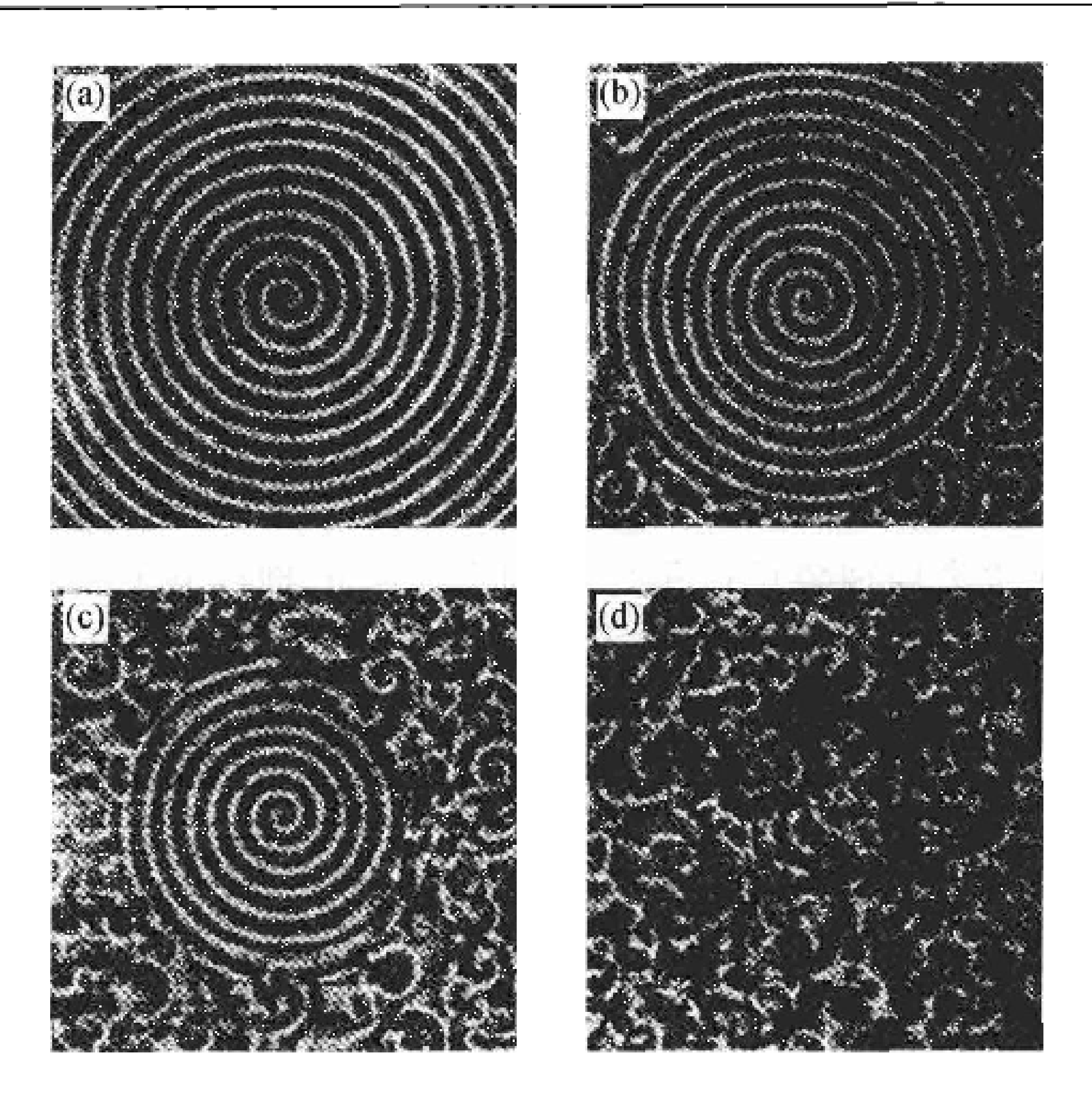


图 11.4 模拟金兹堡-朗道方程观察到的爱克豪斯失稳

读者可能会对作者“粗暴地”将方程(11.1.3)的系数 α,β 与实验控制参量 Δ 作这种简单的对应关系感到怀疑,这种怀疑无疑是有道理的.但是由于对实验的模拟是在本杰明-费尔失稳区附近进行的,它还是反映了具体系统中动力学行为的本质.因为在临界点附近,任何系统都有相似的动力学行为.实际上如果将 β 值固定,而认为 α 随实验系统的控制参量变化,只要让 $1+\alpha\beta$ 在零值附近随控制参量连续变化,就可以构造出如图 11.4 所示的对流失稳的图形.这个例子再一次表明,在研究系统临界点附近的动力学行为时,不必对系统的具体情况作分析.只要抓住事物的本质,即本杰明-费尔失稳与爱克豪斯失稳,就可以得到具有普遍意义的结果.

§11.3 漫游螺旋波

在扎布亭斯基第一次发现 BZ 反应系统中的螺旋波现象以后不久,美国的生物化学家维夫瑞(Winfree),在他发表在《科学》杂志的一篇文章的脚注中,提到螺旋波的端点并不总是围绕一个固定点作周期性圆周运动[77].在对螺旋波端点的行为作了仔细观察后,维夫瑞发现螺旋波端点的运动轨迹在某些条件下可能存在很复杂的结构.维夫瑞用“漫游”(meandering)一词描述这种螺旋波端点

运动的非周期性. 在这以后的十几年里, 无论是实验还是数值模拟都没有回答下面的问题: 在一个均匀的反应扩散系统中, 可激发螺旋波端点的轨迹是怎样的? 直到 20 世纪 90 年代初这个问题才得到了一个比较圆满的答案. 更精细的实验与更系统的数值模拟都表明, 在一个可激发系统中, 螺旋波的端点轨迹随控制变量的不同, 可能是周期性的圆周运动, 也可能是准周期或非周期运动. 最常见的准周期运动轨迹是内圆滚线或外圆滚线. 本节将从分岔理论的角度, 分析螺旋波端点轨迹的动力学行为. 这里螺旋波端点的定义是螺旋波锋曲率为最大值的位置. 这项工作是巴克利(Barkley)在 20 世纪 90 年代初用三年多时间逐步完成的[78—81].

在介绍螺旋波端点分岔理论之前, 首先对从实验及数值模拟中观察到的螺旋波端点的行为作一个比较详细的描述. 图 11.5 给出在可激发系统内观察到的几种典型的螺旋波端点的运动轨迹. 最常见的轨迹是一个圆. 螺旋波端点沿圆作周期运动, 见图 11.5(a), (b). 这种运动状态为螺旋波的周期态. 前一章介绍的螺旋波都属于周期态螺旋波. 当控制参量改变时, 这种周期性螺旋波可能失去稳定性. 这时螺旋波的端点运动轨迹不再是周期性的, 而被其他更为复杂的端点运动轨迹取代. 在分岔点附近, 人们首先观察到的是内圆滚线轨迹, 见图 11.5(c), 或外圆滚线轨迹, 见图 11.5(d). 远离分岔点时, 系统可能出现更为复杂的端点运动轨迹. 图 11.5(e), (f)是数值模拟实验观察到的两个例子. 由于历

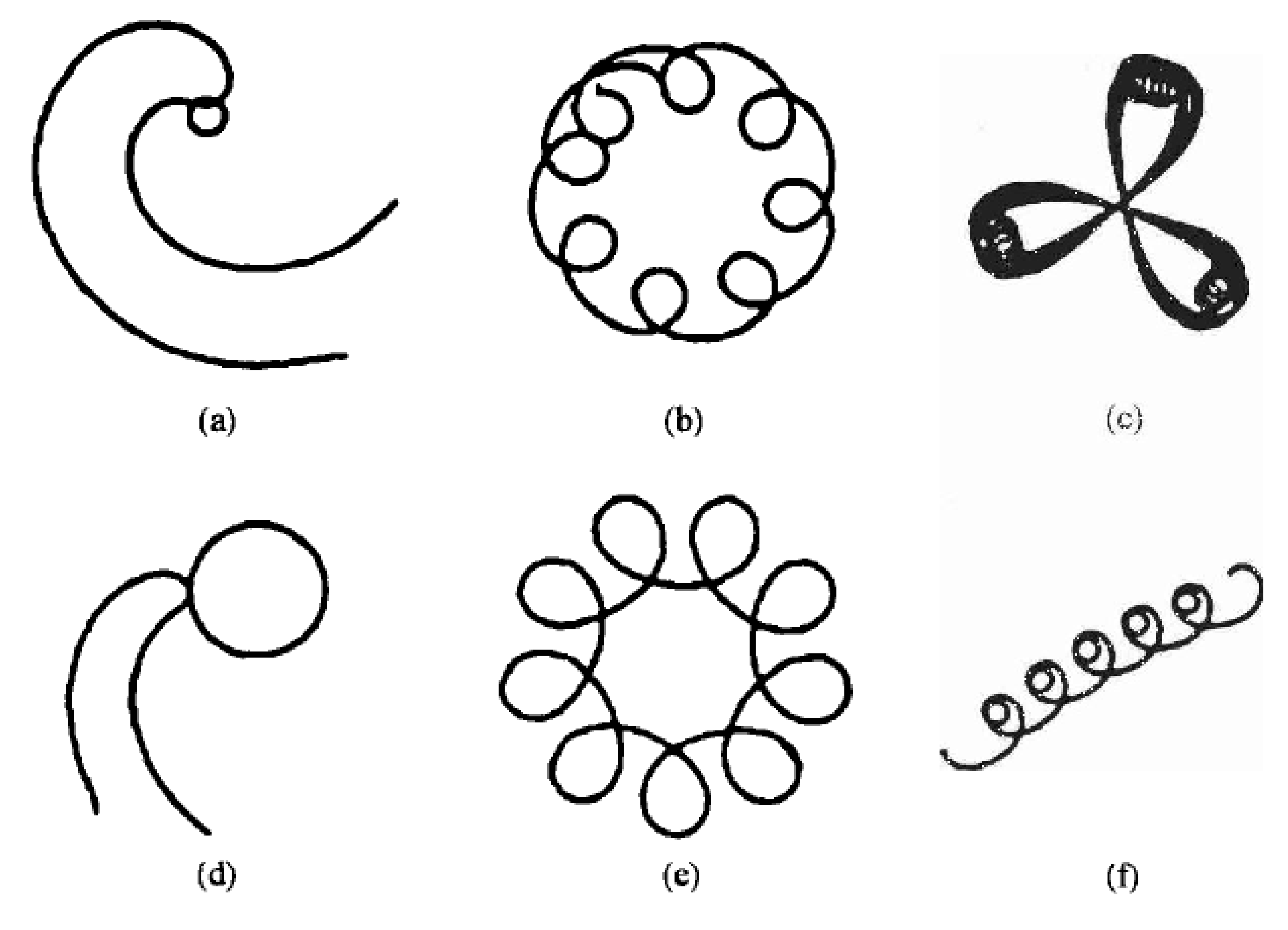


图 11.5 数值模拟得到的螺旋波端点轨迹

史原因所有这些具有复杂端点运动轨迹的螺旋波都被称为漫游螺旋波，虽然在大多数情况下复杂螺旋波端点的运动轨迹都不是“漫游”，而是遵循某种规律．螺旋波端点运动的分岔理论，解释了系统从周期性螺旋波到具有内、外圆滚线轨迹的调制螺旋波的相变过程．我们知道，圆滚线由两个半径不同的圆以不同频率做圆周运动组成．半径为 r_1 的初级圆围绕半径为 r_2 的圆滚圆以 f_2 频率运动，同时以 f_1 频率自旋．在初级圆上的一点的运动轨迹即为圆滚线．当初级圆的自旋方向与圆滚圆的运动方向相反时有外圆滚线，见图 11.6(a)；当初级圆的自旋方向与圆滚圆的运动方向相同时有内圆滚线，见图11.6(b)．一般来讲，在反应扩散系统中，调制螺旋波的两个频率 f_1，f_2 没有简单的有理数关系，也就是说两个频率之间没有共振．因此，在一般情况下调制螺旋波的运动轨迹不是周期的，而是准周期的．另外，当圆滚半径 r_2 为零时，调制螺旋波回归到周期性螺旋波．当圆滚半径趋于无穷大时，圆滚型调制螺旋波变为行走型调制螺旋波．

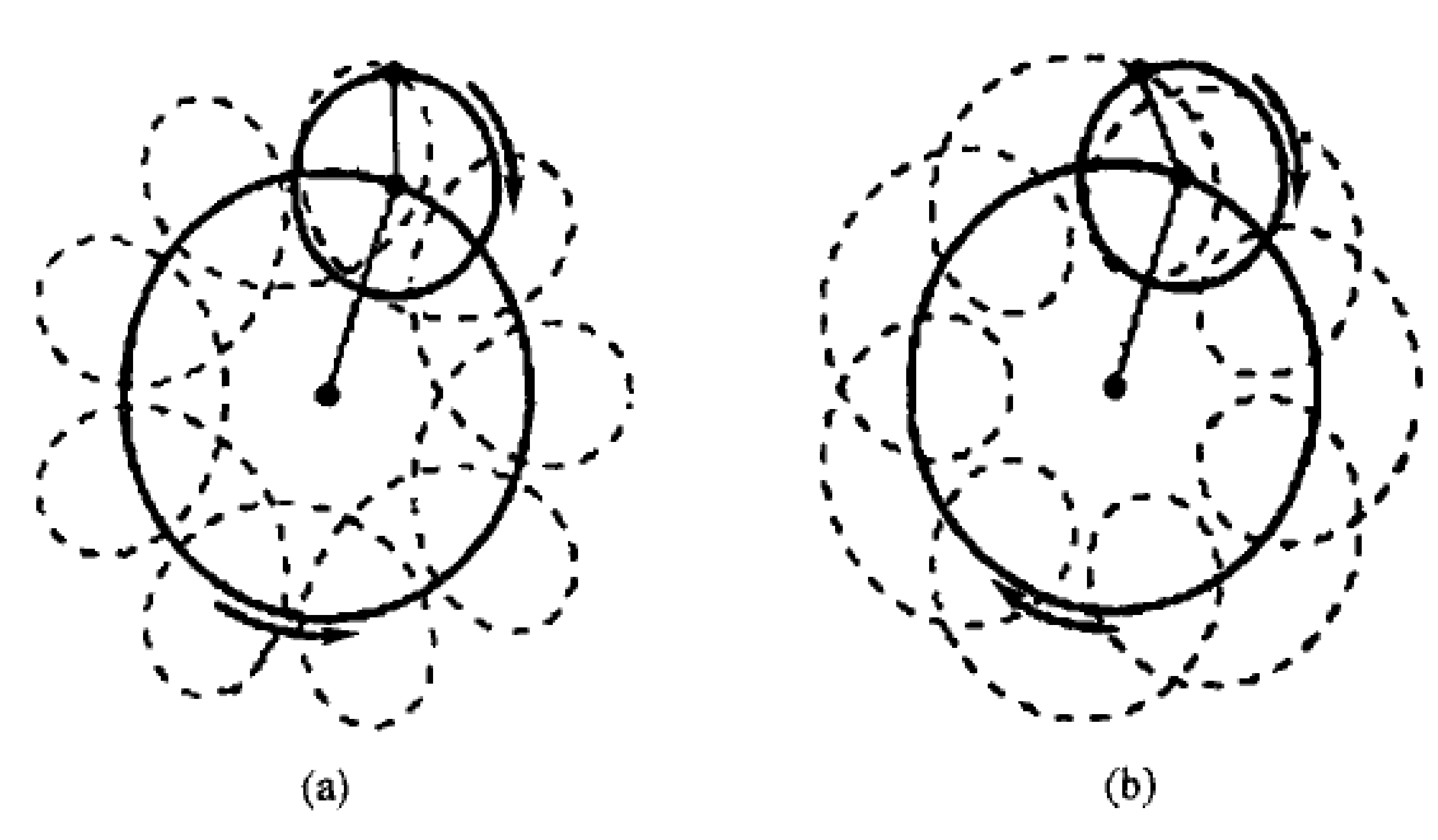


图 11.6 螺旋波端点的两种圆滚线轨迹

图 11.7 代表一个从数值模拟得到的、典型的从周期螺旋波到调制螺旋波的相变图．虽然对于不同的系统来说所取的控制参量是不同的，但在周期螺旋波-调制螺旋波相变点附近，所有系统都显示出图 11.7 的特征．相图 11.7 将系统的动力学行为分为三个区域：无螺旋波均匀区、周期性螺旋波区、调制性螺旋波区．各区域的边界定义了不同的动力学分岔现象．在调制性螺旋波区内，又可以将其分为两个子区：外圆滚型与内圆滚型调制螺旋波．在它们的边界上是行走型调制螺旋波．在图 11.7 所代表的系统中，如果固定控制参量 b，逐步减少控制参量 a，使系统从周期性螺旋波进入外圆滚型调制螺旋波，调制螺旋波的圆滚半径在分界线处将从零逐渐增大．到达内、外圆滚型调制螺旋波的分界线处圆

滚半径趋于无穷大. 此后螺旋波的端点轨迹由外圆滚线变为内圆滚线. 继续减少控制参量 a, 内圆滚半径随之减小, 在调制螺旋波-周期螺旋波边界处圆滚半径重新变为零, 系统变为周期性螺旋波.

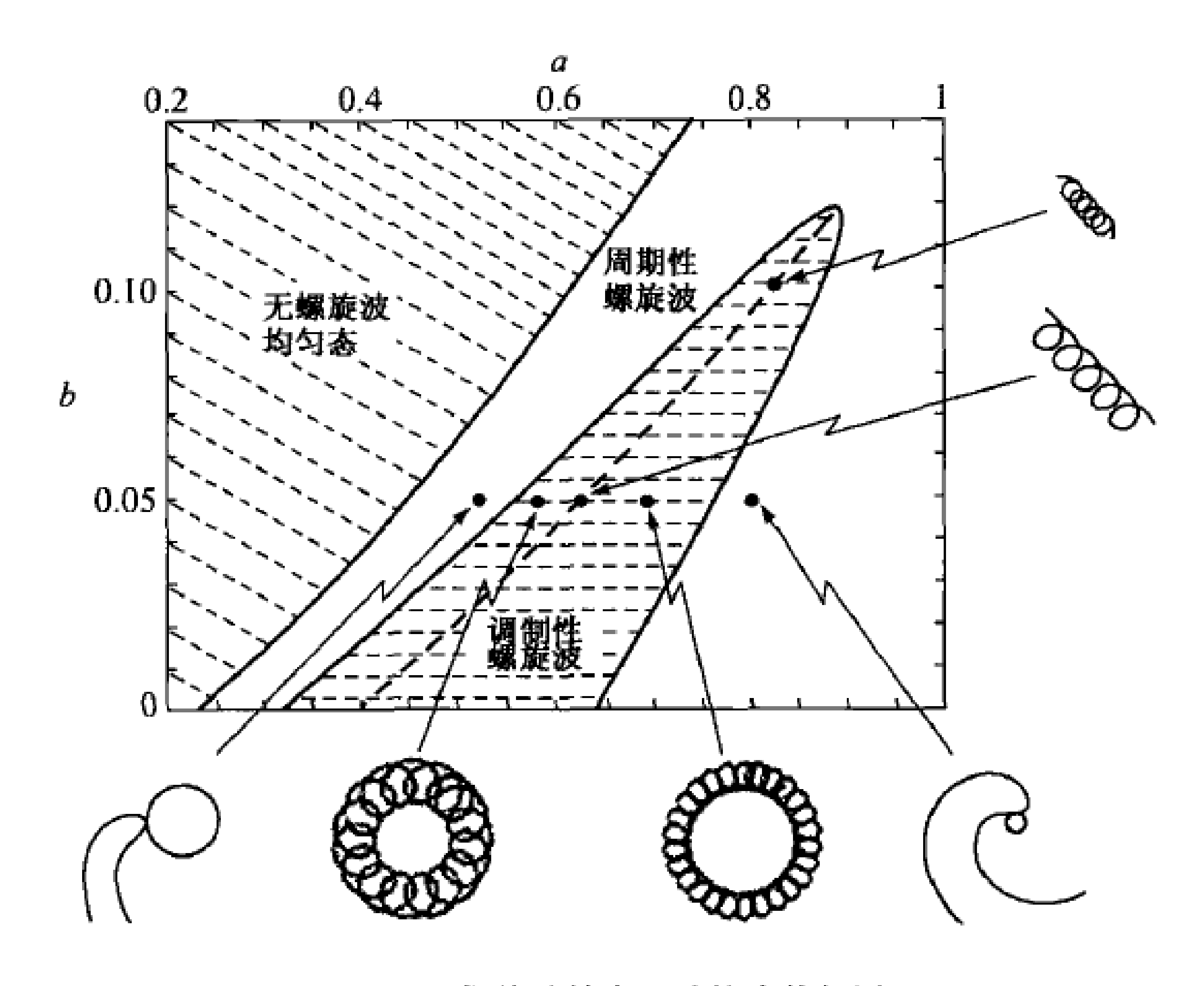


图 11.7　螺旋波端点运动轨迹的相图

建立图 11.7 所选用的动力学模型是改进了的费兹胡-纳古莫(Fizhugh-Nagumo)模型[82,83]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon}\left[u(1-u)\left(u-\frac{v+b}{a}\right)\right]+\nabla^2 u, \qquad (11.3.1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=u-v+D_v\nabla^2 v, \qquad (11.3.1b)$$

其中 u,v 是方程的变量, a,b 是控制参量, $\varepsilon\ll 1$. 该模型也是可激发型的. 它与 BZ 反应模型(10.2.1)有许多相似之处, 同时又更容易进行数值模拟. 由于在分岔点附近系统的动力学行为具有不依赖于具体系统的普适规律, 因而可以用费兹胡-纳古莫模型分析 BZ 反应系统中螺旋波端点运动的分岔规律, 以后会看到理论分析与实验观察有定性的吻合.

虽然数值模拟可以得到一个动力学系统的许多重要的信息, 但为了从本质上了解这个动力学系统的运动规律, 一定的理论分析是必不可少的. 分析螺旋波怎样从周期性向调制性转变的重要工具仍然是分岔理论. 分析的出发点是讨论周期性螺旋波的稳定性. 为此首先要在变换坐标下, 使时空动态的

周期性螺旋波变成空间定态的螺旋状斑图. 这种坐标变换可以通过对系统(11.3.1)的坐标进行以螺旋波的中心为中心,以螺旋波的旋转频率 ω_1 为频率的旋转达到. 令

$$\frac{\partial}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial t}-\omega_1\frac{\partial}{\partial \theta},$$

在这种旋转坐标系中,周期性螺旋波变为满足如下方程的定态螺旋斑图解:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=0=\frac{1}{\varepsilon}\left[u(1-u)\left(u-\frac{v+b}{a}\right)\right]+\omega_1\frac{\partial u}{\partial \theta'}+\nabla'^2 u, \quad (11.3.2a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}=0=u-v+\omega_1\frac{\partial v}{\partial \theta'}+D_v\nabla'^2 v. \quad (11.3.2b)$$

这里撇符号代表旋转坐标系的变量. 方程(11.3.2)的边界条件可选为 $\partial u/\partial r|_R=0$,这里 R 是系统的边界,图 11.8 是这个定态解的一个实例.

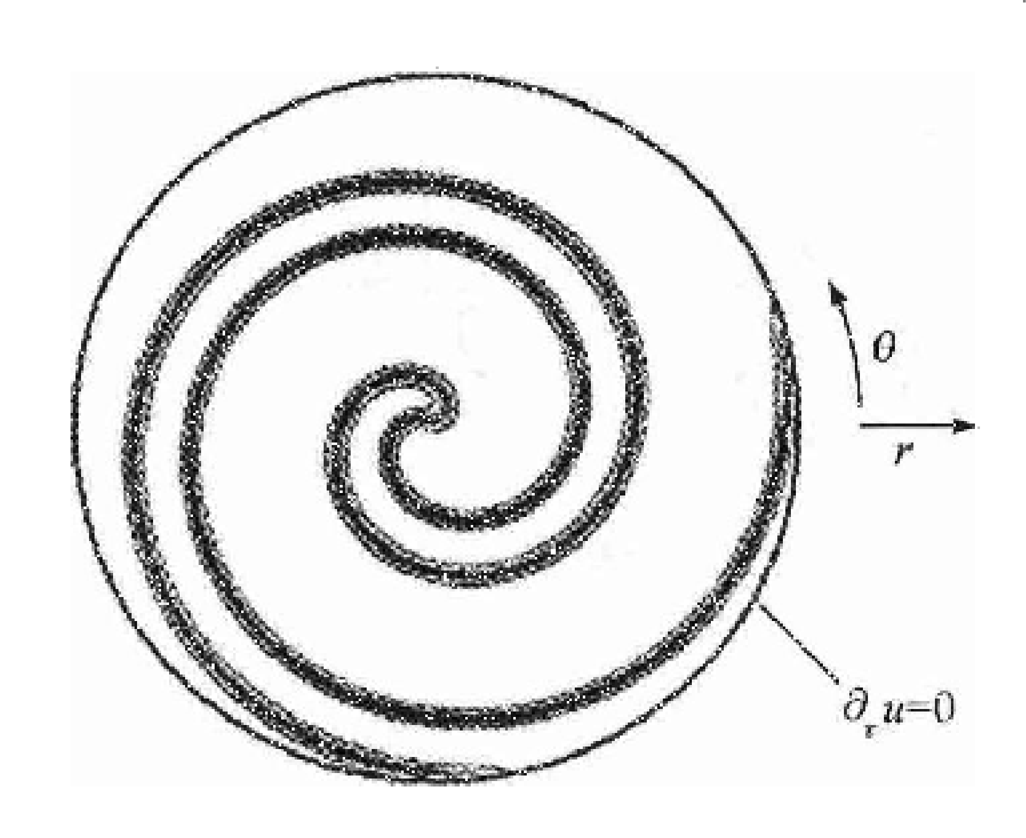


图 11.8 在旋转坐标系下的螺旋波定态解

方程(11.3.2)是一个非线性方程特征值问题. 因为解这个方程不仅要决定变量 u 与 v 随空间的变化形式,同时又要得到旋转频率 ω_1. 由于空间旋转不变性,方程(11.3.2)的定态解可以有一个任意的转动角. 这个转动角可以通过给方程加上另一个边界条件而固定,例如令变量 u 在空间的某个位置的值为 1/2.

在得到周期性螺旋波在旋转坐标系下的定态解后,下一步是对该定态解做线性稳定性分析. 对定态解

$$\boldsymbol{u}_0(\omega_1)=\begin{pmatrix}u_0(\omega_1)\\ v_0(\omega_1)\end{pmatrix}$$

做微扰 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0+\tilde{\boldsymbol{u}}$,将微扰在傅里叶空间展开,代入方程(11.3.2)并只取线性项,得

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{u},\omega_1)\tilde{\boldsymbol{u}}=\lambda\tilde{\boldsymbol{u}}. \quad (11.3.3)$$

这里 λ 与 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ 分别是线性算符 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量. $\boldsymbol{A}$ 有如下形式：

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{u},\omega_1) = \boldsymbol{D}\nabla'^2 + \omega_1 \frac{\partial}{\partial\theta'}\boldsymbol{I} + \frac{\partial f(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}}, \tag{11.3.4}$$

其中

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D_v \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon}\left[u(1-u)\left(u - \frac{v+b}{a}\right)\right] \\ u - v \end{pmatrix}.$$

算符 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 决定了周期性螺旋波的稳定性. 如果所有特征值的实部都是负数，则对应的周期性螺旋波是稳定的. 如果至少有一个特征值的实部变为正值，则周期性螺旋波失稳. 将方程(11.3.2)的周期性螺旋波解代入线性特征方程(11.3.3)，可以通过数值计算得到该解对应的特征值 λ. 图 11.9(a),(b)表示了特征值的实部与虚部随控制参量 a 的变化，对应的螺旋波端点轨迹如图 11.9(c)所示. 在 $0.56<a<0.76$ 的区域内，系统存在实部大于零的特征值，因而对应的周期性螺旋波失稳. 当控制参量 a 下降到 0.76 以下时，一对共轭复数特征值由复平面的左半边跃到复平面的右半边，见图 11.9(b)，系统出现霍普夫分岔. 这种情况在模拟(11.3.2)式中对应于定态螺旋斑图的失稳，系统中的每一个点都开始随时间振荡，其中螺旋波的端点附近的点振幅最大. 当控制参量 a 降低到 0.64 时，这对共轭复数特征值的实部到达极大值，随后它们随 a 的降低而不断减小. 当 a 下降到 0.56 以下时，这对特征值从复平面的右半边跃回到复平面的左半边，系统经过另一个霍普夫分岔回到周期性螺旋波态.

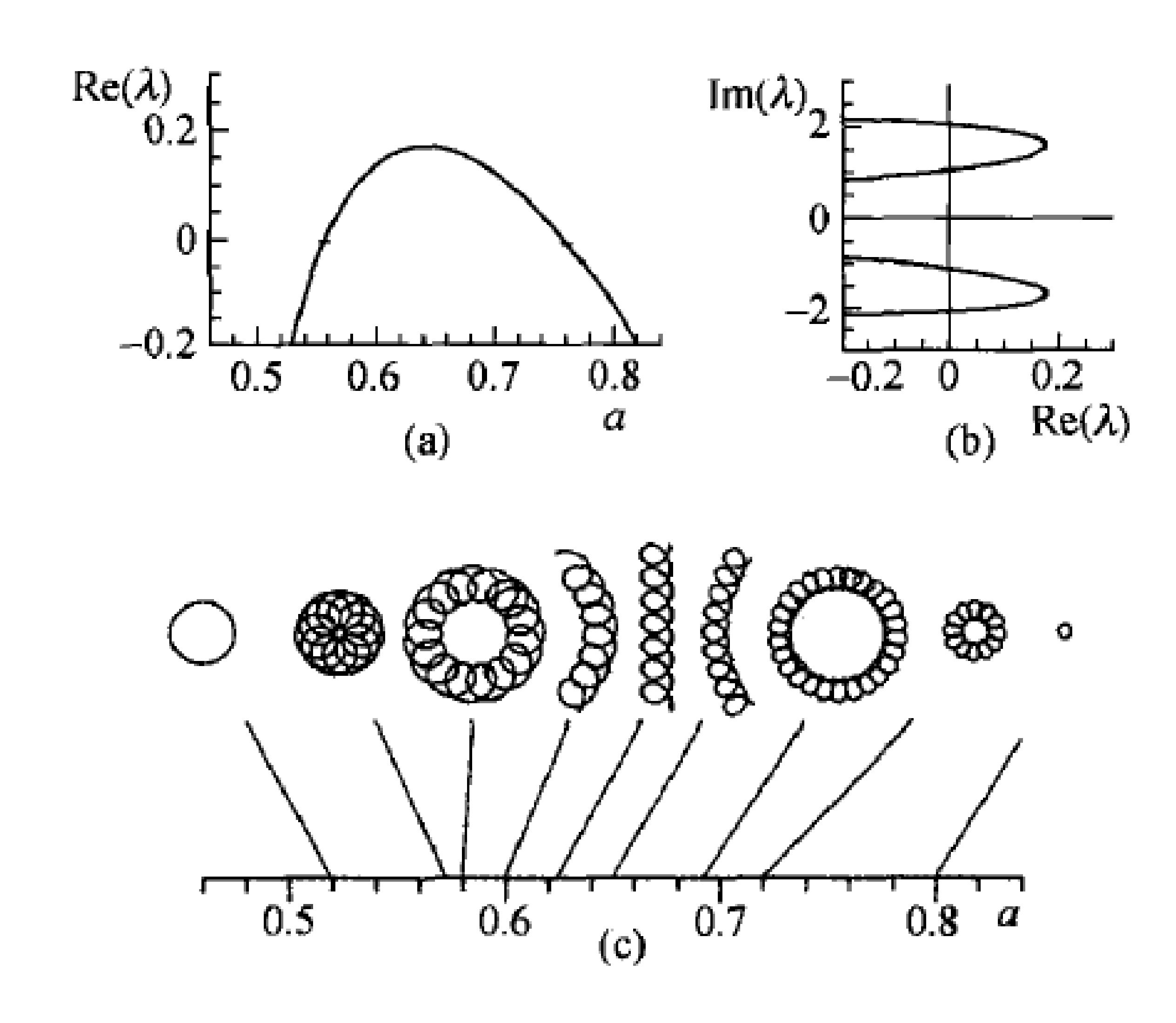


图 11.9　特征方程的特征值及相应螺旋波端点随控制参量的变化

周期性螺旋波的霍普夫分岔，给系统(11.3.1)引入了第二个振荡频率 ω_2，这就是调制频率. 相应地，如果我们考察螺旋波端点的运动轨迹，周期性螺旋波变为准周期螺旋波，即圆滚线形调制螺旋波，见图 11.9(c). 比较图 11.9(c)与图 11.6 可知，圆滚线的初级频率 f_1 对应于周期性螺旋波的频率 ω_1，圆滚线的滚动频率 f_2 对应于周期性频率 ω_1 与调制频率 ω_2 的差：$f_2=\omega_1-\omega_2$. 如果 $f_2<0$，则圆滚线初级圆的自旋方向与滚动方向相反，螺旋波端点的运动轨迹为外圆滚线，如图 11.6(a)所示. 如果 $f_2>0$，则圆滚线初级圆的自旋方向与滚动方向相同，螺旋波的轨迹为内圆滚线，如图 11.6(b)所示. 当 $f_2=0$ 时，螺旋波变为行走型螺旋波. 图 11.10 表示了调制性螺旋波随控制参量 a 变化的分岔图. 这里圆滚线的两个圆的半径比 r_2/r_1(见图 11.6)被选为序参量，$r_2/r_1=0$ 表示系统为周期性螺旋波. 在两个分岔点附近，调制性螺旋波的序参量 r_2/r_1 与控制参量 a 到临界点 a_c 的距离的平方根成正比：$r_2/r_1\propto(a-a_c)^{1/2}$. 说明两个霍普夫分岔都是超临界的. 当控制参量远离分岔点时，序参量 r_2/r_1 与控制参量$(a-a_c)$的平方根关系不复存在. 在内、外圆滚线轨迹的边界处序参量趋于无穷大，在此边界点附近：$r_2/r_1\propto(\omega_1^2-\omega_2^2)^{-1}$.

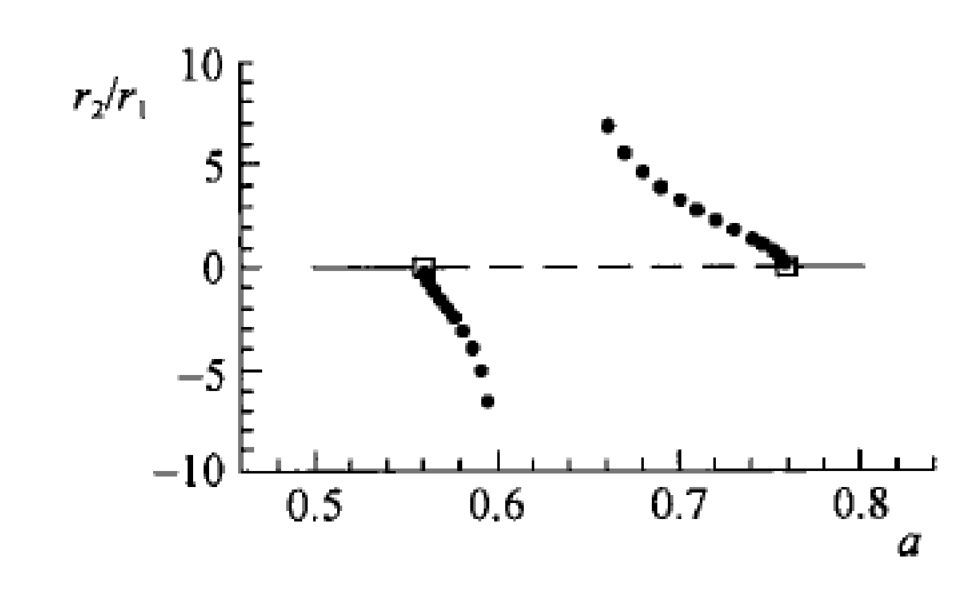


图 11.10 螺旋波斑图霍普夫分岔附近系统的临界行为

§11.4 螺旋波端点运动的正则方程

从上一节的讨论中知道，螺旋波的动力学性质主要取决于螺旋波端点的运动轨迹. 而螺旋波的运动轨迹可能用分岔理论给予一定程度的综合. 这些观察使人们希望找到一个正则方程，用以近似地描述螺旋波端点的动力学行为. 也就是说，通过分析系统在分岔点附近的行为，希望可以将无穷多维的反应扩散系统简化成低维数的、具有有限变量的常微分方程系统. 这种操作在分析图灵斑图时，通过推导振幅方程得到过. 分析这类低维数系统，可望得到螺旋波端点

行为的完全描述.

为了得到反映螺旋波动力学特征的正则方程,首先要找到由方程(11.3.1)规定的所有关于周期螺旋波解的主动模,即特征值在复平面虚轴附近的模.图11.11给出了在周期螺旋波——调制螺旋波相变边界上的所有主动模的特征值.读者看到除了对应于霍普夫分岔的一对特征值以外,系统还具有三个由于系统的对称性引起的特征模.这些特征模对应的特征值由图11.11中的"×"号标出.与霍普夫分岔的特征值不同,不论控制参量 a,b 如何变化,这些特征值总是在虚轴上.

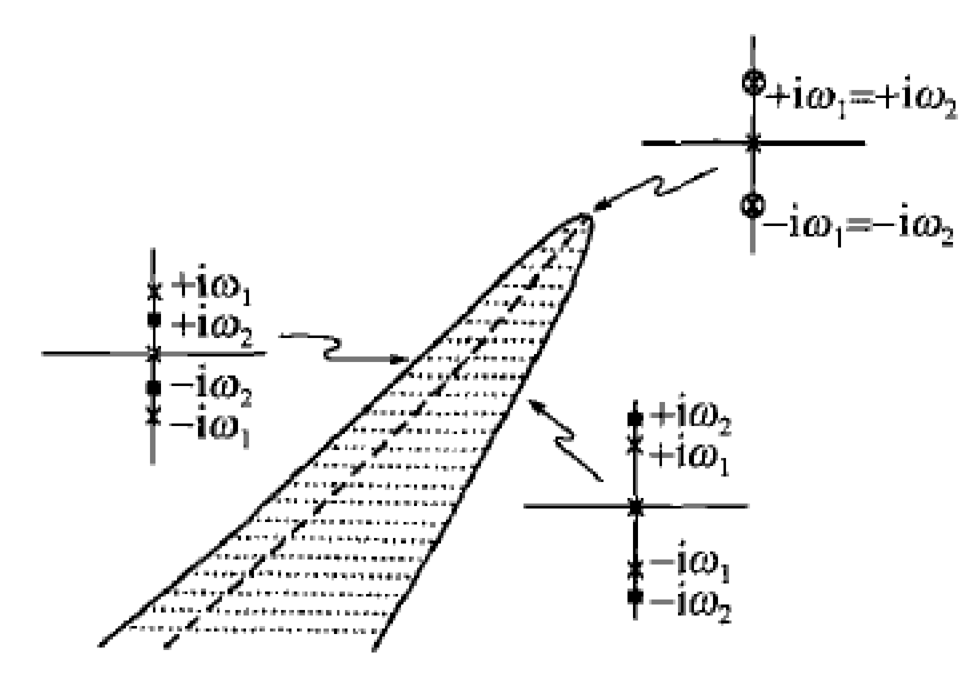


图 11.11 在相变边界上的所有主动模的特征值

特征值为零的模与系统的旋转对称相关.为了证明这个论断,首先推导与旋转对称相关的特征方程(11.3.3)的特征向量.根据方程(11.3.2)的解的旋转不变性,如果 $\boldsymbol{u}(\theta=0)$ 是方程(11.3.2)的一个解,则 $\boldsymbol{u}(\theta=\Delta\theta)$ 也是该方程的一个解.由于特征方程(11.3.3)是线性方程,

$$\frac{\Delta \boldsymbol{u}}{\Delta\theta}=\frac{\boldsymbol{u}(\Delta\theta)-\boldsymbol{u}(0)}{\Delta\theta},$$

在 $\Delta\theta\to 0$ 时一定是特征方程的一个特征模.下面计算这个特征模的特征值.将特征模

$$\boldsymbol{U}_R=\frac{\partial}{\partial\theta'}\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix} \tag{11.4.1}$$

代入特征方程(11.3.3)的左端,得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_R &= D\nabla'^2\frac{\partial}{\partial\theta'}\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}+\omega_1\frac{\partial}{\partial\theta'}\left(\frac{\partial}{\partial\theta'}\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}\right)+\left.\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\right|_{u_0,v_0}\frac{\partial}{\partial\theta'}\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}\\ &=\frac{\partial}{\partial\theta'}\left[D\,\nabla'^2\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}+\omega_1\frac{\partial}{\partial\theta'}\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}\right]+\frac{\partial}{\partial\theta'}\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix}=0.\end{aligned}$$

上面的推导过程利用了方程(11.3.2).从上面的分析得知系统的旋转对称导致

了方程(11.3.3)的一个零特征值.

同样，对于一个无穷大系统来说，对周期螺旋波中心点做一个平移操作得到的新态仍然是这个螺旋波态.重复上面的推导过程，可知平移操作对应的特征模为

$$U_T = \frac{\partial}{\partial x}\binom{u_0}{v_0} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\binom{u_0}{v_0}. \tag{11.4.2}$$

将此特征模代入特征方程(11.3.3)的左端，得

$$AU_T = \pm \mathrm{i}\omega_1 U_T,$$

所以，系统的平移对称导致了方程(11.3.3)的一对特征值$\pm \mathrm{i}\omega_1$.对于数值模拟结果图 11.8 来说，由于系统是有界的(R=常数)，它并不满足平移对称.但如果R值取得足够大，可以近似地认为系统满足平移对称.例如在图 11.8 中，经计算可知，$|\mathrm{Re}(\lambda_T)| < 10^{-45}$，所以在该系统中平移对称可以被认为是一个非常好的近似.

观察图 11.11 看到，特征值$\pm \mathrm{i}\omega_1$与$\pm \mathrm{i}\omega_2$在相图的端点处重合.在这里周期螺旋波，内、外圆滚线型调制螺旋波，行走型调制螺旋波都重合在一起.显然，为了抓住螺旋波端点动力学行为的本质，正则方程应该在这一二维切空间(codimension-two)分岔点上展开.称此点为螺旋波的组织中心.反映螺旋波在切空间附近动力学行为的正则方程，应该满足以下两个条件：(1) 方程必须满足旋转、平移与镜像对称，这些对称条件反映了螺旋波的基本特征；(2) 方程对于周期螺旋波态，必须存在一个超临界霍普夫分岔.到目前为止，满足以上两个条件的正则方程还没有从数学上严格推导出来，巴克利在没有严格推导的情况下，提出以下形式的常微分方程作为描写螺旋波端点在切空间附近行为的正则方程：

$$\frac{\partial p}{\partial t} = v, \tag{11.4.3a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v[f(|v|^2, w^2) + \mathrm{i}wh(|v|^2, w^2)], \tag{11.4.3b}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = wg(|v|^2, w^2). \tag{11.4.3c}$$

其中p与v为复变量，分别代表螺旋波端点的位置($p=x+\mathrm{i}y$)与速度($v=se^{\mathrm{i}\varphi}$, $s>0$)，w为实变量，它的值正比于周期螺旋波的旋转频率.此正则方程在实空间中是五维的，它反映系统在分岔点附近有五个实部接近于或等于 0 的特征值，因而中心流形是五维的.可以证明，对于任何函数形式的f,g与h，方程(11.4.3)在如下变换中保持不变：

$$\text{旋转变换：}\quad R_\gamma\begin{pmatrix}p\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{i\gamma}p\\e^{i\gamma}v\\w\end{pmatrix}\qquad(\gamma\text{ 为旋转角}),$$

$$\text{镜像变换：}\quad h\begin{pmatrix}p\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{p}\\\bar{v}\\-w\end{pmatrix},$$

$$\text{平移变换：}\quad \Gamma_{\alpha\beta}\begin{pmatrix}p\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p+\alpha+i\beta\\v\\w\end{pmatrix},$$

这里 α,β 分别为系统在 x,y 方向上的平移量. 在实空间中，方程(11.4.3)变为

$$\frac{dx}{dt}=s\cos\varphi,\quad \frac{dy}{dt}=s\sin\varphi,\quad \frac{d\varphi}{dt}=w\cdot h(s^2,w^2),$$

$$\frac{ds}{dt}=s\cdot f(s^2,w^2),\quad \frac{dw}{dt}=w\cdot g(s^2,w^2). \tag{11.4.4}$$

巴克利发现，既可以得到切空间分岔点，又可以使方程(11.4.3)的解有界的一组简单的 f,g 与 h 的函数为

$$f(s^2,w^2)=-\frac{1}{4}+\alpha_1 s^2+\alpha_2 w^2-s^4, \tag{11.4.5a}$$

$$g(s^2,w^2)=s^2-w^2-1, \tag{11.4.5b}$$

$$h(s^2,w^2)=\gamma_0. \tag{11.4.5c}$$

由(11.4.4)与(11.4.5)构成的正则方程，可以完全反映螺旋波端点在切空间点附近的运动规律. 图 11.12 是正则方程(11.4.4)+(11.4.5)的螺旋波解在控制参量空间(α_1,α_2)的相图. 与图 11.7 相比，可以看到此正则方程所反映的螺旋波端点行为与模拟反应扩散方程(11.3.1)中所观察到的螺旋波端点行为有定性的吻合，这表明所选择的正则方程抓住了螺旋波端点运动在切空间分岔点附近的动力学本质.

分析正则方程(11.4.4)+(11.4.5)发现变量(s,w)构成一个独立的子系统，它们的动力学行为不受变量 x,y 的影响. 在分析中可以将这个子系统与原正则方程隔绝开来. 在解出 s,w 以后，变量 x,y 的函数形式容易通过积分获得. 因此，在分析正则方程(11.4.4)+(11.4.5)时，只需要考虑(s,w)子系统的动力学行为即可. 令 $p=s^2,q=w^2$，得到双变量常微分方程

$$\frac{dp}{dt}=2p\cdot f(p,q), \tag{11.4.6a}$$

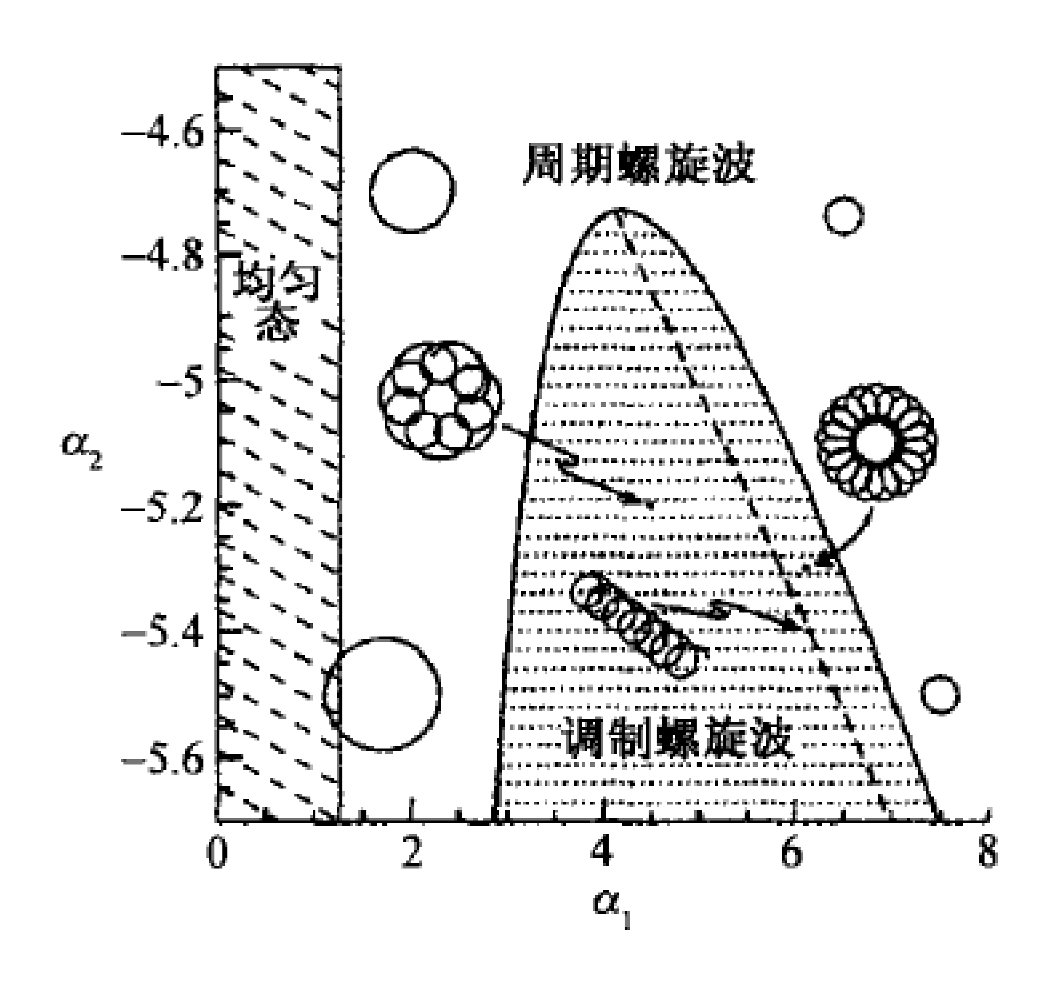


图 11.12　从正则方程得到的螺旋波端点运动轨迹的相图

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=2q\cdot g(p,q),\tag{11.4.6b}$$

这里

$$f(p,q)=-\frac{1}{4}+\alpha_1 p+\alpha_2 q-p^2,$$

$$g(p,q)=p-q-1.$$

因为规定 $s>0$，所以 $s=p^{1/2}$. 对于 w 没有规定它的符号，因此 $w=\pm q^{1/2}$. 变量的正负号反映了系统的镜像对称.

方程(11.4.6)的第一个定态解是 $p=q=0$. 容易证明此解对于所有控制参量 α_1,α_2 都是线性稳定的. 在正则方程(11.4.4)+(11.4.5)中，它对应于解 $v=w=0$，$p=$常数. 很明显这个解不是一个螺旋波解，它相当于可激发系统中的均匀定态解，即反应扩散方程(11.3.1)中 $u=v=0$ 的解.

方程(11.4.6)的另一定态解可以通过对由 $f=0$，$g=0$ 构成的二次代数方程而得到. 在 p 的两个根中，只有较大的那个可以同时满足 $p>0$，$q>0$. 所以定态解为

$$p_1=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\sqrt{(\alpha_1-\alpha_2)^2-1}}{2},$$

$$q_1=p_1-1.\tag{11.4.7}$$

此解对应于反应扩散方程(11.3.1)中的周期性螺旋波. 为了看清楚这一点，将解(11.4.7)代入正则方程. 首先将 $w=\pm q^{1/2}$ 代入 φ 方程，得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\omega\gamma_0=\pm\sqrt{q_1}\,\gamma_0\equiv\pm\,\omega_1,$$

积分得 $\varphi(t)=\pm\omega_1 t+\varphi_0$. 将 $s=\sqrt{p_1}$, $\varphi(t)=\pm\omega_1 t+\varphi_0$ 代入 x, y 方程并积分，得：

$$x(t)=x_0+R\sin(\pm\omega_t+\varphi_0),$$
$$y(t)=y_0+R\cos(\pm\omega_t+\varphi_0),$$
$$R=\pm\gamma_0^{-1}\sqrt{p_1/q_1}.$$

这个解代表周期螺旋波端点的运动轨迹，端点沿半径为 R 的圆作圆周运动，旋转频率为 ω_1. 常数 φ_0 反映了系统具有的旋转不变性；常数 x_0, y_0 反映了系统具有的空间平移不变性；ω_1 前面的正负号反映了系统具有镜像交换不变性.

从解(11.4.7)看出，周期螺旋波存在的条件是 $\alpha_1>5/4$(注意在切空间附近 α_2 为负值，见图 11.12). 当 α_1 趋向于 5/4 时，q 趋向于 0. 这时周期螺旋波的旋转频率 ω_1 趋于 0，圆周半径 R 趋于无穷大. 这种状态对应于反应扩散系统中螺旋波态与均匀态之间的变换. 在这个边界上螺旋波不再旋转，而是沿与波锋线垂直的方向平移，见图 11.13(b). 在边界线的左边，波锋渐渐向边界退缩，最终系统到达均匀定态，见图 11.13(a)；在边界线的右端，可激发螺旋波自组织形成，见图 11.13(c)，(d). 正则方程正确地反映了系统在这类相变边界上的运动规律.

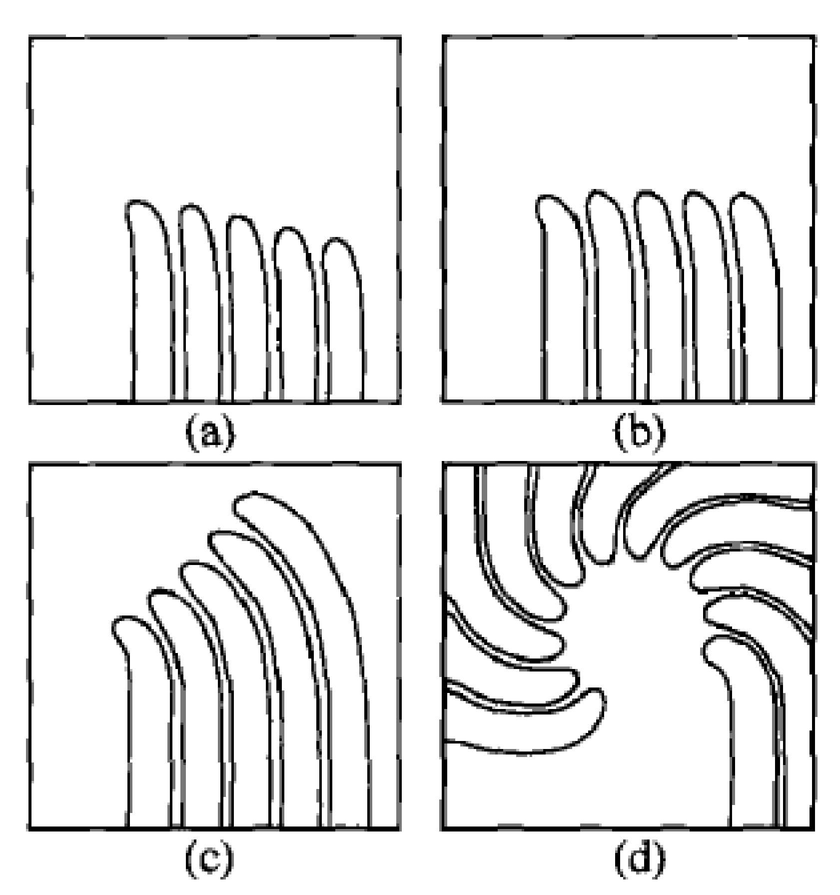


图 11.13　系统在可激发态-亚可激发态边界的行为

从前面的分析中了解到，调制螺旋波的出现起源于周期螺旋波的霍普夫分岔. 在简化方程(11.4.6)中，这个过程对应于定态解(p_1, q_1)经霍普夫分岔形成极限环. 霍普夫分岔的条件可由对系统(11.4.6)进行线性稳定性分析获得. 决定系统(11.4.6)线性微扰方程的矩阵为

$$2\begin{pmatrix} p\cdot f_p(p,q) & p\cdot f_q(p,q) \\ q\cdot g_p(p,q) & q\cdot g_q(p,q) \end{pmatrix}.$$

这里,函数 f 和 g 的下标表示函数对这一下标变量的偏微分,矩阵中 p 与 q 的值由解(11.4.7)决定($p=p_1,q=q_1$).在霍普夫分岔点上各矩阵元满足以下关系:

$$\begin{aligned}Tr &= 2[p\cdot f_p(p,q)+q\cdot g_q(p,q)]\\&=-2(2p_1^2-\alpha_1 p_1+q_1)=0,\end{aligned}\tag{11.4.8a}$$

$$\begin{aligned}\Delta &= 4pq[f_p(p,q)g_q(p,q)-f_q(p,q)g_p(p,q)]\\&=4p_1q_1(2p_1-\alpha_1-\alpha_2)>0.\end{aligned}\tag{11.4.8b}$$

对于系统(11.4.6),第二个条件总是成立,霍普夫分岔的条件由第一个关系式决定.经过一点简单的代数运算,得到以下决定霍普夫分岔边界的关系式:

$$p_{\mathrm{H}}=\frac{1}{4}\left[(\alpha_1-1)+\sqrt{\alpha_1^2-2\alpha_1+9}\right],\tag{11.4.9a}$$

$$\alpha_2=\frac{3-2(\alpha_1+1)p_{\mathrm{H}}}{4(p_{\mathrm{H}}-1)}.\tag{11.4.9b}$$

第一个关系式确定了在霍普夫分岔边界上给定 α_1 后的 p_{H} 值,由此知道周期螺旋波在霍普夫分岔边界上的频率只与控制参量 α_1 有关.第二个关系式决定了控制参量空间中霍普夫分岔的边界.很明显,此边界与控制参量 γ_0 无关.

在霍普夫分岔边界上,调制螺旋波的调制频率为

$$\omega_2=\sqrt{\Delta}=2\sqrt{p_{\mathrm{H}}q_{\mathrm{H}}(2p_{\mathrm{H}}-\alpha_1-\alpha_2)}.$$

利用式(11.4.9)它可以写成

$$\omega_2=2\sqrt{q_{\mathrm{H}}(1-(\alpha_2+1)p_{\mathrm{H}})},$$

因而 $|\omega_2/\omega_1|=2\sqrt{1-(\alpha_2+1)p_{\mathrm{H}}}/\gamma_0$.当 $|\omega_2/\omega_1|=1$ 时,系统在切空间分岔点上.这时切空间分岔点的位置不但决定于 α_1,α_2,也决定于 γ_0.由于霍普夫分岔边界与 γ_0 无关.原则上可以通过选取 γ_0 的值将切空间分岔点放在霍普夫分岔边界上的任意一个位置上.在计算中可以有意调节 γ_0,使切空间分岔点坐落在霍普夫分岔的顶部,见图 11.12.到目前为止,还没有一种理论可以解释为什么切空间分岔点总是坐落在霍普夫分岔边界上的顶部.我们最近的实验发现,在 BZ 反应系统中,切空间分岔点不一定坐落在霍普夫分岔的顶部.

§11.5 周期螺旋波失稳的实验观察

虽然维夫瑞在 20 世纪 70 年代初就发现了螺旋波端点运动的"漫游"行为,由于缺少合适的开放型空间反应器,对漫游螺旋波渐近态行为的系统研究到 20 世纪 90 年代初才真正开始.第一个对调制螺旋波的渐近态行为作系

统实验观察的是斯基诺(Skinner)[84]，他的工作证明了调制螺旋波是准周期的，也就是说，它的旋转频率 ω_1 与调制频率 ω_2 之间没有锁频行为. 1996 年，作者对周期螺旋波到调制螺旋波的非平衡相变进行了更加系统的实验观测，并基本完成了这方面的研究工作[49]. 本节所介绍的内容是作者在这个领域的工作结果.

图 11.14 显示了从作者实验中观察到的所有类型的螺旋波. 实验在开放型空间反应器中进行，研究对象为 BZ 反应系统. 图 11.14(a)是周期性螺旋波. 当控制参量变化时，周期性螺旋波失稳. 对于不同的控制参量，系统可能变为外圆滚型调制螺旋波，见图 11.14(b)，或内圆滚型调制螺旋波，见图 11.14(d). 图 11.14(e)，(f)分别是(b)，(d)的局部放大图像，它们显示了调制螺旋波端点的外、内圆滚线运动轨迹. 当圆滚线的圆滚半径足够大时，由于螺旋波端点移动引起的多普勒效应开始变得明显起来. 在螺旋波端点运动方向前面的行波被压缩，在螺旋波端点运动方向后面的行波被伸长. 这种行波的多普勒效应使系统显示出一个超螺旋波. 仔细观察图 11.14(b)，(d)的阴影部分所构成的斑图，可以看到超螺旋波的图像. 超螺旋波的旋转频率为周期性螺旋波频率 ω_1 与调制频率 ω_2 之差的绝对值 $f_2=|\omega_1-\omega_2|$. 当调制螺旋波端点的轨迹为外圆滚型时，超螺旋波的旋转方向与原螺旋波旋转方向相反；当调制螺旋波端点的轨迹为内圆滚线时，超螺旋波与原螺旋波的旋转方向相同. 在内、外圆滚型调制螺旋波的边界线上是行走型调制螺旋波，见图 11.14(c).

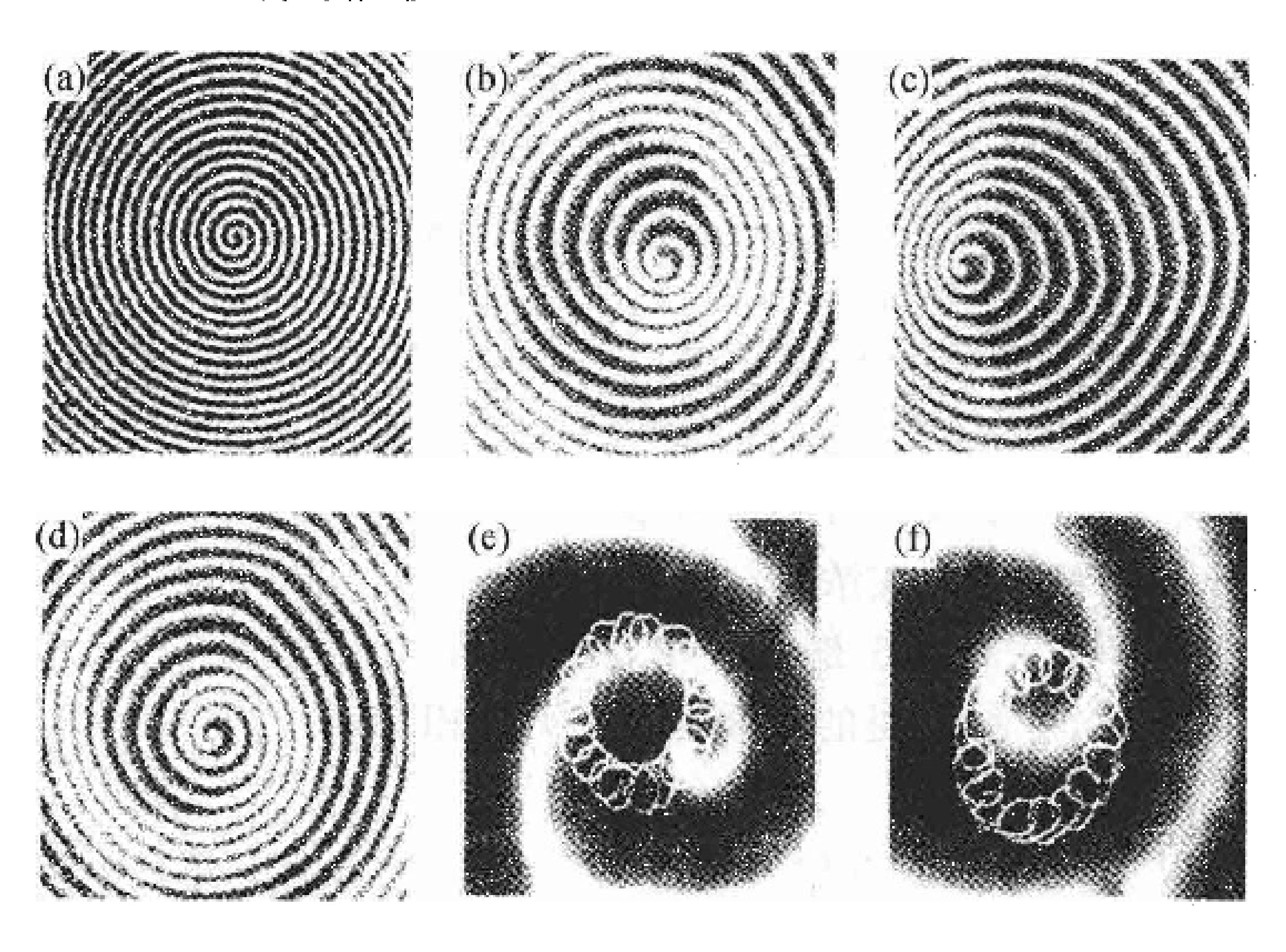


图 11.14　实验中观察到的漫游螺旋波

实验首先选择 BZ 反应中的硫酸浓度[H_2SO_4]作为系统的控制参量，其他参量被固定在一个确定值上. 图 11.15 综合了螺旋波端点的运动轨迹随反应控制参量[H_2SO_4] 变化的实验观察结果. 调制螺旋波只有当 0.67 M>[H_2SO_4]>0.26 M(M: mol/L)时存在，在这个控制参量窗口之外，系统为周期螺旋波态. 减少(或增加)[H_2SO_4] 并越过临界值(分别为 0.67 M 与 0.26 M)时，周期螺旋波失稳，系统经非平衡相变变为外(或内)圆滚型调制螺旋波态. 调制螺旋波的端点轨迹是准周期的，决定圆滚线运动的两个频率之比随控制参量连续变化. 也就是说，系统不存在锁频现象. 圆滚线轨迹的圆滚半径 r_2 随控制参量[H_2SO_4]通过边界深入调制螺旋波区而连续增加，见图 11.15. 在内、外圆滚线的分界线左右([H_2SO_4]=0.44 M)，出现近似于行走型的调制螺旋波. 这些实验观测与数值模拟(见图 11.9)有定性的吻合.

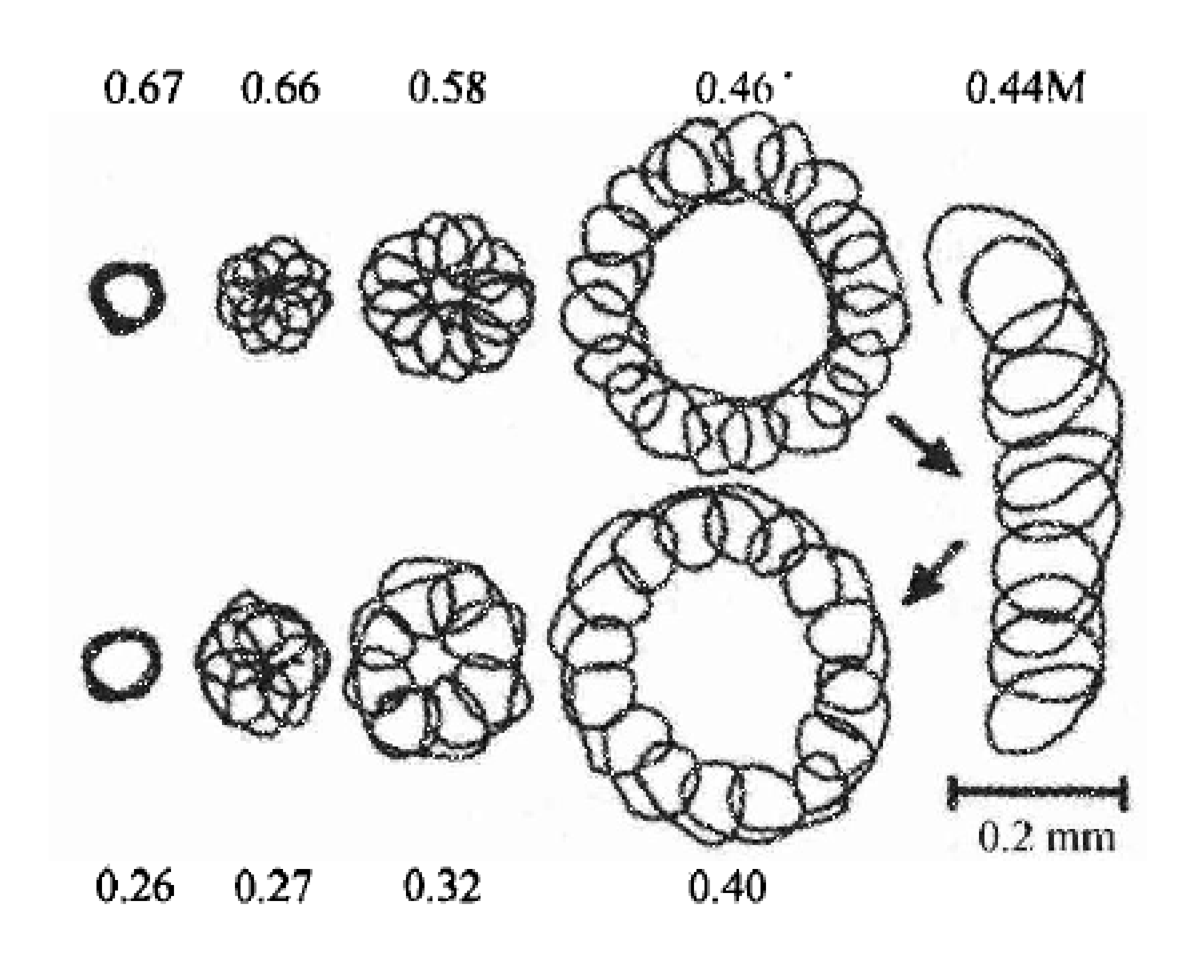


图 11.15 螺旋波端点轨迹随控制参量的变化

从上一节的正则方程分析中知道，可以通过考察系统在切空间分岔点，即周期螺旋波，内、外圆滚线型调制螺旋波与行走型调制螺旋波的汇合点附近的动力学行为，获得从周期螺旋波到调制螺旋波相变现象的本质. 在实验中，我们发现另一个控制参量，丙二酸浓度[$CH_2(COOH)_2$]可以与[H_2SO_4]一起将这个切空间分岔点展开. 图 11.16 是实验中得到的在参量空间([$CH_2(COOH)_2$]，[H_2SO_4])中系统非平衡相变的相图. 这个实验相图与正则方程中导出的相图 11.12 基本一致.

在上两节从对反应扩散方程(11.3.1)与正则方程(11.4.4)+(11.4.5)的分析中知道，由周期螺旋波到调制螺旋波的相变是由超临界霍普夫分岔引起的. 这个论断在实验中也得到了证明. 见图 11.17(a). 在实验中，圆滚线初级圆

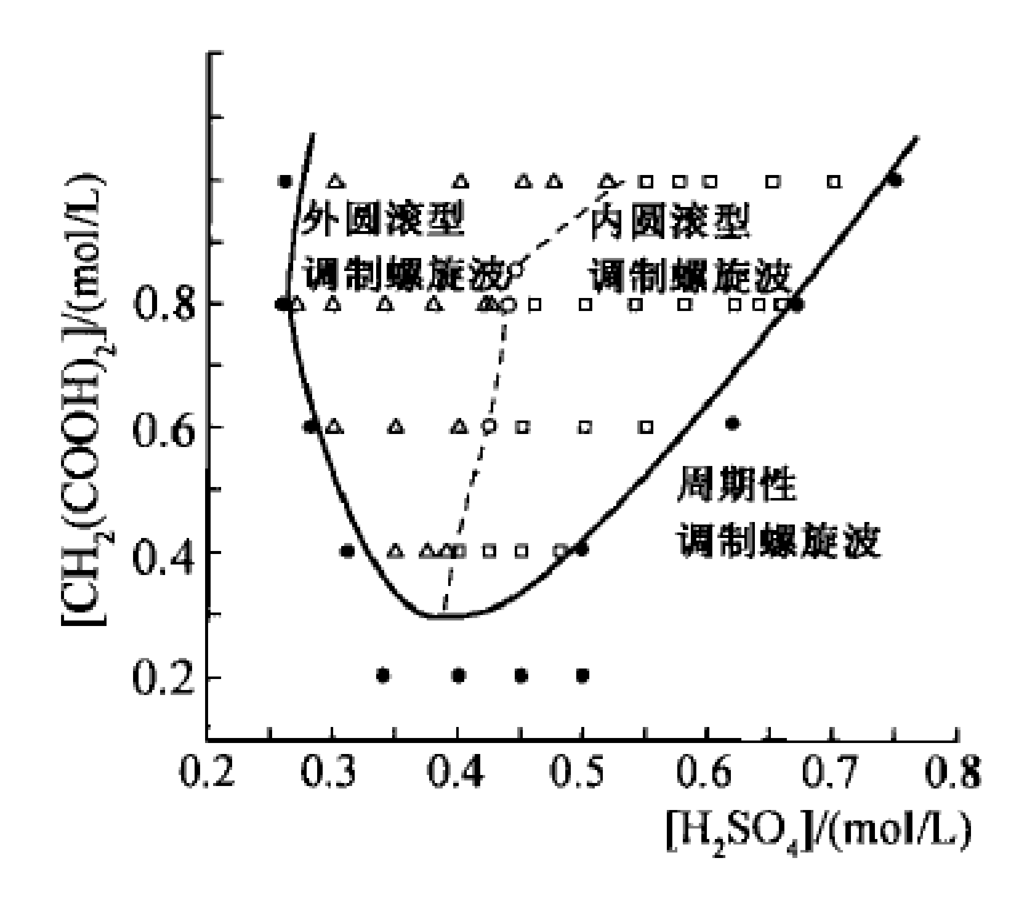


图 11.16　实验中得到的螺旋波端点运动轨迹的相图

的半径 r_1 可以由测量圆滚线花瓣的平均半径近似得到，而圆滚半径 r_2 由式 $r_2=D/2-r_1$ 导出，这里 D 是圆滚线的外直径. 从图 11.17(a)看到以 r_2/r_1 的平方对控制参量$[H_2SO_4]$作图，在相变点附近两者的关系是一条直线，因而有

$$r_2/r_1 \propto ([H_2SO_4]-[H_2SO_4]_c)^{1/2},$$

符合超临界霍普夫分岔的规律. 当控制参量移到离内、外圆滚线边界不远处时，这种关系不复存在.

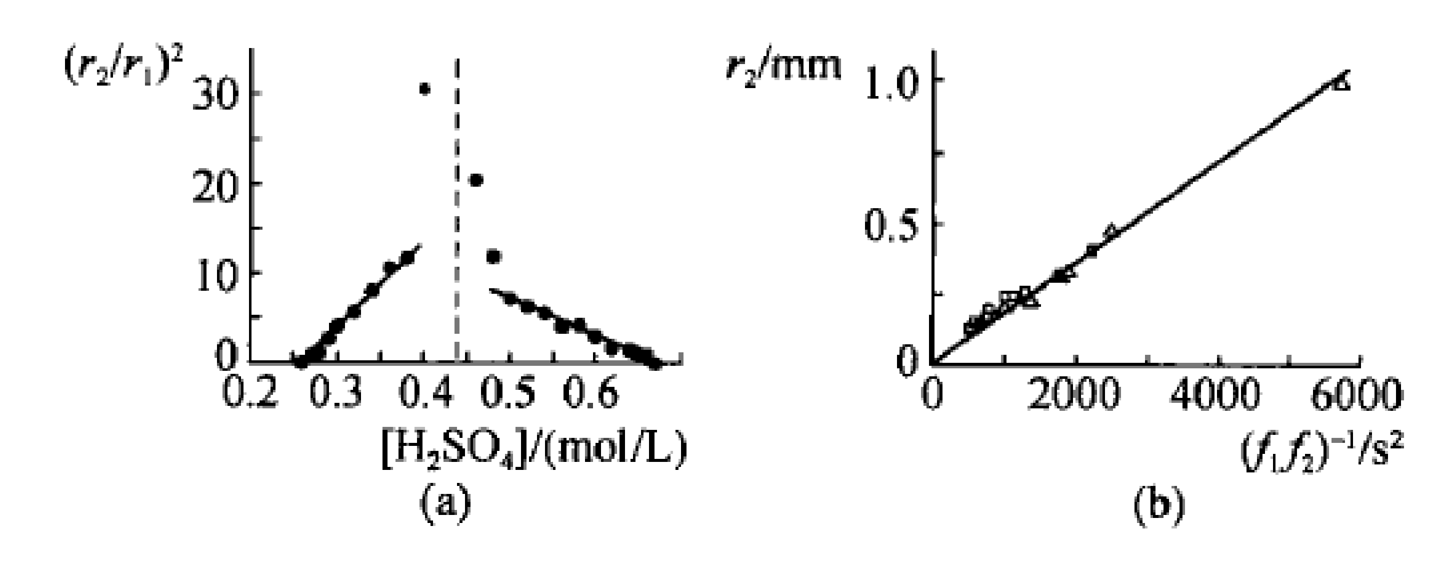


图 11.17　实验中得到的相变点附近的指数规律

巴克利(Barkley)在分析正则方程(11.4.3)时预测，当系统接近内、外圆滚线边界时，圆滚半径 r_2 应该以 $|\omega_1^2-\omega_2^2|^{-1}$ 的形式发散. 这里 ω_1 是螺旋波的初级频率，ω_2 是调制频率. 如果用圆滚线轨迹描写调制螺旋波，初级圆的自旋频率 $f_1=\omega_1$，初级圆沿圆滚圆旋转的运动频率 $f_2=|\omega_1-\omega_2|$. 因此巴克利推导的关系在实验中对应为

$$r_2 \propto (\omega_1^2-\omega_2^2)^{-1}=(f_1f_2)^{-1}\left(1+\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^{-1}.$$

在内外圆滚线的边界附近 $\omega_1 \approx \omega_2$，因而上式变为 $r_2 \propto (f_1 f_2)^{-1}$. 在实验中，$f_1$ 可以通过测量远离螺旋波端点的一个区域中系统随时间振荡的平均振荡频率近似获得，f_2 可以通过关系 $f_1/f_2 = n$ 近似地导出，这里 n 是圆滚线斑图的花瓣数. 图 11.17(b)给出圆滚半径 r_2 随参数$(f_1 f_2)^{-1}$的变化，它证明 $r_2 \propto (\omega_1^2 - \omega_2^2)^{-1}$. 实验观测与正则方程所做出的理论预测有很好的吻合.

在某些控制参量条件下，当调制螺旋波端点的圆滚线轨迹足够大时，调制螺旋波会失稳并产生化学湍流现象. 与对流失稳现象不同，这类失稳起源于螺旋波中心的一个小的区域. 当失稳发生时，螺旋波的端点附近会产生出一对点缺陷来，新产生的点缺陷自组织形成新的螺旋波，而它们的端点又产生出一对新的点缺陷. 随着时间的增加，系统中的点缺陷数目以指数形式增加以至饱和. 图 11.18 是作者于 1995 年在实验中观察到的这类失稳的发展与化学湍流态产生的过程. 由于缺乏系统的实验观测，这类螺旋波的失稳机制在近四年的时间内没有找到一个满意的答案，最有希望的理论解释是多普勒效应引起的螺旋波失稳. 这个理论是 20 世纪 90 年代中期由巴尔(Bär)提出的[85]，作者最近的系统实验观测初步证实了巴尔的理论[86]. 下面简单介绍巴尔的理论.

上一章论证了可激发系统中的螺旋波动力学行为服从色散关系，即螺旋波的波速与螺旋波周期的关系为色散关系. 对于一个具体的可激发系统，系统的螺旋波周期存在着一个最小值. 当螺旋波周期小于此最小值时，系统不再支持螺旋波，见图 10.4. 周期螺旋波的周期由色散关系与本构关系同时决定. 一般来讲，这两个关系所决定的周期螺旋波是稳定的. 也就是说，螺旋波的周期 τ_0 大于色散关系中的最小周期 τ_c. 在一些特殊情况下 τ_0 会很接近于 τ_c. 这时如果变化系统的控制参量，使系统从周期螺旋波变为调制螺旋波，随着调制螺旋波端点轨迹的圆滚半径的增长，多普勒效应逐渐明显. 在螺旋波端点运动方向前面的行波被压缩，螺旋波的周期在这些区域内变短；在螺旋波端点运动方向后面的行波被伸长，螺旋波周期在这些区域内变长. 因而在行波被压缩的区域内螺旋波的局部周期 τ_0 会降低到临界周期 τ_c 以下，这时这些局部区域内的螺旋波会变得不稳定，产生出点缺陷来. 根据可激发系统行波的程函关系(10.3.4)，螺旋波的波速随螺旋波的波锋曲率单调减少，多普勒效应在螺旋波端点附近的区域内最为明显，因而螺旋波会在端点附近处破裂. 图 11.19(a)给出螺旋波在端点附近破裂的一个数值模拟实验结果. 模拟所采用的是费兹胡-纳古莫模型(11.3.1). 图 11.19(b)是模拟的螺旋旋波失稳的分岔图. 这里控制变量为 ε. 图中虚线表示螺旋波周期的最小值 τ_c 随控制参量 ε 的变化. 当螺旋波周期 $\tau_0 < \tau_c$ 时，螺旋波失稳. 周期螺旋波的周期 τ_0 是一个确定值，我们看到它总是大于临界周期 τ_c.

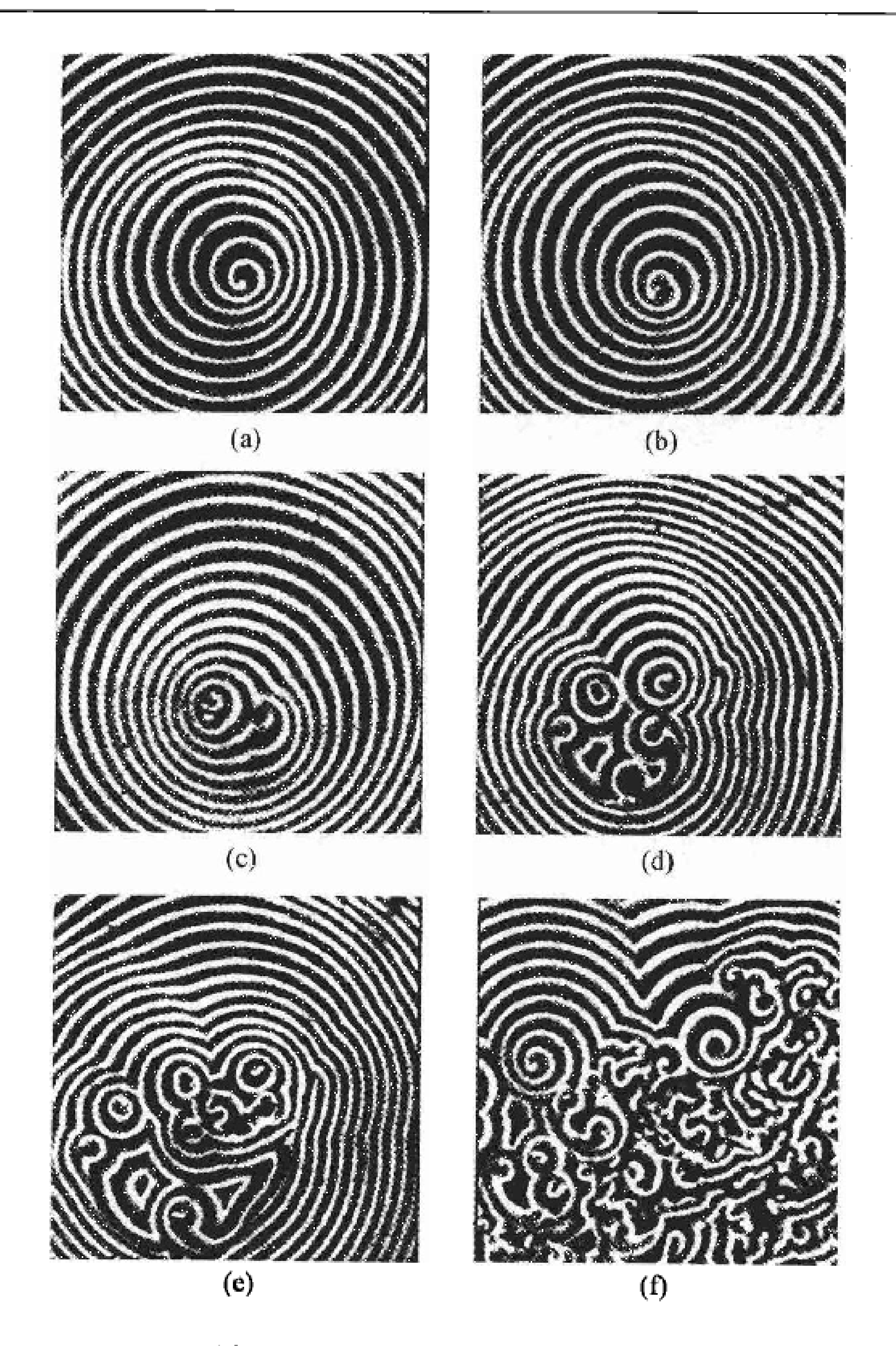


图 11.18　实验中观察到的多普勒失稳

当控制参量 ε 增加并超过霍普夫分岔的临界值($\varepsilon=0.06$)时,周期螺旋波变为调制螺旋波.这时由于前面讨论过的多普勒效应,系统在不同区域的螺旋波的周期不再是一个固定值而是一个波带.图 11.19(b)中用×表示的点标出了波带的最大值与最小值.当控制参量继续增加时,多普勒效应变得越来越明显.当控制参量增加到另一个临界值($\varepsilon=0.06$)时,波带的最小值与 τ_c 相交,系统跃迁至化学湍流态.图11.19(b)代表的失稳与上面的定性分析符合.

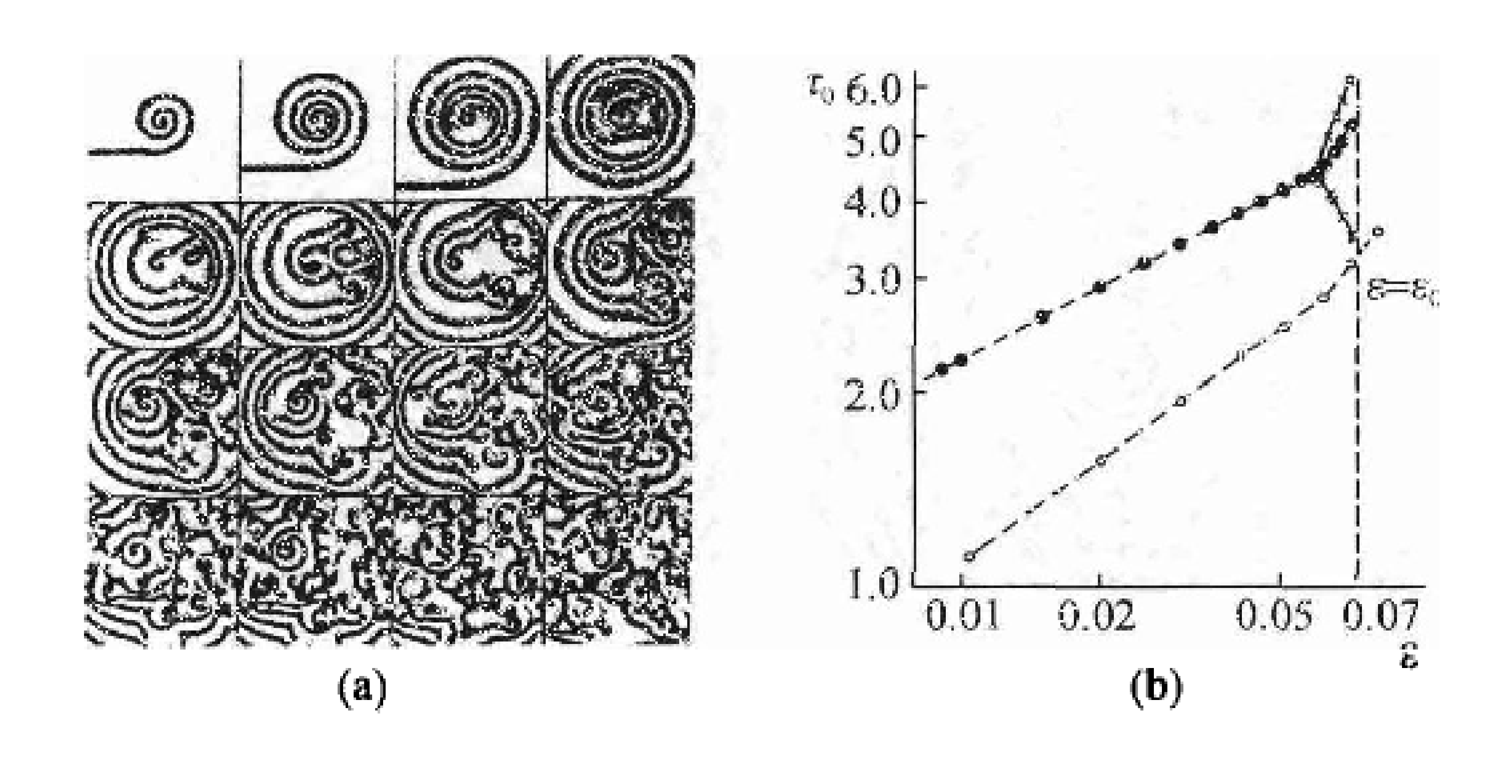


图 11.19 模拟中得到的多普勒失稳分岔图

需要指出的是,虽然由螺旋波中心引起的化学湍流态有上面所述的一个好的理论解释,这个漂亮的理论是否反映真实的物理世界还需要更加系统的实验结果去证实.除以上讨论给出的解释以外,这个湍流态的出现还有另外一些猜测.例如有人指出反应扩散实验系统中的三维性质也可能使螺旋波失稳.最近的实验似乎表明系统的失稳是由于多普勒效应与三维效应共同引起的.到底哪一个起主导作用现在还不明确.作者希望在近期内能获得足够的实验数据将此问题彻底解决.

第十二章　双稳系统中的斑图形成

非线性系统的一个重要特征是它的多重稳定性.对于一组固定的控制参量,一个非线性系统可能存在着多个不同的定态,每一个定态都是局部稳定的.在相空间中每一个定态都是一个吸引子,当系统落在这个吸引子附近的一个区域时,它会被吸引到定态的位置上.从一个定态向另一个定态跃迁需要对系统加一个一定强度的扰动.当跃迁完成以后,系统在没有扰动的情况下会永久地停留在第二个态上.

在一个空间外延型系统,如反应扩散系统中,非线性系统的多重稳定性质变得更加复杂.在这种情况下,对于一组固定的控制参量,系统不仅存在多个不同的稳定的空间均匀定态,还可能存在不同的稳定的空间非均匀斑图态.这些斑图态有可能是有规律的,如图灵斑图或螺旋波,也可能是时空混沌态.例如,皮尔孙(Pearson)在 20 世纪 80 年代末利用格瑞-斯考特模型表明,在不同的双稳体系中,有可能出现类似于图灵斑图的孤岛结构[87].这些斑图态不能通过改变控制参量从空间均匀定态达到,而只能通过给系统以特殊的扰动获得.到目前为止,非线性科学的发展还没有找到处理这类多态问题的一个普适性的有效办法.第八章介绍的线性稳定性分析只适用于在相空间中一个稳定均匀态解附近的一个小的区域,它不考虑各稳定均匀态解之间由扩散引起的耦合效应.可激发系统中行波与螺旋波的自组织考虑了系统的全局性质,但也没有涉及不同稳定均匀态之间的空间耦合作用.在 20 世纪 90 年代中期麦龙(Meron)等人,在总结反应扩散系统的实验结果的基础上,提出了化学波锋的非平衡伊辛-布洛赫(Ising-Bloch) 相变的概念,并很好地解释了一类由于双稳系统中化学波锋失稳引起的斑图形成[88—92].包括作者在内的实验工作者,在实验中证实了非平衡伊辛-布洛赫相变所预言的一些现象.本章着重介绍这个领域的理论与实验结果.

§ 12.1　双稳系统与化学波锋

研究双稳系统的一个有效的数学模型仍然是费兹胡-纳古莫模型.与式(11.3.1)不同,在本章中讨论的模型有如下形式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u - u^3 - v + \nabla^2 u, \tag{12.1.1a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon(u - a_1 v - a_0) + \delta\nabla^2 v. \tag{12.1.1b}$$

这里∇^2是拉普拉斯算符；控制参量 ε 是一个远小于 1 的量，它决定变量 u 与 v 的动力学时间尺度之比；δ 为变量 v 与 u 的扩散系数之比；a_1，a_0 决定系统局部动力学性质. 系统的空间均匀定态解由曲线 $v=u-u^3$ 与 $v=(u-a_0)/a_1$ 的交叉点决定. 在(u,v)相空间中，第一条曲线具有倒 N 的形式. 在一个给定区域的 v 值内，u 可能有三个值，u_-，u_0，u_+. 其中 u_0 总是不稳定的，u_-，u_+ 的稳定性取决于系统其他参数. 对于不同的 a_1 与 a_0 值，系统可能存在不同的动力学行为. 图 12.1 表示了系统三种典型的均匀定态形式. 图 12.1(a)的交叉点在 u_- 分支上，这种解的形式在 $\varepsilon \ll 1$ 时为可激发系统. 它可能产生螺旋波斑图态. 这类系统的动力学行为在上两章中已有了比较详细的讨论. 图 12.1(b)的交叉点在不稳定分支 u_0 上，这个定态解在 $\varepsilon \approx 1$ 时可能产生图灵分岔或霍普夫分岔. 图 12.1(c)是一个双稳系统. 它存在两个稳定均匀态解 u_-，u_+ 和一个不稳定均态解 u_0. 这个状态是本章要讨论的重点.

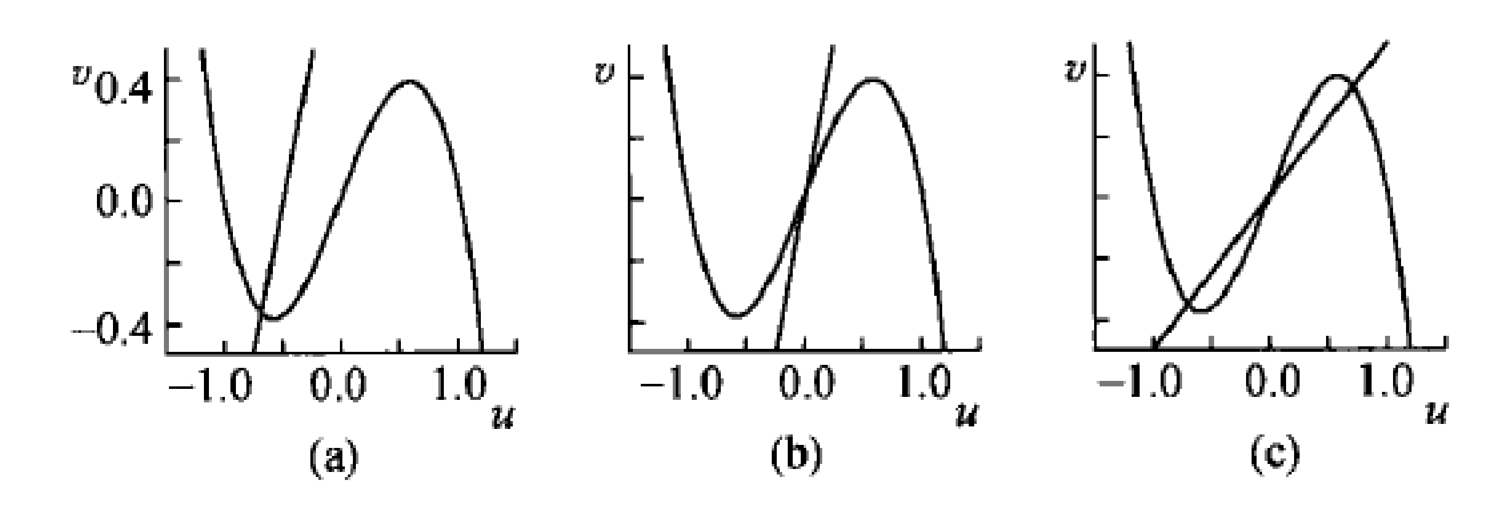


图 12.1 费兹胡-纳古莫(Fizhugh-Nagumo)模型的均匀定态形式

在一个双稳型的反应扩散系统中，如果系统的初始状态是均匀的，并处在双稳态中的任何一个，这个稳定均匀态在无外界干扰情况下将会永远存在下去；如果在初始时系统不是均匀的，而是在不同的空间区域具有不同的稳定态，则在不同稳定态的边界上系统会形成一个化学波锋面，波锋面的宽度由系统的反应速度与扩散速度共同决定. 在模型(12.1.1)中，波锋面的宽度应正比于$(\varepsilon/\delta)^{1/2}$. 当 ε/δ 很小时，系统所有的动力学性质，都将取决于化学波锋面上的动力学性质. 当波锋失稳时，系统有可能会产生一系列时空斑图态.

首先考察一下模型(12.1.1)中两个极端情况. 第一个极端情况是 $\varepsilon=0$. 此时方程(12.1.1)变为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=u-u^3-v+\nabla^2 u, \tag{12.1.2a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\delta\nabla^2 v. \tag{12.1.2b}$$

假定系统为无穷大，并且变量 v 有界，则方程(12.1.2b)中的解为 $v=$ 常数. 而方程(12.1.1a)中有一个变分形式

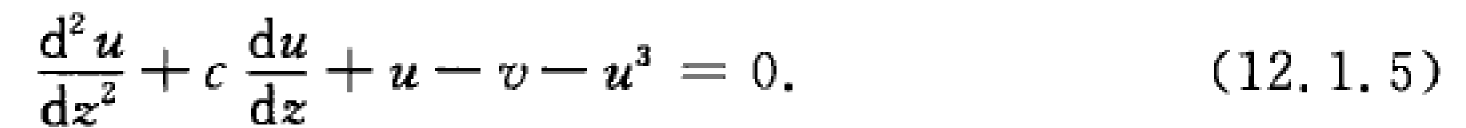
$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\delta F}{\delta u}, \tag{12.1.3}$$

其中 F 为李雅普诺夫泛函：

$$F=\int[E(u,v)+\frac{1}{2}(\nabla u)^2]\mathrm{d}x, \tag{12.1.4}$$

$$E(u,v)=-\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{4}+uv.$$

用平衡相变的语言，u 是序变量，v 是外场，F 是自由能. 当 v 值在 $-2(3\sqrt{3})<v<2(3\sqrt{3})$ 时，自由能密度 E 有如图 12.2 所示的双阱形式. 两个阱的最低点对应于解 $u_-(v)$ 与 $u_+(v)$，而 $u_\pm$ 是方程 $u^3-u+v=0$ 的两个解. 方程(12.1.2)规定的化学波锋解在一般情况下是运动的，它的运动速度与方向由系统的自由能密度分布所决定. 在一维系统中，设波锋的运动速度为 c，令 $z=x-ct$，方程(12.1.2)的第一式变为



$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2}+c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}+u-v-u^3=0. \tag{12.1.5}$$

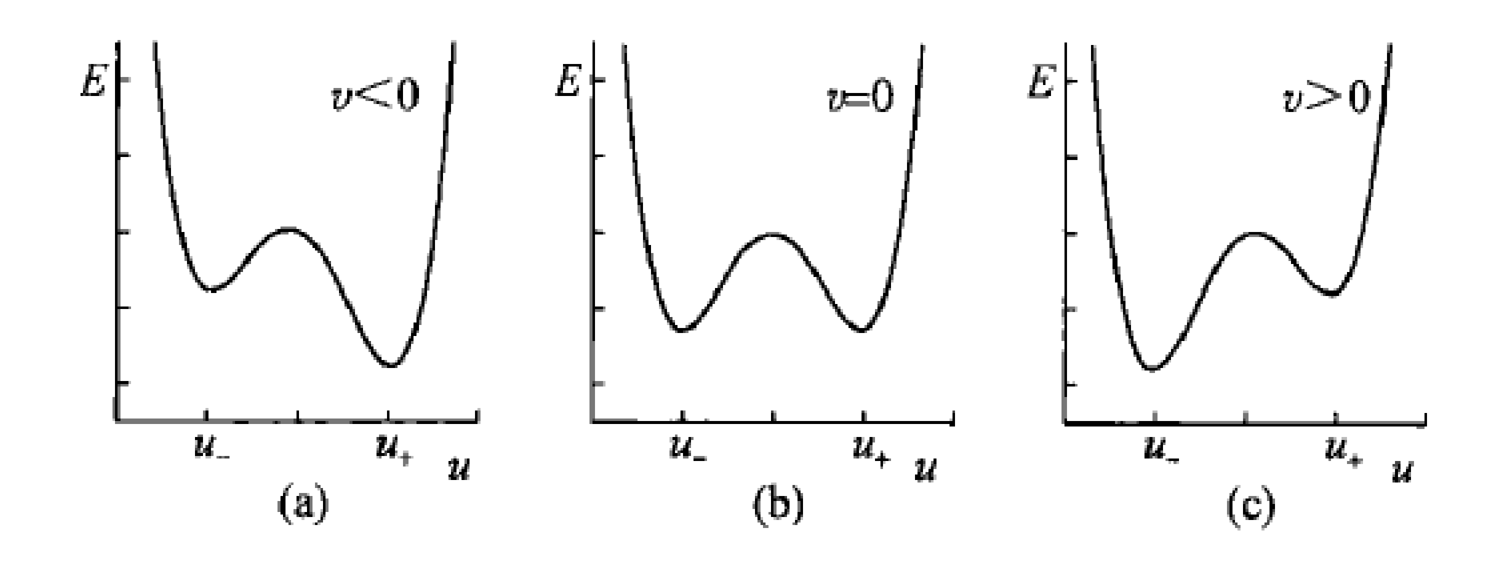


图 12.2　双稳系统自由能的分布形式

设系统的初始条件为

$$u=u_+(v),\quad z\to-\infty,$$
$$u=u_-(v),\quad z\to\infty. \tag{12.1.6}$$

将 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}z$ 乘以(12.1.5)式并对全空间积分，得

$$c=c(v)=\alpha(v)[E(u_-(v))-E(u_+(v))], \tag{12.1.7}$$

这里

$$\alpha(v)=\left(\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{d}u/\mathrm{d}z)^2\mathrm{d}z\right)^{-1}$$

是一个正数. 当 $v=0$ 时,$E(u_+)=E(u_-)$,双阱有同样的高度,因而 $c=0$,系统的波锋面是静止的. 当 $v<0$ 时,$E(u_+)<E(u_-)$,$c>0$,波锋面向正方向运动. 当 $v>0$ 时,$E(u_+)>E(u_-)$,$c<0$,波锋面向负方向移动. 在两种情况下,系统中具有更低自由能密度的部分总是在不断地扩张. 而自由能密度的分布状况由变量 v 唯一地决定.

第二种极端情况是 $\delta=0,\varepsilon\gg1$. 在 ε 很大的情况下,至少在初始情况下 v 变化的时间尺度要比 u 小许多. 将系统的时间尺度伸长 ε 倍,令: $\nu=\varepsilon^{-1}\ll1,\tau=t/\nu$. 方程(12.1.1)可以变为

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=\nu(u-u^3-v+\nabla^2u),\tag{12.1.8a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial\tau}=u-a_1v-a_0.\tag{12.1.8b}$$

在这个新的时间尺度下,令 $\nu=0$,则变量 u 的主导项不依赖于 τ. 这时方程(12.1.8b)存在如下形式的解析解

$$v(x,\tau)=v_0(x)\mathrm{e}^{-a_1\tau}+a_1^{-1}[u(x)-a_0][1-\mathrm{e}^{-a_1\tau}].\tag{12.1.9}$$

等式(12.1.9)表明系统在经过一个过渡时期 $\tau\sim O(\varepsilon^{-1})$ 以后,变量 v 将绝热地跟随变量 u 变化: $v=(u-a_0)/a_1$. 将此关系代入方程(12.1.1)的第一式,得变量 u 的渐近态方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=(1-a_1^{-1})u-u^3+a_0a_1^{-1}+\nabla^2u,\tag{12.1.10}$$

很显然方程(12.1.10)与(12.1.2)有同样的变分结构. 因而对系统(12.1.2)的分析结果同样适用于系统(12.1.10). 但是,与系统(12.1.2)不同的是,这时系统的波锋运动方向与速度和变量 v 无关,而是由系统的控制参量 a_0,a_1 唯一地决定. 对于一组固定的 a_0,a_1 值,系统的波锋态有一个唯一的运动速度与方向. 当 $a_0=0$ 时,波锋是静止的.

现在讨论当系统(12.1.1)在 $0<\varepsilon\ll1$ 时的情况. 首先注意到对于 $\varepsilon\ll1$,变量 v 在 u 变化的空间尺度上可以近似地被看成是不变的. 因此,在波锋面很窄的一个区域内,可以近似地认为式(12.1.2)所描写的动力学行为在此时仍然有效. 即波锋的运动速度与方向由变量 v 在波锋面上的值 v_f 决定,$c=c(v_f)$. 现在想象一个一维系统,初始时系统在全空间处在(u_-,v_-)的稳定态上,这里 $v_-<0$. 在系统的左端做一个扰动使得这个区域中变量 u 由 u_- 增加到 u_+. 根据上节

对(12.1.2)式系统的讨论，由于 $v_- < 0$，在扰动下产生的波锋将向正方向运动．再假设系统的初始状态是在 (u_+, v_+) 上．在系统的右端做一个扰动使得这个区域的 u 值由 u_+ 下降到 u_-，由于系统内 $v_+ > 0$，在扰动下产生的波锋会向负方向移动．在这两种情况下，当波锋运动到 $x=0$ 的位置时，会看到这样的情况：在远离波锋的区域里系统在 $(u_\pm, v_\pm)$ 上，即 $x \to \mp\infty$，$u=u_\pm$，$v=v_\pm$．两种波锋态都由稳定态 $(u_\pm, v_\pm)$ 连结．所不同的是它们沿相反的方向运动．可以证明波锋的这两种运动形式都可能是稳定的．这种波锋运动的多态性反映了系统的非变分性结构．另外，上面提到的当 $\varepsilon \gg 1$ 时，由方程(12.1.10)规定的波锋态解与变量 v 无关．实际上这个解可以延续到 $\varepsilon \ll 1$ 的情况，只是这时这个解可能是不稳定的．

§12.2　非平衡伊辛-布洛赫相变

上节的讨论描绘出这样一幅图画，当 $\varepsilon \gg 1$ 时，对于一组控制参量，系统的波锋形状、运动速度与方向都是唯一的；当 $\varepsilon \ll 1$ 时，系统可能存在三个不同的波锋态，其中两个是稳定的，一个是不稳定的．每个波锋态都有自己的形状、运动方向与速度．可以想象当 ε 取某一个值时，系统(12.1.1)的波锋态解将由一个分岔为三个，这就是非平衡伊辛-布洛赫相变．其中单一波锋态对应于伊辛波锋，多重波锋态对应于布洛赫波锋．这样的命名是固莱(Coullet)等人将此类非平衡系统类比于平衡相变中的铁磁系统作出的[93]．在铁磁系统中，布洛赫波锋代表这样一类边界，当系统跃过边界时，变量 u 与 v 之间的相位角平滑地旋转 180°．而对于伊辛波锋来说，u 与 v 之间的相位角在边界以外一直保持常数，在边界上忽然变换 180°．

在定性地分析了伊辛-布洛赫相变的意义后，下一步是对数学模型(12.1.1)作定量分析．为了简单起见，以下在一维空间中讨论(12.1.1)的动力学行为．并假设其边界条件为：当 $x \to -\infty$ 时 $u=u_+$，当 $x \to \infty$ 时 $u=u_-$，$\mu=\varepsilon/\delta \ll 1$．首先将自变量做如下变换：$z=\sqrt{\mu}x$，$\tau=\varepsilon t$，并引入平移坐标系：$\xi=z-c\tau$，偏微分方程(12.1.1)变为常微分特征方程

$$\mu \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2} + c\delta\mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} + u - u^3 - v = 0, \tag{12.2.1a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\xi^2} + c \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} + u - a_1 v - a_0 = 0. \tag{12.2.1b}$$

方程(12.2.1)的波锋解可以被分解成两个区域．远离波锋的区域构成外区，系

统在这些区域内随自变量变化很小；波锋附近的区域构成内区，在此区域内变量 u 随 ξ 的变化远大于变量 v 随 ξ 的变化.

首先考虑方程(12.2.1)在外区的解. 这时方程(12.2.1a)的微分部分可以被忽略. 令 $\mu=0$，得

$$u-u^3-v=0. \tag{12.2.2}$$

此方程有两个稳定解 $u=u_\pm(v)$ 与一个不稳定解 $u=u_0$. 将方程(12.2.2)的两个稳定解代入方程(12.2.1b)，并令 u 值在原点为 0，得到关于变量 v 的方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\xi^2}+c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+u_\pm(v)-a_1 v-a_0=0, \tag{12.2.3}$$

$$u(\xi<0)=u_+(v), \quad u(\xi>0)=u(v).$$

为了简单起见，再假设 a_1 的值足够大，以至于 $|v|\ll 1$. 在这种情况下 $u_\pm$ 的解析解可以用微扰方法得到. 将 v 看成是微扰量，令

$$u=u_0+u_1 v+u_2 v^2+\cdots,$$

代入式(12.2.2)，按 v 的幂级数将方程分开，得

$$\text{第 0 阶：}u_0-u_0^3=0,$$

$$\text{第 1 阶：}u_1-1-3u_0^2 u_1=0,$$

$$\cdots.$$

在一级近似下，得线性关系式 $u_\pm(v)=\pm 1-v/2$，$u_0=v_{\mathrm{f}}$. 将此关系代入方程(12.2.3)得到关于两个外区边界层问题的方程：

$$\xi<0:\quad \begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\xi^2}+c\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}-q^2 v+q^2 v_+=0,\\ v(0)=v_{\mathrm{f}}, \quad v(-\infty)=v_+.\end{cases} \tag{12.2.4a}$$

$$\xi>0:\quad \begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\xi^2}+c\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}-q^2 v+q^2 v_-=0,\\ v(0)=v_{\mathrm{f}}, \quad v(-\infty)=v_-.\end{cases} \tag{12.2.4b}$$

这里，v_{f} 是变量 v 在波锋上的值，

$$v_\pm=\frac{\pm 1-a_0}{a_1+1/2}, \quad q^2=a_1+1/2. \tag{12.2.5}$$

线性方程(12.2.4)很容易解出：

$$v(\xi)=\begin{cases}(v_{\mathrm{f}}-v_+)\mathrm{e}^{\sigma_1\xi}+v_+, & \xi>0;\\ (v_{\mathrm{f}}-v_-)\mathrm{e}^{\sigma_2\xi}+v_-, & \xi<0.\end{cases} \tag{12.2.6}$$

其中

$$\sigma_{1,2}=-c/2\pm\sqrt{c^2/4+q^2}. \tag{12.2.7}$$

两个外区的解在波锋处应该可以平滑地连接. 这要求解(12.2.6)对 ξ 的导数在

$\xi=0$ 处相等. 利用这个限制条件,能够得到波锋速度 c 与波锋上变量 v 的值 v_f 的关系:

$$v_f=-\frac{c}{2q^2(c^2/4+q^2)^{1/2}}-\frac{a_0}{q^2}. \tag{12.2.8}$$

再考虑方程(12.2.1)内区的解. 在内区中,变量 u 在空间尺度 $O(\mu^{1/2})$ 上变化,而变量 v 仍在 $O(1)$ 尺度上变化. 将移动空间坐标系作延展,令 $\chi=\xi/\mu^{1/2}$,代入方程(12.2.1),得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\chi^2}+\eta c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\chi}+u-u^3-v=0, \tag{12.2.9a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\chi^2}+\sqrt{\mu}c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\chi}+\mu(u-a_1v-a_0)=0. \tag{12.2.9b}$$

这里 $\eta^2=\varepsilon\delta$. 令 $\mu=0$,并认为变量 v 在全空间有界,从方程(12.2.9b)可以得到解 $v=v_f=$常数. 代入方程(12.2.9a)得关于波速 c 的非线性特征方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\chi^2}+\eta c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\chi}+u-u^3-v_f=0,\quad u(\mp\infty)=u_\pm(v_f). \tag{12.2.10}$$

方程(12.2.10)与(12.1.2)具有相似的结构. 因而可以定义一个势函数

$$V=-\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{4}+uv_f,$$

从而得到

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\chi^2}+\eta c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\chi}-\frac{\partial V}{\partial u}=0. \tag{12.2.11}$$

如图 12.2.1 所示,这个方程相当于质量为 1 的粒子在势场 $-V$ 与摩擦系数 ηc 的作用下的运动方程. 寻找该特征方程满足边界条件的解,相当于寻找一个摩擦系数值 ηc 使粒子以零初始速度从 $u=u_-$ 的位置出发,沿 $-V(u)$ 规定的路径到达 $u=u_+$ 处并正好在那里停止. 特征值的唯一性可以从如下基本考虑看出:如果摩擦系数过大,粒子将没有能量到达 u_+ 点;而摩擦系数过小,粒子到 u_+ 点后会保留一定动能,因而不会停留在 u_+ 点上. 这个问题可以转化为在二维相空间中求解异宿轨道问题.

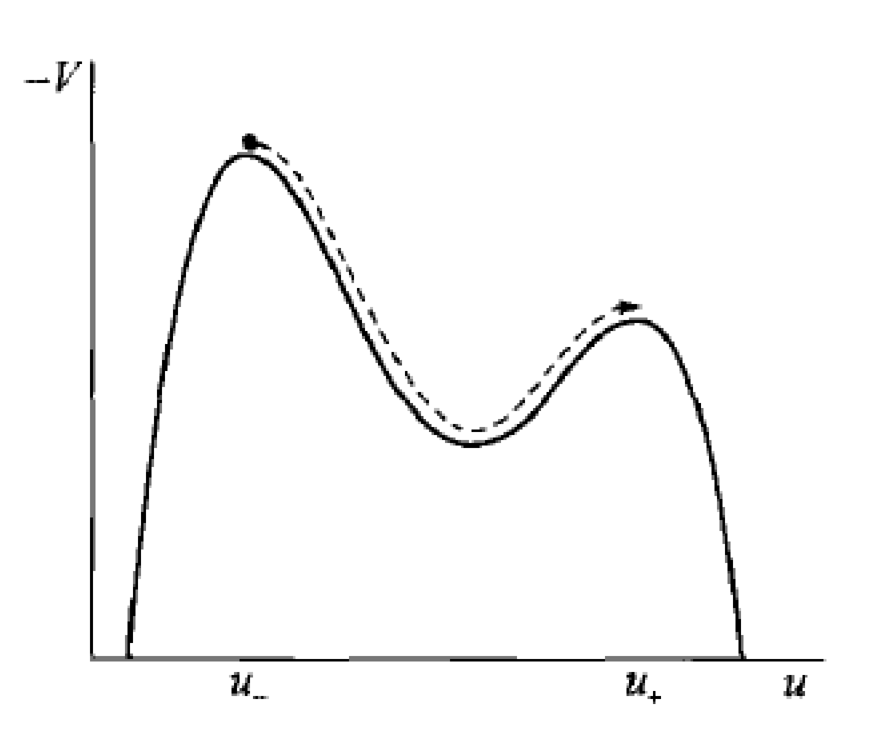


图 12.3　异宿轨道的势函数图解

考虑非线性特征方程

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + f(u) = 0, \tag{12.2.12a}$$

$$f(u) = -(u-u_-)(u-u_0)(u-u_+), \tag{12.2.12b}$$

$$u(\mp\infty) = u_\pm. \tag{12.2.12c}$$

其中 $u_+ > u_0 > u_-$. 令 $u=x$, $du/dt=y$, 得常微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = y, \tag{12.2.13a}$$

$$\frac{dy}{dt} = -f(x) - cy. \tag{12.2.13b}$$

该方程有三个定态解：$(x=u_-, y=0)$, $(x=u_0, y=0)$ 与 $(x=u_+, y=0)$. 利用线性稳定性分析容易确定这三个不动点的类别分别为：鞍点，结点(或焦点)，鞍点. 显然方程(12.2.12)的波前解对应于连接方程(12.2.13)的两个鞍点的一条异宿轨道，见图 12.4. 在 §5.3 的讨论中我们知道，这条异宿轨道当控制参量 c 取一特定值时才可能存在. 能够求出方程(12.2.13)鞍-鞍点异宿轨道的显式精确解的例子并不多，但对应于方程(12.2.12a)的问题，显式精确解是存在的. 令

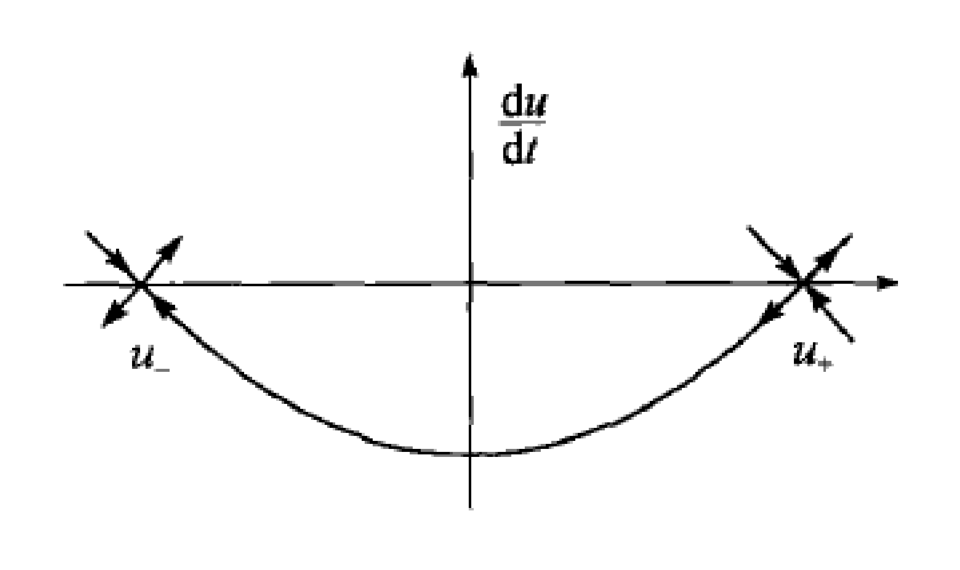


图 12.4 异宿轨道

$$y = K(x-u_+)(x-u_-), \tag{12.2.14}$$

其中 K 是待定常数. 上式两边对时间求导数，得

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= Ky[(x-u_+)+(x-u_-)] \\ &= K^2(x-u_+)(x-u_-)(2x-u_--u_+).\end{aligned}$$

代入方程(12.2.12b)，得

$$\begin{aligned}K^2(x-u_+)(x-u_-)(2x-u_--u_+) + cK(x-u_+)(x-u_-) \\ = (x-u_+)(x-u_0)(x-u_-),\end{aligned}$$

或

$$K^2(2x-u_--u_+) + cK = x - u_0.$$

比较系数，得

$$2K^2 = 1, \qquad -K^2(u_-+u_+) + cK = -u_0.$$

从而

$$K=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad c=\frac{1}{\sqrt{2}}(u_{-}-2u_0+u_{+}).$$

对式(12.2.14)积分，得方程(12.2.12)的解：

$$u=\frac{u_{+}+u_{-}\ \mathrm{e}^{K(u_{+}-u_{-})t}}{1+\mathrm{e}^{K(u_{+}-u_{-})t}}.$$

这类解非线性特征方程的方法还可以推广到更一般的方程形式. 考虑下列一类非线性特征方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+pu(1-u^{\alpha})(u^{\alpha}+q)=0,$$

$$u(-\infty)=0,\quad u(+\infty)=1.$$

其中 p,α 为正常数，q 是实数. 令 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t=Ku(1-u^{\alpha})$，其中 K 是一待定常数. 于是

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}=K^2[1-(1+\alpha)u^{\alpha}]u(1-u^{\alpha}).$$

代入方程并比较系数，得

$$K^2+cK=-pq,\qquad K^2(1+\alpha)=p.$$

解得

$$K=\sqrt{\frac{p}{1+\alpha}},\quad -c=\sqrt{\frac{p}{1+\alpha}}[1+q(1+\alpha)].$$

对方程 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t=Ku(1-u^{\alpha})$ 积分，得解

$$u(t)=\frac{\mathrm{e}^{Kt}}{(1+\mathrm{e}^{\alpha Kt})^{1/\alpha}}.$$

将上面的方法应用到解特征方程(12.2.11)，得如下波锋速度 c 与变量 v 在波锋上的值 v_{f} 的关系

$$\eta c=\frac{1}{\sqrt{2}}(u_{+}-2u_0+u_{-})=\frac{-3}{2}v_{\mathrm{f}}.\tag{12.2.15}$$

将式(12.2.8)与(12.2.15)结合得到波锋速度 c 随控制参量 η,a_1 与 a_0 变化的隐式关系：

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\eta c=\frac{c}{2q^2\sqrt{c^2/4+q^2}}+\frac{a_0}{q^2}.\tag{12.2.16}$$

变换到初始自变量 x,t，得

$$c=\frac{3c}{\sqrt{2}q^2\sqrt{c^2+4\eta^2q^2}}+c_{\infty}.\tag{12.2.17}$$

这里 $c_{\infty}=3a_0/(\sqrt{2}q^2)$.

当 $a_0=0$ 时，系统存在奇对称 $(u_+,v_+)=-(u_-,v_-)$. 这时 $c_\infty=0$. 方程(12.2.17)有静止波锋解 $c=0$. 对于所有的控制参量来说这个静止波锋解总是存在. 但是当控制参量低于临界值

$$\eta<\eta_c=\frac{3}{2\sqrt{2}q^3}$$

时，另外两个解 $c=\pm 2q\sqrt{\eta_c^2-\eta^2}$ 出现，它们代表一对向相反方向运动的波锋，图12.5(a)显示了这种叉形(pitchfork)分岔. 这种波锋解的结构在分岔点附近类似于平衡系统中的伊辛-布洛赫间隔相变，这就是固莱等人将此相变称为非平衡伊辛-布洛赫相变的原因. 这里伊辛-布洛赫波锋分别指静止与向相反方向运动的波锋.

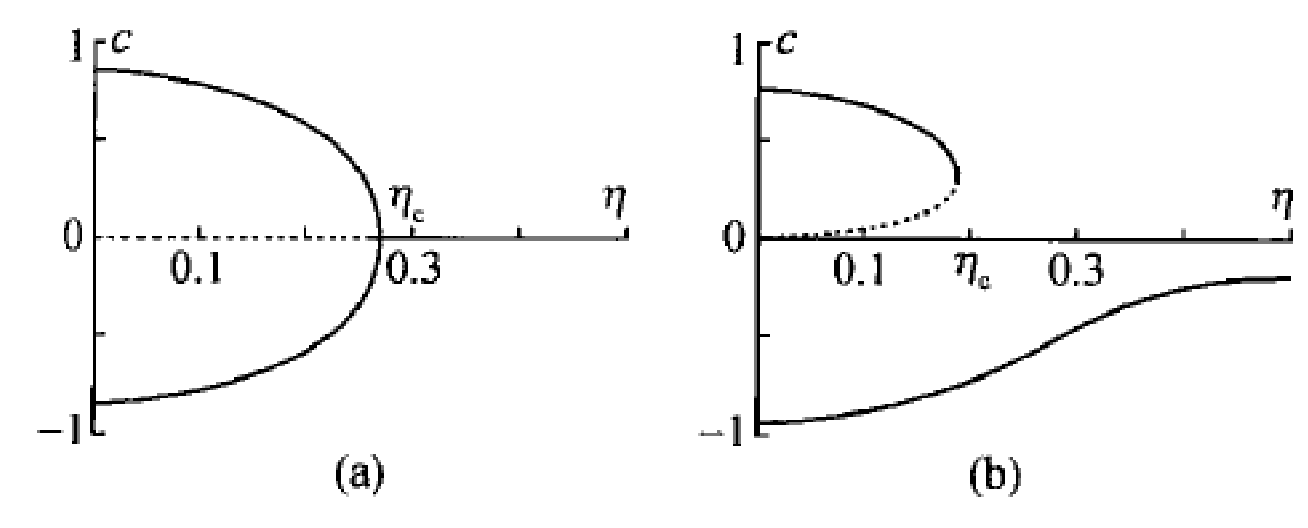


图 12.5 非平衡伊辛-布洛赫相变的分岔图

当 $a_0\neq 0$ 时，$c_\infty\neq 0$，(12.2.17)式没有解析解. 此时波速 c 与控制参量 η 的关系可用数值解得到. 图 12.5(b)表示了这种情况下的一个典型分岔图. 在这种情况下当 $\eta=\eta_c$ 时，系统出现鞍-节点分岔而不是叉形分岔. 临界点的位置比 $a_0=0$ 时靠后，在相变之前($\eta>\eta_c$)伊辛波锋也不再是静止的. 但是这时仍将两个向相反运动的波锋称为布洛赫波锋，将 $\eta>\eta_c$ 时的单一波锋称为伊辛波锋.

在参量空间(ε,δ)上，可以根据系统的行为将它分为伊辛波锋区与布洛赫波锋区. 其边界为：$\delta=\delta_F(\varepsilon)=\eta_c^2/\varepsilon$. 当 $a_0=0$ 时，$\delta_F=9/(8q^6\varepsilon)$；当$a_0\neq 0$ 时，该边界线可以通过数值解求出. 图12.6(a)与(b)分别显示了 $a_0=0$ 与 $a_0\neq 0$ 情况下，非平衡伊辛-布洛赫相变的相图.

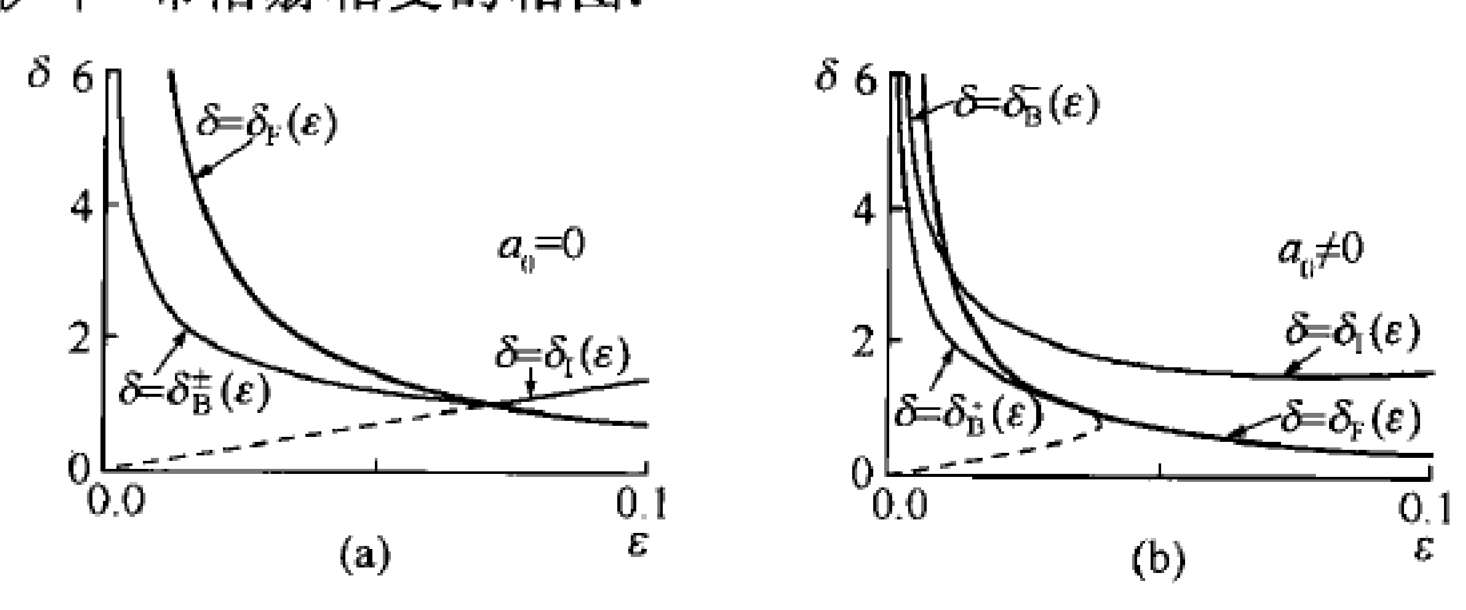


图 12.6 非平衡伊辛-布洛赫相变的相图

§12.3　横向失稳

横向失稳(transverse instability)是平面波锋在移动过程中由于横向微扰发生的失稳. 这个横向微扰通常是由于波锋速度的微小差别引起的. 在双稳态系统(12.1.1)中,当控制参量 δ 足够大时,系统的平面波锋态,不论是伊辛波锋还是布洛赫波锋都可能发生横向失稳. 横向失稳发生时,波锋上的一个横向微扰可能随时间增加,最终导致平面波的解体与新的斑图态的产生.

分析横向失稳的关键,是研究波锋运动速度随波锋曲率的变化. 在第十章中曾经分析了可激发系统中螺旋波锋的稳定性. 在可激发的 BZ 反应系统中,螺旋波的法向速度可以近似地表达为$c_r = c_0 - D\kappa$. 其中 D 为活化子的扩散系数. 由于 $D>0$,根据 §10.3 的讨论,它保证了 BZ 系统中的行波对于横向微扰的稳定性. 在双稳系统中,上面关系中的系数 D 不再简单地代表反应物的扩散系数,而是与系统的控制参量有关. 因此不能保证它的值永远为正值. 当 $D<0$ 时,波锋就不再是稳定的. 在下面两节中,可以看到这类横向失稳是系统从行波态到定态斑图,或从螺旋波态转变到时空混沌态的一个重要原因.

为了研究横向失稳,先将系统(12.1.1)的固定坐标系变换为随波锋移动的移动坐标系. 应用 §10.3 讨论的方法,方程(12.1.1)可以近似地表现成如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} + (c_r + \kappa)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + u - u^3 - v = 0, \tag{12.3.1a}$$

$$\delta\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}r^2} + (c_r + \delta\kappa)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + \varepsilon(u - a_1 v - a_0) = 0. \tag{12.3.1b}$$

其中 $\kappa(s,t)$是波锋线曲率,c_r 是波锋的法向速度. 将方程(12.3.1b)乘以系数 $\Delta=(c_r+\kappa)/(c_r+\delta\kappa)$,得

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} + (c_r + \kappa)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + u - u^3 - v = 0, \tag{12.3.2a}$$

$$\tilde{\delta}\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}r^2} + (c_r + \kappa)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + \tilde{\varepsilon}(u - a_1 v - a_0) = 0. \tag{12.3.2b}$$

其中 $\tilde{\varepsilon}=\varepsilon\Delta$,$\tilde{\delta}=\delta\Delta$. 这个方程与行波方程(12.1.1)有完全相同的结构,两者的关系为:$c_r+\kappa\to c$,$\tilde{\delta}\to\delta$,$\tilde{\varepsilon}\to\varepsilon$. 如果令波锋曲率$\kappa=0$,则将式(12.3.2)还原到行波方程(12.1.1). 因此,由上一节推导出的波锋分岔公式,可以在此全盘照搬过来用以描写波锋曲率对波锋速度的影响. 利用式(12.2.17)并将该式中的波速 c 换成$c_r+\kappa$,η 换成 $\eta\Delta$,则可得到波锋法向速度 c_r 与波锋曲率 κ 的隐式关系:

$$c_r + \kappa = \frac{3(c_r + \delta\kappa)}{\sqrt{2}q^2[(c_r + \delta\kappa)^2 + 4\eta^2 q^2]^{1/2}} + c_\infty. \tag{12.3.3}$$

方程(12.3.3)可以用来研究平面波对横向微扰的稳定性.为此假定波锋的曲率足够小,以至于波锋的法向速度与波锋曲率的曲线可以用线性关系近似表达:

$$c_r = c_0 - d\kappa + O(\kappa^2). \tag{12.3.4}$$

将上述关系去掉 κ 的高阶项后代入(12.3.3),得

$$c_0 + (1+d)\kappa = \frac{3[c_0 + (\delta - d)\kappa]}{\sqrt{2}q^2[(c_0 + (\delta - d)\kappa)^2 + 4\eta^2 q^2]^{1/2}} + c_\infty.$$

对上式右边第一项作 κ 的泰勒展开,

$$c_0 + (1+d)\kappa = \frac{3c_0}{\sqrt{2}q^2[c_0^2 + 4\eta^2 q^2]^{1/2}} + \frac{3(\delta - d)\kappa}{\sqrt{2}q^2[c_0^2 + 4\eta^2 q^2]^{1/2}} - \frac{3c_0^2(\delta - d)\kappa}{\sqrt{2}q^2(c_0^2 + 4\eta^2 q^2)^{3/2}} + c_\infty + O(\kappa^2). \tag{12.3.5}$$

从式(12.2.17)得

$$c_0 - c_\infty = \frac{3c_0}{\sqrt{2}q^2(c_0^2 + 4\eta^2 q^2)^{1/2}},$$

代入上式,得

$$1 - d = (\delta - d)\left[\frac{c_0 - c_\infty}{c_0} - \frac{2q^4(c_0 - c_\infty)^3}{9c_0}\right], \quad c \neq 0. \tag{12.3.6}$$

令

$$\alpha = 1 - \frac{c_0 - c_\infty}{c_0}\left[1 - \frac{2q^4}{9}(c_0 - c_\infty)^2\right], \tag{12.3.7}$$

得到 d 是解析表示式:

$$d = \frac{1}{\alpha} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\delta. \tag{12.3.8}$$

对于一个平面波锋态,条件 $d=0$ 在 ε-δ 参量空间确定了波锋横向失稳的相变边界线.

当 $a_0=0$ 时 $c_\infty=0$,伊辛与布洛赫波锋失稳线都有解析式.对于伊辛波锋,$c_0=0$.将 $c_0=0$ 代入式(12.3.5),得

$$1 - d = \frac{3(\delta - d)}{2\sqrt{2}q^3\eta}. \tag{12.3.9}$$

在临界点有 $d=0$,$2\sqrt{2}q^3\eta=3\delta$,因而伊辛失稳边界线为

$$\delta_I = \frac{8}{9}q^6\varepsilon. \tag{12.3.10}$$

对于布洛赫失稳线，将 $c_{\infty}=0$ 代入式(12.3.7)，得 $\alpha=2q^4c_0^2/9$. 代入式(12.3.9)并利用

$$c_0=\pm 2q\sqrt{\eta_c^2-\eta^2},\quad \eta_c^2=\frac{9}{8q^6},$$

得在 $a_0=0$ 时布洛赫波锋失稳线：

$$\delta_B=\frac{3}{2\sqrt{2}q^3\sqrt{\varepsilon}}. \tag{12.3.11}$$

图 12.6(a)的 $\delta_I(\varepsilon)$与 $\delta_B^{\pm}(\varepsilon)$的曲线表示了式(12.3.10)与式(12.3.11)在 ε-δ 参量空间的形式. 当 $a_0\neq 0$ 时，横向失稳的边界线可以用数值计算得出. 图 12.6(b)的 $\delta_I(\varepsilon)$与 $\delta_B^{\pm}(\varepsilon)$曲线分别表示了它们的形式. 注意在对称系统中，$\delta_B^{\pm}(\varepsilon)$是简并的. 在非对称系统中，布洛赫波锋横向失稳曲线不再是简并的，而 $\delta_I(\varepsilon)$与 $\delta_B^{-}(\varepsilon)$变成简并的.

§12.4 迷宫斑图

以上两节讨论的两种失稳机制，非平衡伊辛-布洛赫相变与横向失稳，提供了了解双稳系统中波锋态演化为各类斑图的重要线索. 在 ε-δ 参数空间中，可以根据非平衡伊辛-布洛赫相变边界将空间分成三个区域：远离边界线的伊辛波锋区，远离边界线的布洛赫波锋区，边界线附近的区域. 本节讨论第一种情况下系统斑图形成的可能性，下一节讨论后两种情况下系统的动力学行为.

深入伊辛波锋区时，系统只存在单一类的波锋态，因此它不可能支持孤立波或螺旋波，因为这些波要求波锋与波背向一个方向运动. 这种情况在伊辛波锋区是不允许的. 但是在一些特定条件下稳定的定态斑图，如迷宫斑图可能在伊辛波锋区发展起来. 迷宫斑图的形成需要两个必要条件：(1) 系统经历横向失稳；(2) 当两个波锋互相靠近时，它们之间会产生相互排斥作用. 这种排斥作用能够使波锋靠近的速度放慢以至最后停止，也就是说两个波锋不会因合并而湮没.

当系统深入伊辛波锋区并经历横向失稳时，波锋的形状开始随机游走. 指状斑图不断从波锋线上产生出来. 在指状斑图的指尖处，斑图分裂为两个指尖，所有这些行为都可以用方程(12.3.4)很好地加以解释. 当式(12.3.4)中的 d 小于零时，波锋的法向速度随波锋的曲率增加而单调变快，这样在大曲率波锋线的区域，波锋运动速度加大，形成指状斑图. 如果在指尖处存在微小的速度差，

这种差别将会越来越大，使指尖一分为二，图 12.7 显示了这类迷宫斑图在双稳系统(12.1.1)中形成的动力学过程．数值模拟实验中的控制参量为 $a_1=2.0$，$a_0=-0.1$，处于深入的伊辛波锋区，并存在横向失稳，见图 12.6(b)．初始时，系统有一条窄而直的 u_- 状态区，这个区与其他区域的 u_+ 状态形成波锋(图 12.7(a))．当在这条波锋线上加上一个横向微扰时，这些微扰被很快放大．在放大过程中随机性的条状斑图逐渐形成，见图 12.7(b)．在条形斑图的转折点上指状图纹不断生长出来(图 12.7(c))，并迅速增长，在指尖处指状图纹一分为二(图 12.7(d)，(e))，最后固定为如图 12.7(f)定态的迷宫斑图．

横向失稳的出现只是迷宫斑图形成的一个必要的条件．由图 12.7(f)可看出，在最后形成的斑图中所有的 u_- 区域(图中的亮区)都是相连结的．这说明在波锋运动过程中两个波锋不会相互碰撞，原因是当两个波锋靠近时它们之间会产生排斥作用．这种排斥作用使波锋在互相靠近到一定程度时停止．如果排斥作用不存在，或波锋相互靠近的运动速度过大，两个波锋将在碰撞后湮没，模拟中最终看到的是一个均匀态．

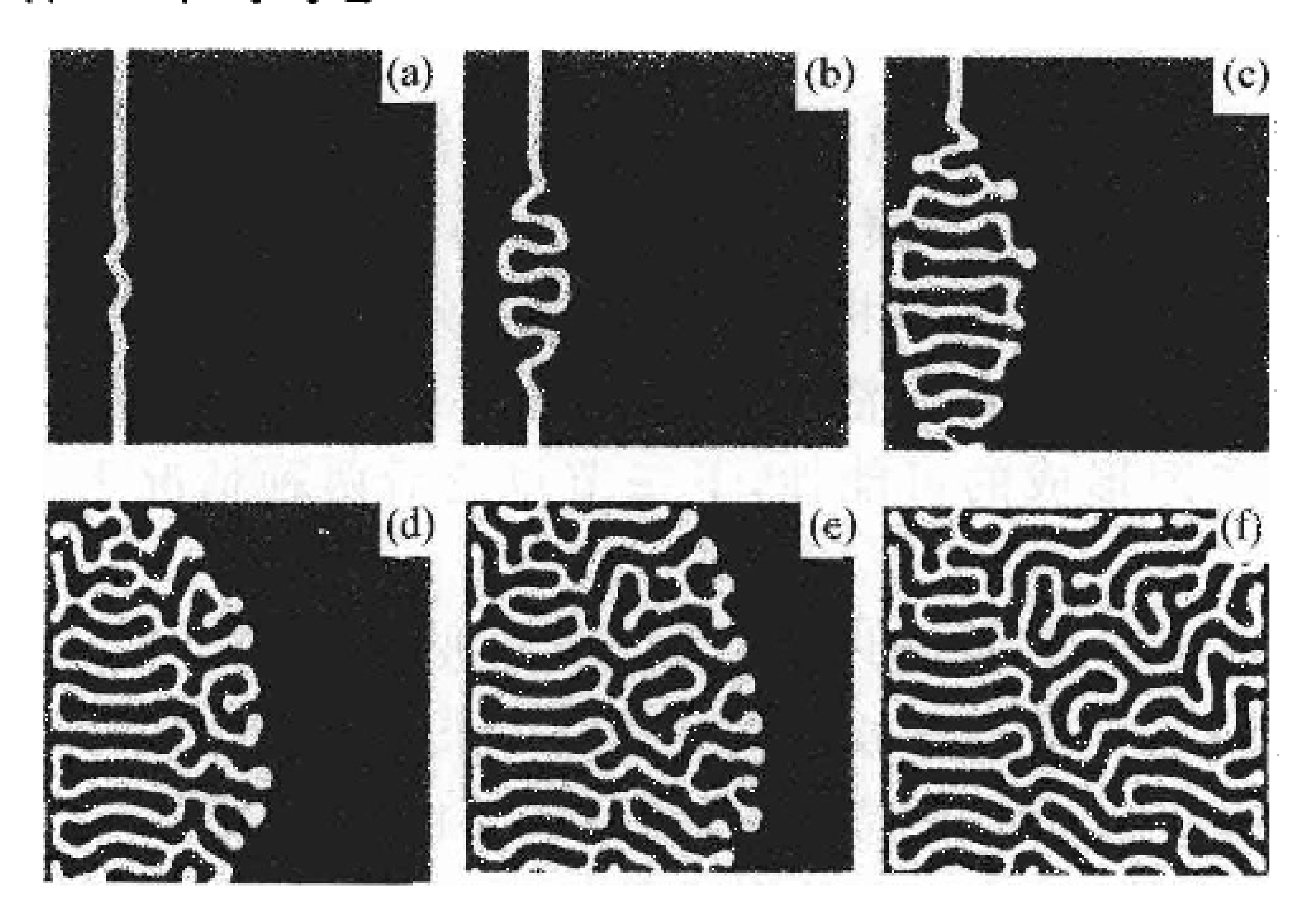


图 12.7　迷宫斑图形成过程

排斥作用产生的原因，是波锋上的变量 v 随着波锋之间的距离的缩短而产生变化．从第二节的分析中知道，行波的运动方向与速度取决于波锋上变量 v 的值 v_f．当 $v_f>0$ 时，波锋的运动使系统中 u_- 的状态增加；当 $v_f<0$ 时，波锋的运动使系统中 u_- 的状态减小；当 $v_f=0$ 时，波锋是静止不动的．图 12.8 显示当两波锋逐渐靠近时变量 u 与 v 之间的空间分布情况．当两个互相靠近的行波距离很远时，可以把它们看成是相互独立的．这时在波锋上有 $v_f>0$．当两个行波逐渐靠近时，由于 v 的扩散系数大于 u 的扩散系数($\delta>1$)，在两个波锋之间的变

量 v 由于扩散作用而逐渐减少，波锋速度 c 随之下降. 当 v_f 值减少到 $c(v_f)=0$ 时，系统变为稳定的斑图态.

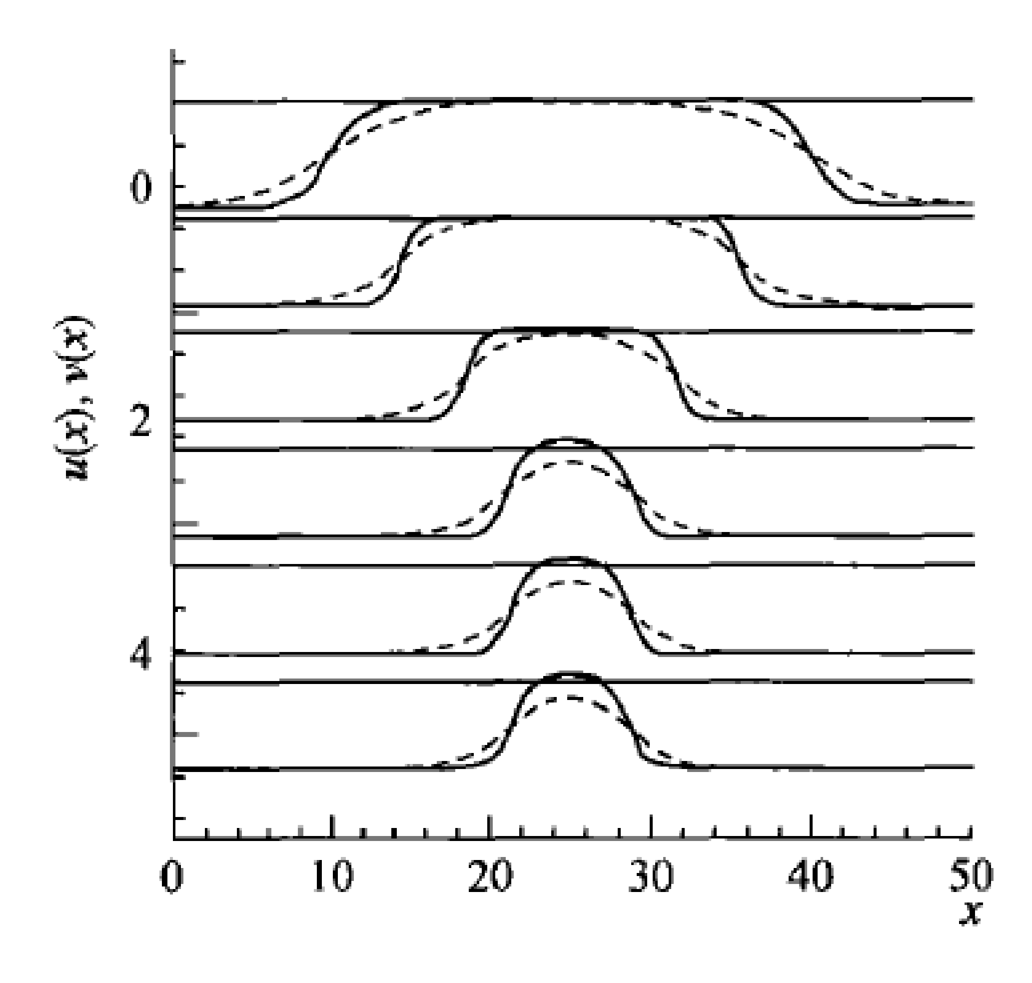


图 12.8　当两波锋逐渐靠近时系统变量的空间分布情况

迷宫斑图的波长可以通过如下分析得出. 由方程(12.1.1)知道，系统的稳定斑图态应该满足如下方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}+u-u^3-v=0, \tag{12.4.1a}$$

$$\delta\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}+\varepsilon(u-a_1 v-a_0)=0. \tag{12.4.1b}$$

以下着重讨论 $a_0<0$ 的情况. 这种情况意味着系统的伊辛波锋运动是向着 u_- 状态增大的方向进行的. 在方程(12.4.1)中要寻找类似于图 12.7 所示的稳定态解. 注意到两个稳定定态波锋将系统的空间分成三个区域：$z\leqslant z_l$, $z_l<z<z_r$ 与 $z\geqslant z_r$. 其中 z_l, z_r 分别为两个波锋的位置. 首先看远离波锋位置的外区. 做坐标变换 $z=\sqrt{\mu}x$, $\mu=\varepsilon/\delta\ll 1$，令 $\mu=0$，并取 a_1 足够大，以至于 $|v_l|\ll 1$, $u_\pm=\pm 1-v/2$, $u_0=v/2$(见第二节). 这样在一、三区域中方程(12.4.1b)可近似为

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2}-q^2 v+q^2 v_-=0, \tag{12.4.2}$$

其边界条件为

$$-\infty<z\leqslant z_l:\quad v(z\to-\infty)=v_-,\quad v(z_l)=v_l;$$
$$z_r\leqslant z<\infty:\quad v(z\to\infty)=v_-,\quad v(z_r)=v_r.$$

其中 $q^2=a_1+1/2$, $v_\pm=(\pm 1+a_0)/(a_1+1/2)$, v_l 与 v_r 的值待定. 第三个区域满足方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2} - q^2 v + q^2 v_+ = 0, \quad v(z_l) = v_l, \quad v(z_r) = v_r. \tag{12.4.3}$$

方程(12.4.2),(12.4.3)的解分别为

$$v(z) = (v_l - v_-)\mathrm{e}^{q(z-z_l)} + v_-, \quad z \leqslant z_l, \tag{12.4.4}$$

$$v(z) = (v_r - v_-)\mathrm{e}^{-q(z-z_l)} + v_-, \quad z \geqslant z_r, \tag{12.4.5}$$

$$\begin{aligned} v(z) = &\frac{1}{\mathrm{sh}(q\Lambda)}\{(v_r - v_+)\mathrm{sh}[q(z - z_l)] \\ &- (v_l - v_+)\mathrm{sh}[q(z - z_r)]\} + v_+, \quad z_l < z < z_r. \end{aligned} \tag{12.4.6}$$

其中 $\Lambda = z_r - z_l$,它对应于迷宫斑图的波长. 三个解在 z_l, z_r 处应有平滑连结,即它们的对 z 的导数分别在 z_l 与 z_r 处相等. 利用这个限制条件可以得到如下关系:

$$v_l = v_r,$$

$$\mathrm{ch}(q\Lambda) - \mathrm{csch}(q\Lambda) = \frac{v_r - v_-}{v_+ - v_-}. \tag{12.4.7}$$

方程(12.4.7)仍然有一个待定值 v_r. 这个待定值需要通过分析以 z_l, z_r 为中心的波锋内区得到. 回到方程(12.4.1),令 $\mu = 0$,得

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + u - u^3 - v_r = 0. \tag{12.4.8}$$

此方程对应于方程(12.1.5)中 $c = 0$ 的情形. 因此有 $v_r = 0$. 将此结果代入方程(12.4.7)解出 Λ:

$$\Lambda = -\frac{1}{q}\ln(-a_0). \tag{12.4.9}$$

还原到原坐标系中,迷宫斑图的波长可以近似地表示为

$$\lambda = 2\Lambda/\sqrt{\mu} = 2\Lambda(\delta/\varepsilon)^{1/2}. \tag{12.4.10}$$

此分析方法对 $a_0 > 0$ 的情况同样适用,其结果在式(12.4.9)中将 $-a_0$ 变为 a_0 即可.

由式(12.4.9)知迷宫斑图的波长随 $\mu^{-1} = \delta/\varepsilon$ 的减小而减小. 很显然如果波长减小到与波锋宽度相同的数量级 $\mu^{1/2}$,迷宫斑图就会因波锋相撞而解体. 因此系统存在一条迷宫斑图的相变线 $\mu_{st}^{-1} = \delta/\varepsilon$,在分界线以下迷宫斑图消失. 令人注意的是,如果用线性稳定性分析研究系统(12.1.1),可以得到类似的图灵分界线:

$$\mu_{tu}^{-1} = 2 - a_1 + 2(1 - a_1)^{1/2}, \tag{12.4.11}$$

$$\varepsilon > 1/a_1.$$

μ_{st}与μ_{tu}的值在一般情况下并不相等. 但两条分界线在 ϵ-δ 参量空间中是并行的,并且很相似. 从第八章的分析知道,图灵斑图是由系统的单一定均态解失稳引起的. 而在这里系统有两个定均态解且都是稳定的. 系统(12.1.1)中两类相变边界的相似性是偶然巧合,还是有某种内在联系,对此到目前为止还没有肯定的结论.

§12.5 螺旋波与振荡斑点

当控制参量远离非平衡伊辛-布洛赫相变边界并深入布洛赫波锋区时,两个稳定的布洛赫波锋会同时存在. 由于系统(12.1.1)存在 $x\to-x$ 对称,对于一个由(u_-,v_-)状态跃迁到(u_+,v_+)状态的波锋,它可能伴随着一个由(u_+,v_+)状态跃迁到(u_-,v_-)状态的波锋. 第二个波锋被称为第一个波锋的波背. 注意这里波锋、波背是一对布洛赫行波. 在一定初始条件下,这一对布洛赫波组成一个(u_+,v_+)状态的孤波.

现在具体地讨论一下 $a_0<0$ 的情形. 当波锋、波背相距很远时,它们的运动速度 c_f,c_b 分别由 $v_f=v_-,v_b=v_+$决定. 这里 c_f,c_b,v_f,v_b 分别是波锋、波背的速度与变量 v 在波锋、波背上的值. 当 $a_0<0$ 时,$|c_b(v_+)|>c_f(v_-)$,即波背的行进速度大于波锋的行进速度. 然而,当波背、波锋由于速度差而相互靠近时,波锋、波背之间的区域中的变量 v 由于扩散而外流,这使得 v_b 值下降,波背速度放慢. 当二者的距离窄到一定程度时,v_b 下降到$|c_b(v_+)|=c_f(v_-)$的位置. 这时波锋、波背之间距离不再继续缩小. 系统稳定在孤立行波上. 孤立行波的宽度可以应用上节讨论过的方法求出:

$$\lambda=x_f-x_b=\frac{c}{\epsilon q^2}\ln\left(\frac{v_+-v_f}{v_+-v_b}\right),\qquad(12.5.1)$$

而 v_b 可以通过式(12.1.7)与下面关系共同求出:

$$-c(v_b)=c(v_-)=c.\qquad(12.5.2)$$

如果在孤立行波上引入一个点缺陷,系统就会形成一对螺旋波,见第十章. 由图 12.6 可知,在远离非平衡伊辛-布洛赫相变边界的布洛赫区中,系统对横向微扰是稳定的. 所以在这个区域我们看到的是稳定的、双稳型的螺旋波斑图态.

当控制参量移向伊辛-布洛赫相变边界时,系统开始呈现复杂的动力学行为. 如振荡斑点、斑点分裂与复制和缺陷湍流态. 了解此类复杂动力学机制的关键,是波锋速度 c 与波锋曲率 κ 之间的非线性关系. 图 12.9 显示了由(12.3.3)式决定的三种典型的c-κ 曲线. 当系统深入伊辛区时,曲线是单值的,见图 12.9(a).

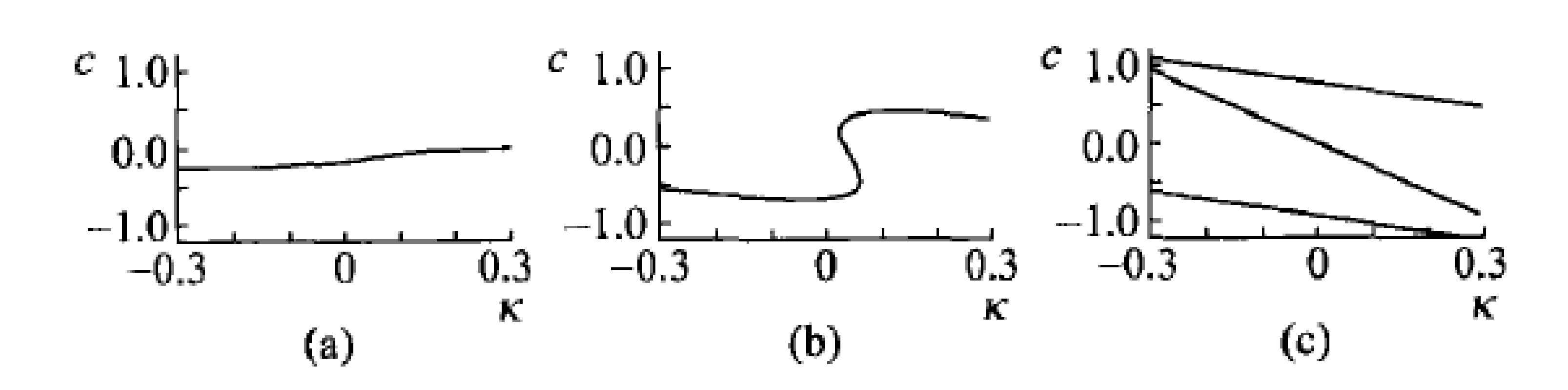


图 12.9 行波波速与曲率的关系

此时由于 c 对 κ 的导数是正值，系统会经历横向失稳，并在一定条件下产生迷宫斑图，见上节．当系统深入布洛赫区时曲线显出多重态．但在一个很大的曲率值范围内，多重态之间并不相连结，见图 12.9(c)．由于 c 对 κ 的导数都是负值．在这种情况下系统不会出现横向失稳．一般来说在这个区域系统表现的是稳定的螺旋波态．在非平衡伊辛-布洛赫相变点附近，c-κ 曲线出现 S 形的多重态，而且多重态之间是相联结的，见图 12.9(b)．

这种 S 形多重态的出现，使得当波锋曲率 κ 由波锋运动而变化时，可能会逐渐接近 S 形多重态的端点，并在端点处从多重态的一个分支，跳跃到另一个分支．这种跳跃将引起波锋运动速度与方向的剧烈变化，从而引发新的时空斑图态，如振荡斑点态的产生．如果这种跳跃是局部性的，它会导致缺陷的产生，引发斑点分裂为特征的缺陷湍流．

首先考虑在非平衡伊辛-布洛赫相变点附近，振荡斑点产生的可能性．假设在一个二维系统中系统的初始状态是一个由(u_-，v_-)状态组成的圆盘．在圆盘的区域外，系统处在(u_+，v_+)状态上．在远离非平衡伊辛-布洛赫相变边界的伊辛区内，波锋的速度与曲率关系是单一的，见图 12.9(a)．这时系统可能出现定态圆盘斑图．圆盘的半径为 $R=1/\kappa$，由 $c_r(\kappa_0)=0$ 决定．由于速度与曲率关系的斜率是正的，这个定态圆盘斑图对径向均匀的扩张或收缩扰动是稳定的．但对横向微扰是不稳定的．当系统从伊辛区接近相变边界时，速度曲率关系开始变为 S 形多重态，并且其斜率在 $c_r=0$ 时变为负值，见图 12.9(b)．这时对于径向均匀的扩张与收缩型扰动系统不再是稳定的，振荡型(或叫呼吸型)圆盘态出现．现在看一下振荡型圆盘态是怎样形成的．注意当圆盘扩张时系统是在 S 形曲线的上支(图 12.9(b))．随着圆盘的扩张波锋的半径增加，曲率减小．当波锋曲率减少到对应于 S 形曲线上支的顶点时，系统跳跃到曲线的下支，见图 12.9(b)．在曲线的下支 $c_r<0$，圆盘由扩张变为收缩，波锋曲率随之由减小变为增加．当波锋曲率增加到对应于 S 形曲线下支的顶点时，系统重新跃回到曲线的上支，此时圆盘停止收缩而开始扩张．这种圆盘收缩与扩散的交替运动构成系统的振荡斑点态．

对于径向非均匀的扩张、收缩运动，系统是不稳定的. 为了说明这一点，让我们看一下初始条件为一椭圆盘的斑图发展，见图 12.10(a). 当椭圆领域扩张时，椭圆形波锋面上比较平滑的部分首先达到 S 形曲线上支的尽头，因而在这些区域的波锋运动方向开始逆转. 两个波锋开始彼此相互靠近，碰撞，并湮没. 见图 12.10(b). 这个过程将初始的椭圆盘斑图一分为二，见图 12.10(c)，二分为四，见图 12.10(d)，……，系统的渐近态是无规律的、互不相连的(u_+，v_+)状态斑点的集合. 斑图近似于定态. 但斑点振荡运动的残迹，还是经常可以从每个斑点在它平衡位置附近的扩张与收缩运动中观察到. 由于斑点的径向均匀性在一般情况下是很难保证的，所以系统的斑点振荡运动除个别情况外(详见后)都会逐步发展到这种无序的斑点集合.

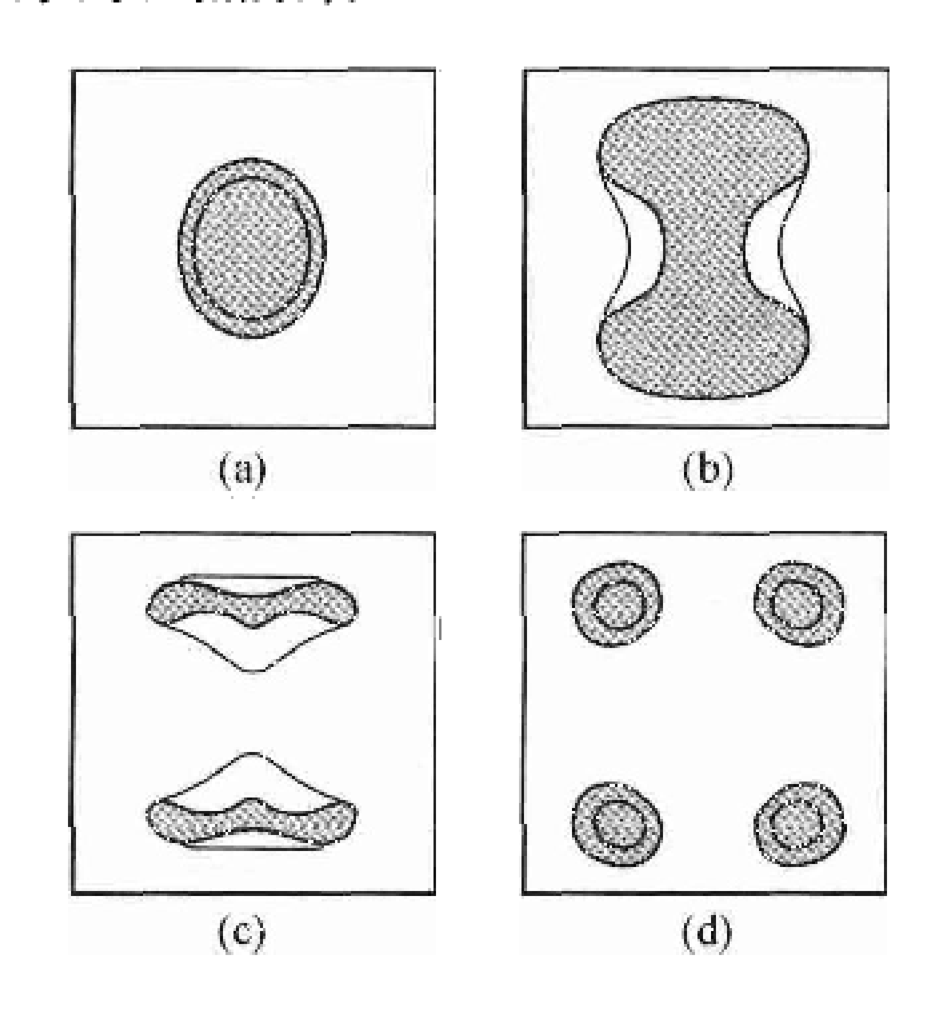


图 12.10　斑点态的分裂过程

当系统从布洛赫区接近非平衡伊辛-布洛赫相变边界时，系统的双稳型螺旋波可能失稳. 这时，点缺陷可能从螺旋波锋的分裂中产生出来. 每个点缺陷都自组织形成以它为中心的螺旋波，其结果是缺陷湍流. 当 δ 足够大时，横向失稳是缺陷湍流产生的主要动力. 当 δ 不够大时，点缺陷产生的原因是系统的平衡伊辛-布洛赫相变. 后者的情况近似于上面讨论的斑点分裂过程，但向相变点趋动的具体过程有所不同. 图 12.11 显示当 δ 很小时，系统中缺陷湍流态的发展过程. 当螺旋波不断向外扩张时，系统跳向布洛赫波锋的另一支，因而波锋运动方向逆转，根据上面讨论的过程，波锋破裂，点缺陷产生. 这个过程的重复出现使系统的产生出许多螺旋波中心. 从总体上看系统呈现缺陷湍流态.

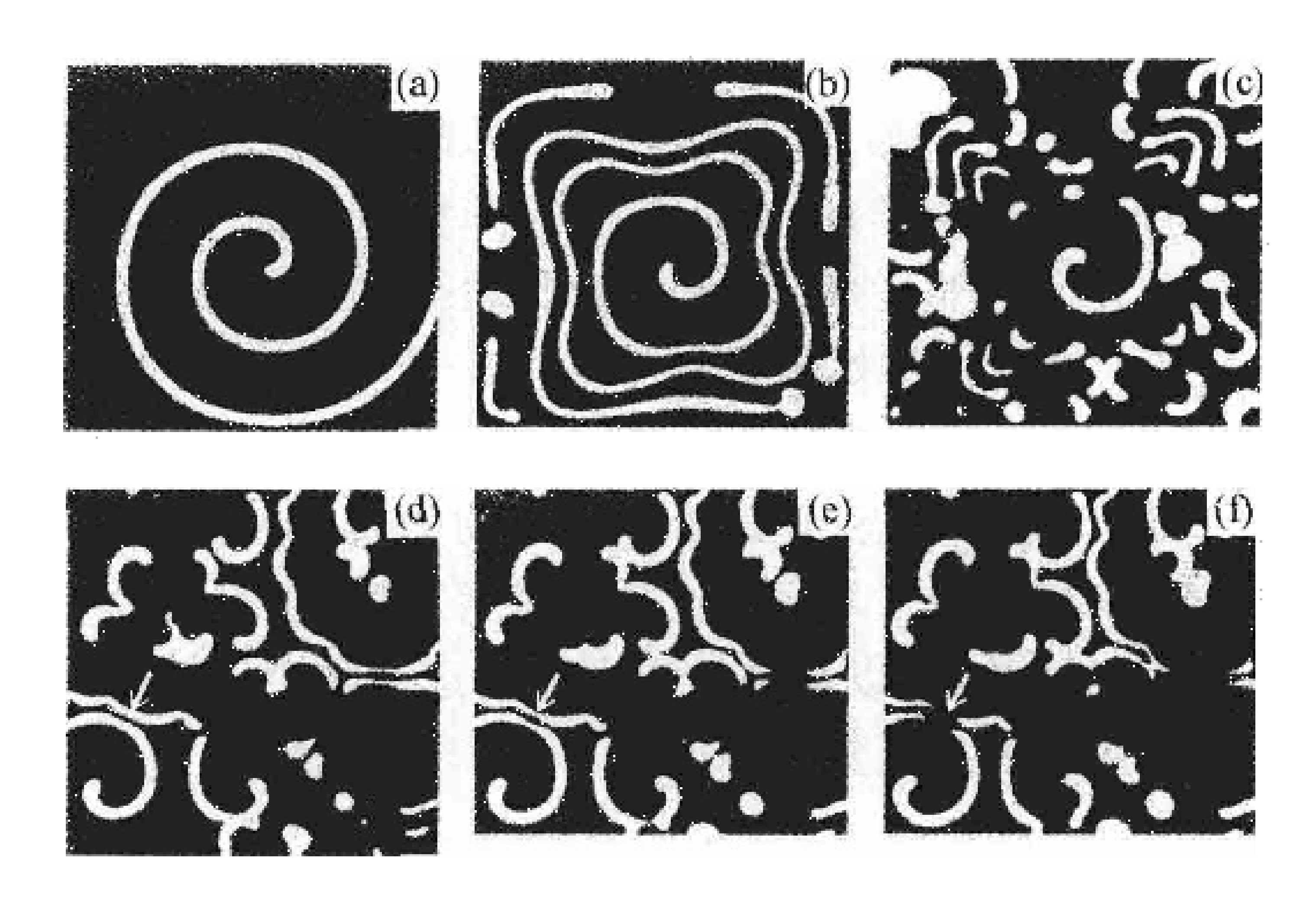


图 12.11 螺旋波的破裂过程

由以上的分析可以将双稳系统中斑图形成的过程作一个推广.双稳系统中斑图形成的一个重要原因,是系统伴随着一些内变量的变化经历非平衡伊辛-布洛赫相变.在以上的分析中,内变量为波锋的曲率.但内变量也可能是另外一些因素,例如外场的影响,系统的非均匀性,波锋到系统边界的距离等等.如果当系统的控制参量选在非平衡伊辛-布洛赫相变边界附近,而这些影响的效应又足够大,波锋速度与这些变量的关系就会出现如图 12.9 (b)所示的 S 形多重态.假设系统的这些内变量(如波锋到系统边界的距离)随着波锋的运动总是向 S 形曲线的转折点方向前进,系统就会自组织形成一些有序或无序、定态或动态的斑图.

图 12.12 表示费兹胡-纳古莫模型中波锋速度 c 随波锋到系统边界距离 d 的变化关系.系统的初始条件为由(u_- ,v_-)状态组成的圆盘.波速的正方向对应于圆盘缩小的方向.当系统处在伊辛区内并远离非平衡伊辛-布洛赫相变边界时,c-d 关系是单一的减函数,见图 12.12(a).这时系统有稳定的圆盘定态斑图.其波锋离系统边界的距离 $d=$ 常数.在相变边界附近,c 与 d 的关系变为 S 形曲线.当圆盘扩张时,系统在 S 形曲线的下分支.随着圆盘的扩张,波锋离系统边界的距离 d 减小.在曲线转折点处系统跳向 S 形曲线的另一分支.这时波锋转变运动方向,圆盘由扩张变为收缩,波锋离系统边界的距离也随之增大.这种运动在系统达到 S 形曲线的另一转折点时逆转.总的结果是系统自组织形成振荡斑图态.见图 12.12(b).在远离非平衡伊辛-布洛赫相变边界的布洛赫区,系统的波锋被锁定在布洛赫波锋的上分支上.在这种情况下 c 总是大于 0,波锋

运动使圆盘不断缩小，最后消失，所以对应的状态为均匀的(u_+，v_+)状态.

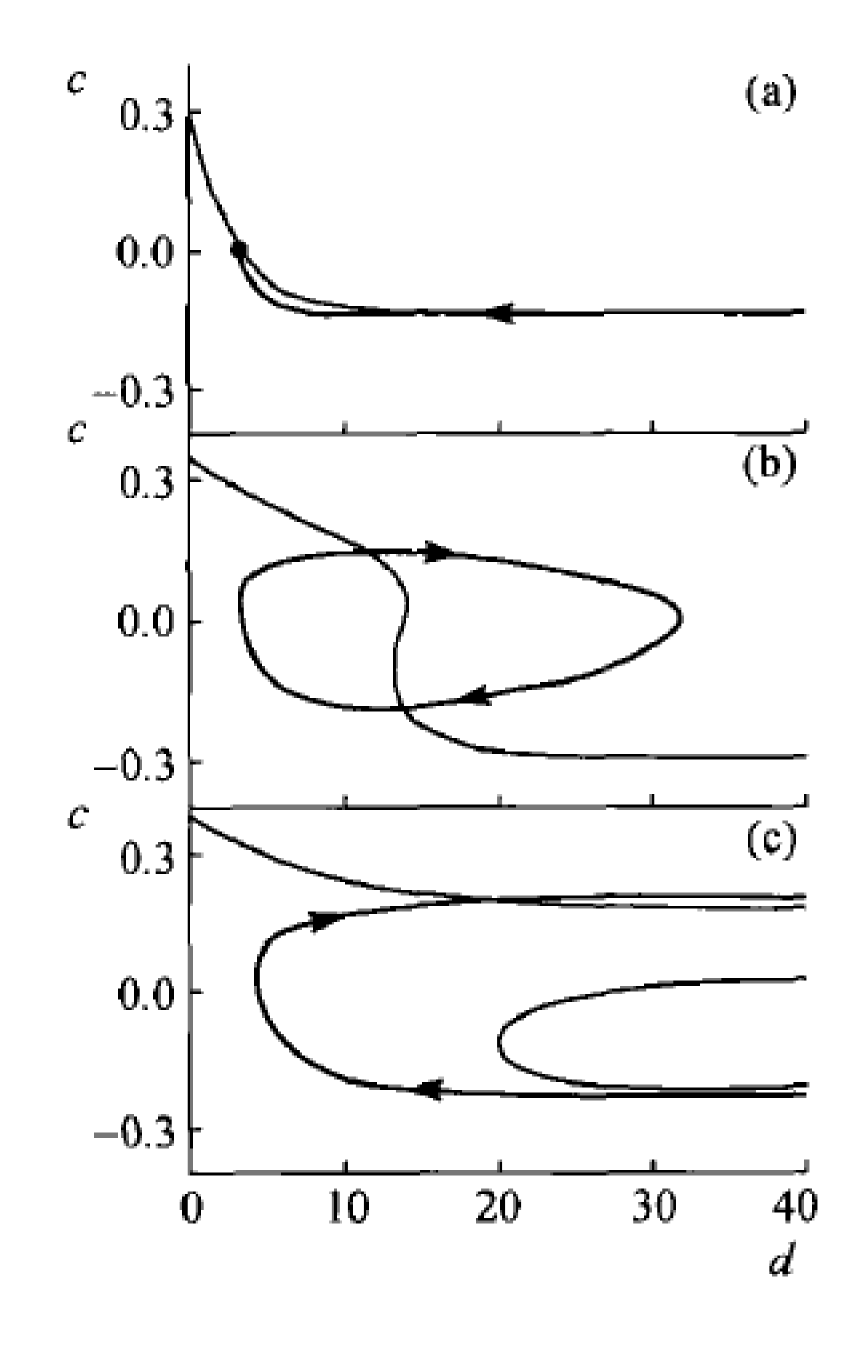


图 12.12 系统边界效应引起的振荡斑点

§12.6 双稳系统中斑图的实验观察

典型的双稳系统的斑图形成实验是在 FIS 反应系统中进行的[94,95]. 在全混釜反应器中，当 FIS 系统中的 $Fe(CN)_6^{-4}$ 的浓度足够小时，系统是双稳态. 实验证明这个双稳态的两个分支，即氧化分支与还原分支都是稳定的. 将此反应条件应用于开放型二维空间反应器，可以观察二维空间中双稳系统的斑图形成过程. 与CIMA 和BZ 反应实验不同，在此实验中，所有反应物都是从反应媒介(直径为 20 mm，厚度为 0.2 mm 的聚丙烯酰胺圆盘)的一面经扩散进入反应媒介的，反应物首先经化学泵打入一个全混釜反应器，充分混合后经扩散进入反应媒介. 实验系统的一个重要控制参量是反应物在全混釜中的平均停留时间，另一控制参量是$Fe(CN)_6^{-4}$ 的浓度，后者决定双稳态的稳定性. 系统的可测量变量是 $Fe(CN)_6^{-3}$ 的相对浓度. 它在光波长 420 nm 处有一个强的吸收率峰. 当系统处在还原态时 $Fe(CN)_6^{-4}$ 占多数，系统在 420 nm 是透明的；当系统处在氧化态时 $Fe(CN)_6^{-3}$ 占多数，系统在 420 nm 处是不透明的.

双稳系统的斑图形成决定于系统的初始条件. 如果系统的初始条件是均匀的,则不论它是空间均匀的氧化态,还是空间均匀的还原态,系统都是稳定的. 为了观察这个双稳系统从空间均匀态演变为化学斑图的过程,在初始时需要在系统中制造出一个化学锋面. 在实验中这个过程可以用强紫外光照射系统局部完成(反应系统对紫外光有光敏性),也可以让全混釜中的搅拌停止几秒钟. 对于后者,由于停止搅拌使得反应媒介的边界条件变得不均匀,从而引发化学波锋的形成. 如果系统不存在斑图形成的动力学机制,如非平衡伊辛-布洛赫相变或横向失稳,当化学锋产生以后,它会自发地向系统边界运动,随后消失在边界上. 在一些特定的反应条件下,初始时制造的化学波锋会经历横向失稳或非平衡伊辛-布洛赫相变;这时系统自组织形成各类斑图.

当 $Fe(CN)_6^{-4}$ 的入口浓度很低时,系统可能形成迷宫斑图. 图 12.13 是实验观察到的化学波锋经历横向失稳而形成迷宫斑图的过程. 这里黑色表示系统在氧化态上,白色表示系统在还原态上. 化学波锋的运动方向是由氧化态侵入还原态. 当化学波锋被制造出来后,波锋线上的扰动被很快地放大,1 小时后原扰动点(黑色斑图突出部分)形成几个指状斑图,这说明波锋速度随波锋曲率的增加而增加. 1.5 小时后指状图形在指尖处分裂,分裂后的图纹继续发展. 最终系统稳定在迷宫斑图上,以后斑图不再随时间变化. 迷宫斑图的稳定性可以通过对斑图做一个大的扰动来探测. 在系统的中心部分用强紫外光照射数秒钟,将使被照射区域内的斑图消失. 当扰动停止后的两小时之内,系统在扰动区又会自组织形成迷宫斑图,虽然新的斑图与扰动前的斑图并不一样,但它们有一样的特征尺度. 在斑图动力学意义上可以认为是等同的. 与图 12.7 的数值模拟比较证实,实验与理论定性吻合. 图 12.14 给出波锋彼此靠近时的一个实验观察. 当两个波锋互相靠近至大约 0.4 mm 时,化学波停止运动,在局部变为定态. 这证明当波锋相互靠近时波锋之间存在排斥作用. 从第四节的分析中知道,迷宫斑图形成的必要条件有三个:伊辛波锋、横向失稳、波锋之间的排斥作用,FIS 反应实验证明这个论断是正确的.

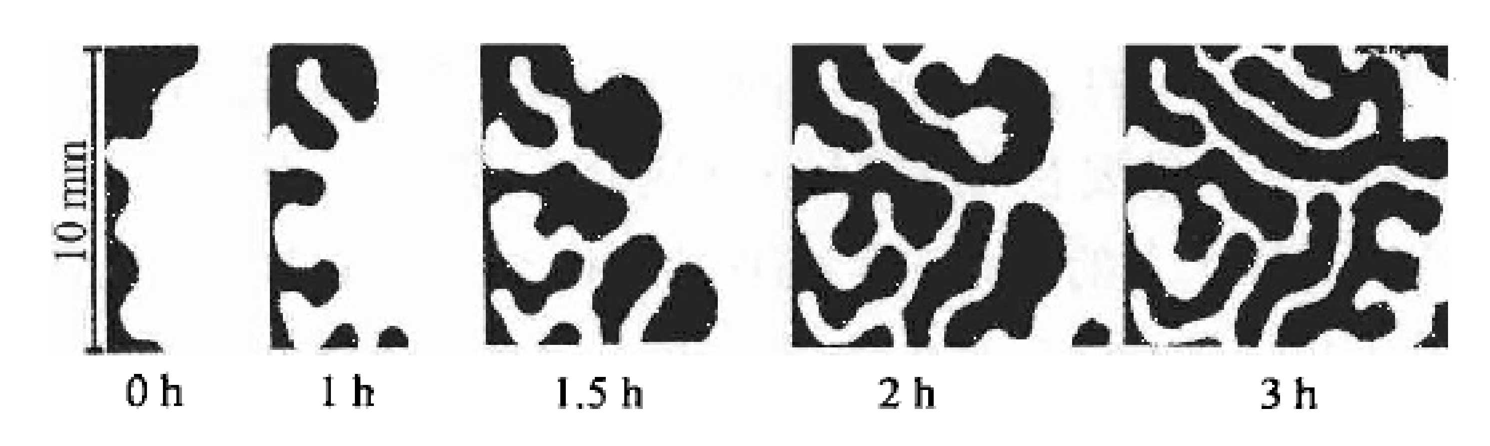


图 12.13 实验中观察到的迷宫斑图形成过程(h: 小时)

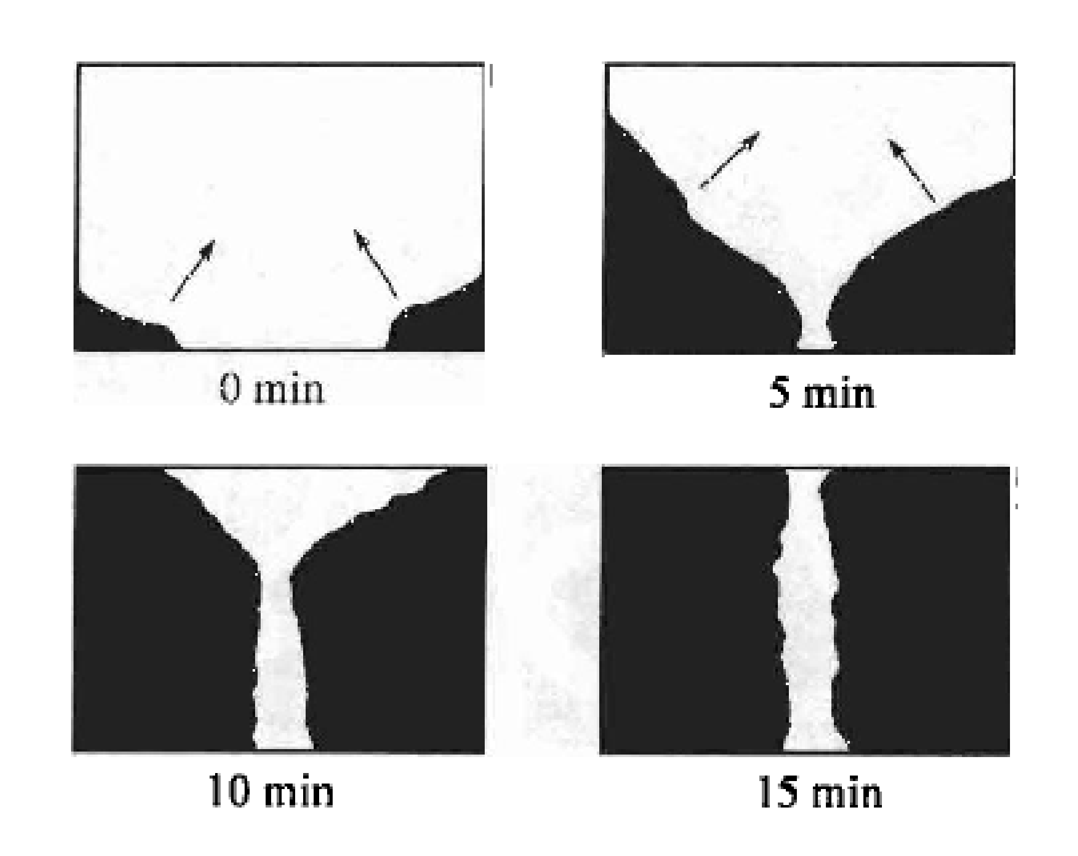


图 12.14　实验中观察到的两个波锋相互靠近时的行为

图 12.15(a)是实验中得到的斑图形成的分岔图. 控制参量是化学反应物进入全混釜的流量,它反比于反应物在全混釜的平均停留时间. 从图 12.15(a)知,如果系统的初始状态为均匀态,则不论怎样改变控制参量,系统始终保持在均匀态上. 当反应物流量超 F_6 时,系统从均匀的氧化态变为均匀的还原态;当流量低于 F_2 时,系统从均匀的还原态跳跃到均匀的氧化态. 当反应物流量控制在 F_3 与 F_4 之间时,如果通过扰动在系统中引入一个化学波锋线,它将发展成如图 12.13 所示的迷宫斑图. 当反应物流量在小于 F_1 或大于 F_5 时,迷宫斑图会逐渐消失,图 12.16 给出实验观察到的一个斑图的消失的过程. 此时反应物流量由小于 F_5 跳跃到大于 F_5.

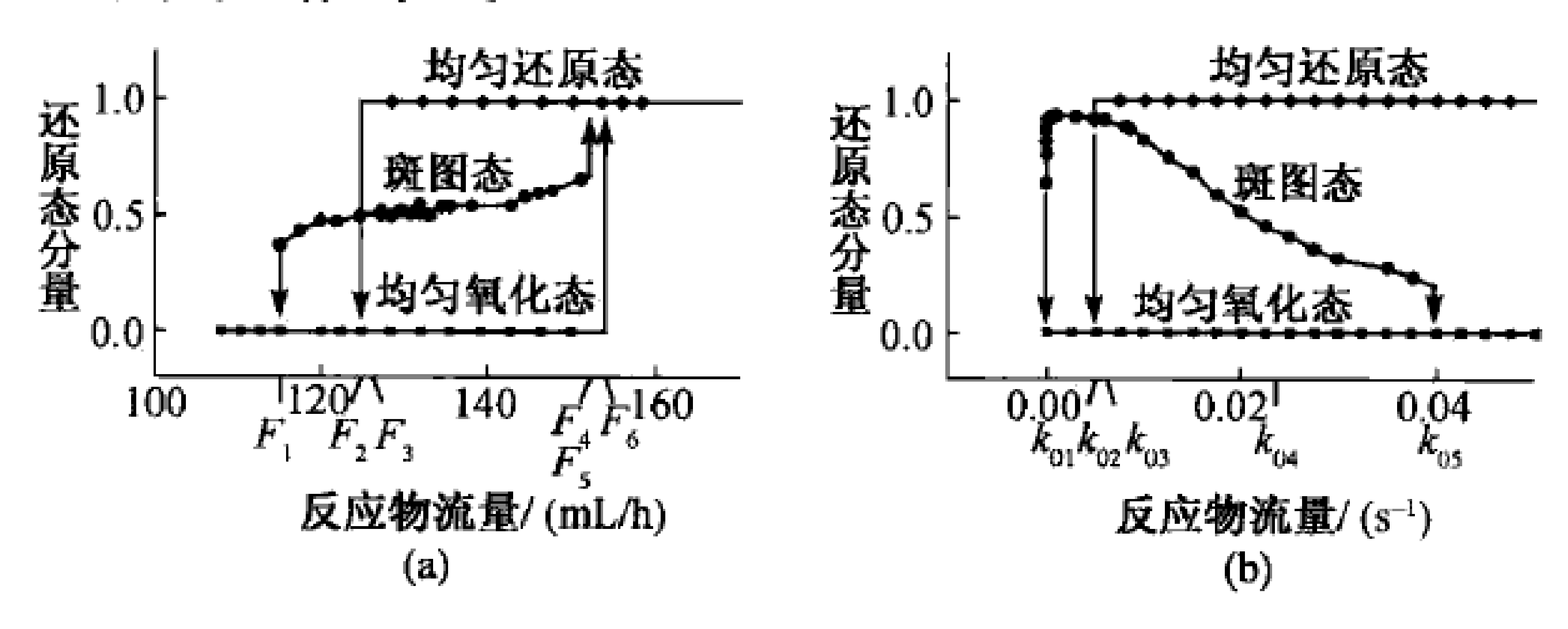


图 12.15　FIS 系统的分岔图

图 12.15(b)是对反应扩散系统(7.2.3)进行数值模拟得到的相变图. 我们看到在低流量区,实验与模拟有一定相似性. 说明模型(7.2.3)在此区域定性地反映了 FIS 反应的动力学机制. 但二者之间在高流量区有显著不同. 最明显的不同之处在于当控制参量,即反应物流量增加时,数值模拟显示斑图消失后系统变为均匀氧化态,而实验表示斑图消失后系统变为均匀还原态.

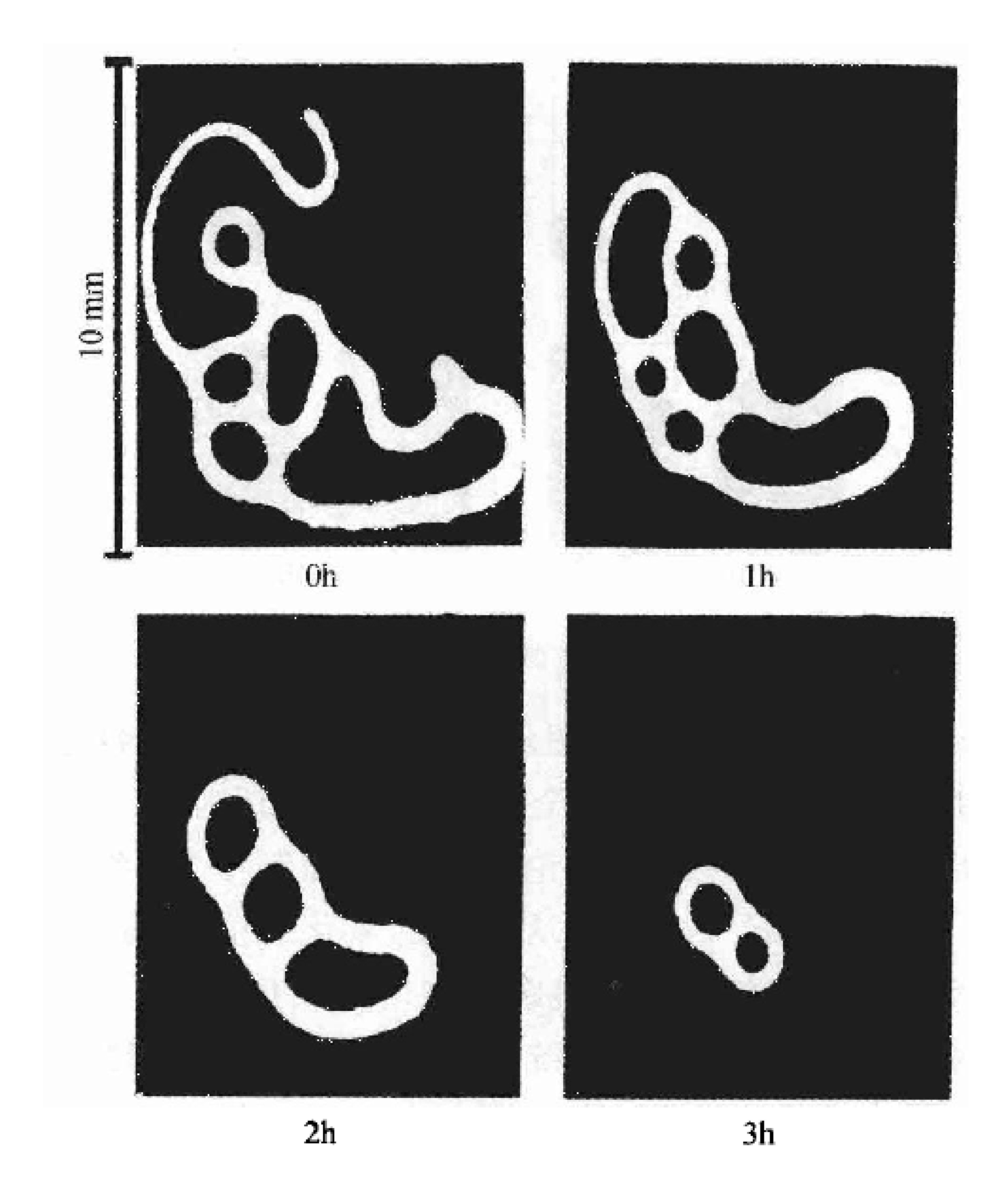


图 12.16　迷宫斑图的消失过程

如果增加 $Fe(CN)_6^{-4}$ 的入口浓度，在实验中将观察到双稳系统中的螺旋波态，见图 12.17(a). 按照上节所述的理论，螺旋波的产生说明系统由伊辛波锋态变为布洛赫波锋态. 这时如果调节反应物的入口流量，螺旋波的波锋会因破裂而产生出点缺陷来，见图 12.17(b). 此时系统从螺旋波态向缺陷湍流态过渡. 由

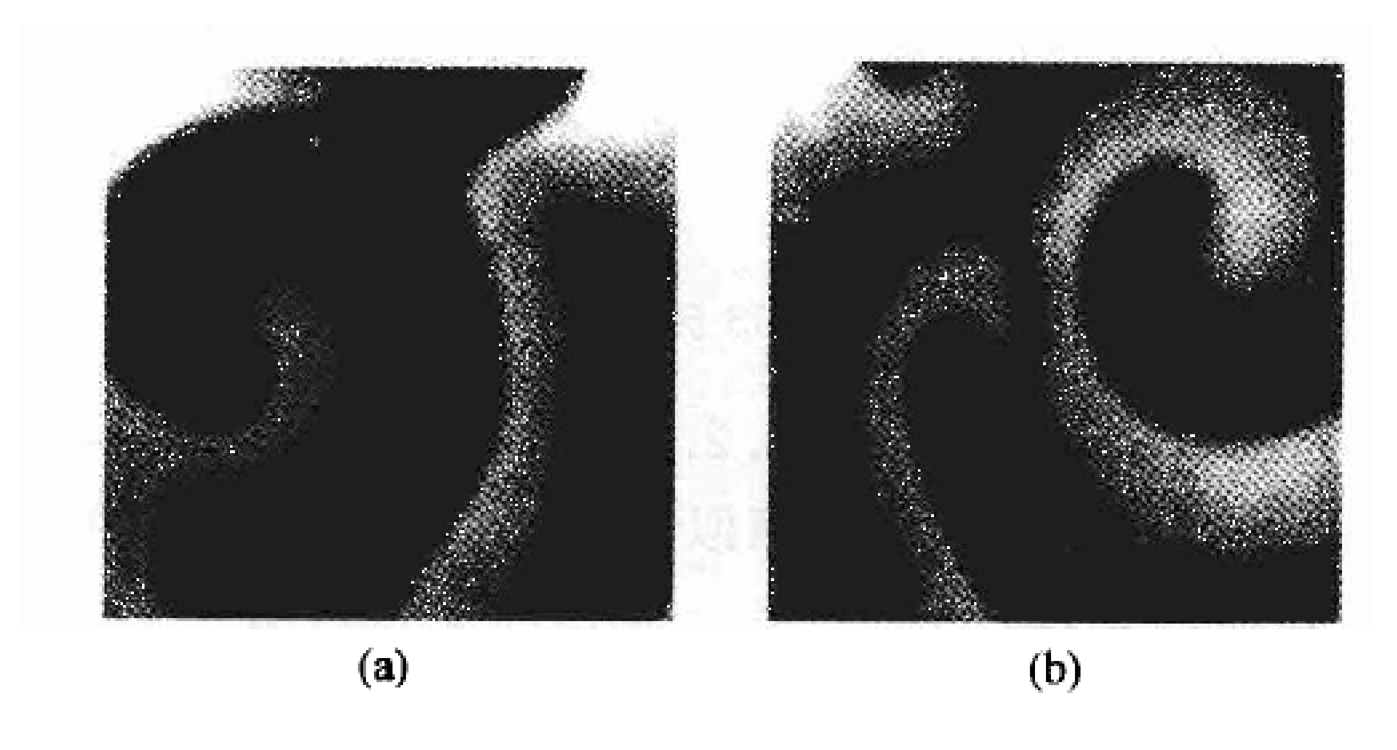


图 12.17　FIS 系统中的螺旋波斑图

图 12.17(b)可知波锋之间的作用还是排斥性的.这种排斥作用使螺旋波锋的曲率在碰撞点附近发生变化,从而促使伊辛-布洛赫相变的发生.正如上节所讨论的那样,这种相变会引起点缺陷的不断产生,使系统进入缺陷湍流态.

继续增加 $Fe(CN)_6^{-4}$ 入口浓度系统呈现斑点自复制过程.图 12.18 是这个过程的一个实验观测.系统的背景是氧化态,还原态斑点由外界扰动(紫外光照射,停止全混釜搅拌)获得.一旦系统中出现斑点,这些斑点就会自我维持,在斑点不断长大的过程中,波锋比较平滑的部分首先改变运动方向,使斑点分裂成两个子斑点.新形成的子斑点开始时取收缩运动.如果它的占有面积小于一个临界值(1.2 mm),或它被挤在许多斑点的包围之下,收缩运动会使斑点湮没.如果新形成的斑点足够大,并处在一个相对宽松的环境中,它将在经过短暂的收缩后扩张,并在扩张中重新分裂.在图12.18 中,斑点之间互相拥挤但始终避免接触,每个斑点的湮没或成长都受其邻近斑点的影响.一般来讲相邻斑点的生长方向垂直于两斑点中心间的连线,每个延伸了的斑点分裂成两个子斑点.在偶然情况下一个斑点会分裂成三个或更多的子斑点,但以一分为二的过程最为普遍.

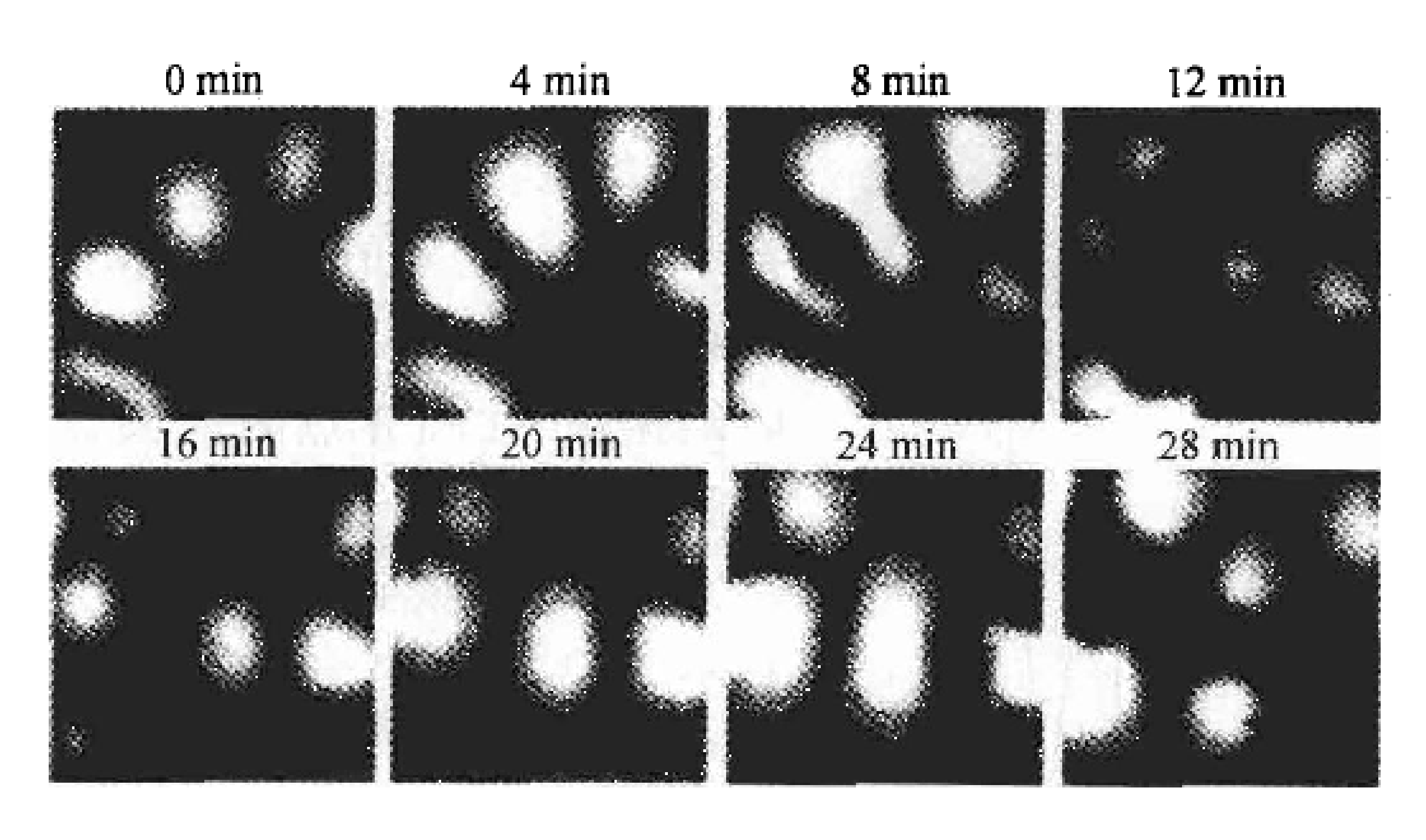


图 12.18 FIS 系统中的螺旋波斑图

从实验中观察到的斑点自复制过程与上节讨论的机理完全吻合,证明系统中波锋速度与波锋曲率之间存在 S 形多重态.由于在实验数据中存在噪声,而这些噪声在求导数时会被放大很多,现在还没有找到一种合适的数据处理方法,从实验数据中计算出波锋速度与波锋曲率之间的多重态关系.图 12.19 是系统局部区域中一个斑点的自复制过程.容易看出当波锋曲率低于某临界值时波锋运动转向.同时,比较斑点分裂前后波锋的运动方向可知,对于同一曲率系统可能存在两种不同的运动方向与速度,这个观察定性地支持上节讨论中得到的斑点自复制机理.

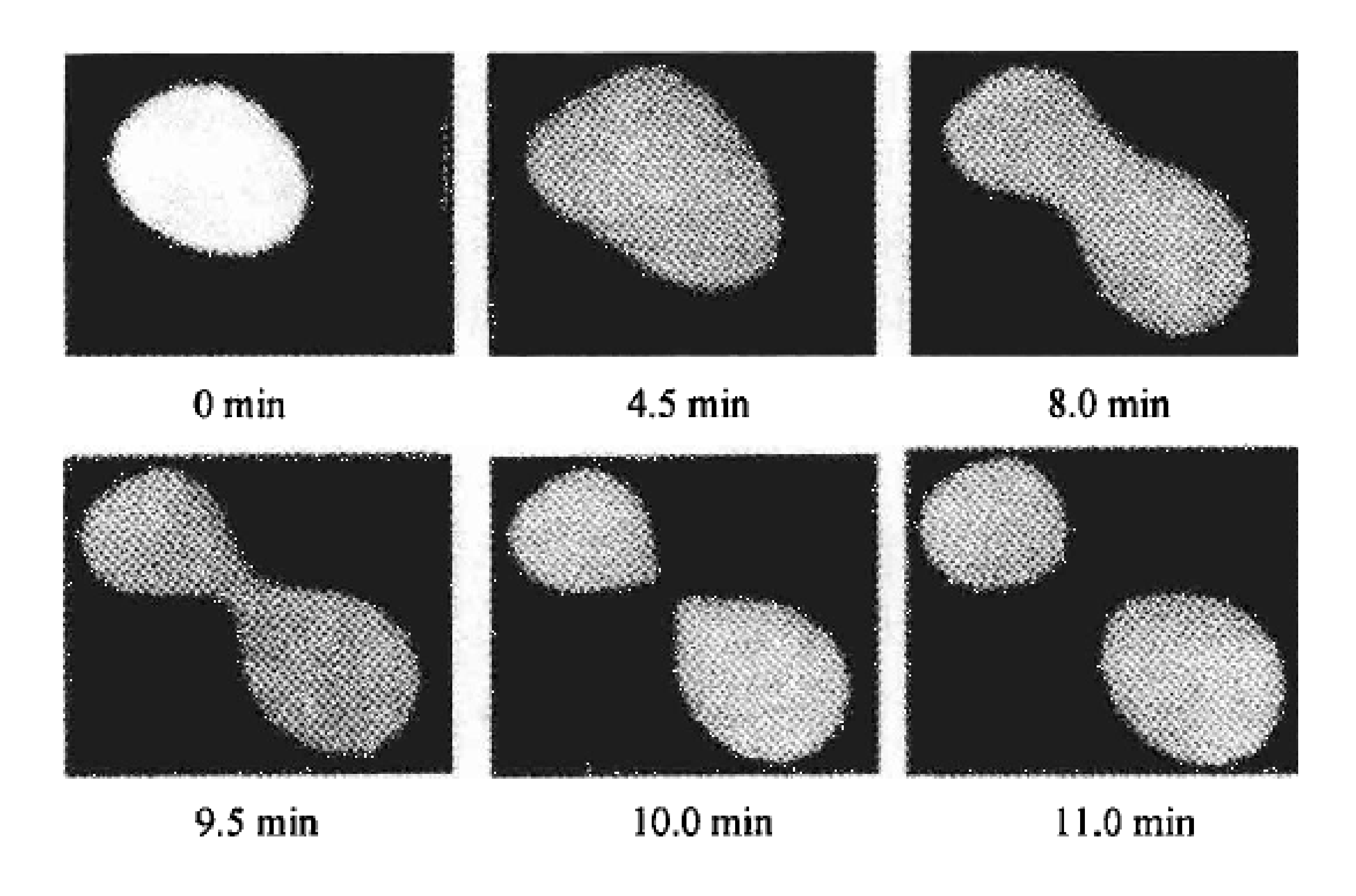


图 12.19 FIS 系统中的斑点自复制过程

在实验中我们也观察到振荡斑点态，见图 12.19. 这类振荡斑点态产生于波锋速度在非平衡伊辛-布洛赫相变边界附近，由于边界条件而引起的多重性. 这种效应在上节的末尾处有过讨论. 在实验中，当反应物流量小于临界值时，系统的圆盘状斑图是稳定的，且不随时间变化. 当反应物流量超过临界值时圆盘开始做扩张-收缩振荡. 在临界点附近圆盘振荡的振幅(圆盘最大半径与最小半径之差的二分之一)与控制参量到临界点的距离($F-F_c$)呈平方根关系，$A\propto(F-F_c)^{1/2}$，说明相变过程是霍普夫分岔. 从上节的理论可以证明系统从稳定圆盘状态到振荡圆盘状态变化时的确经历霍普夫分岔.

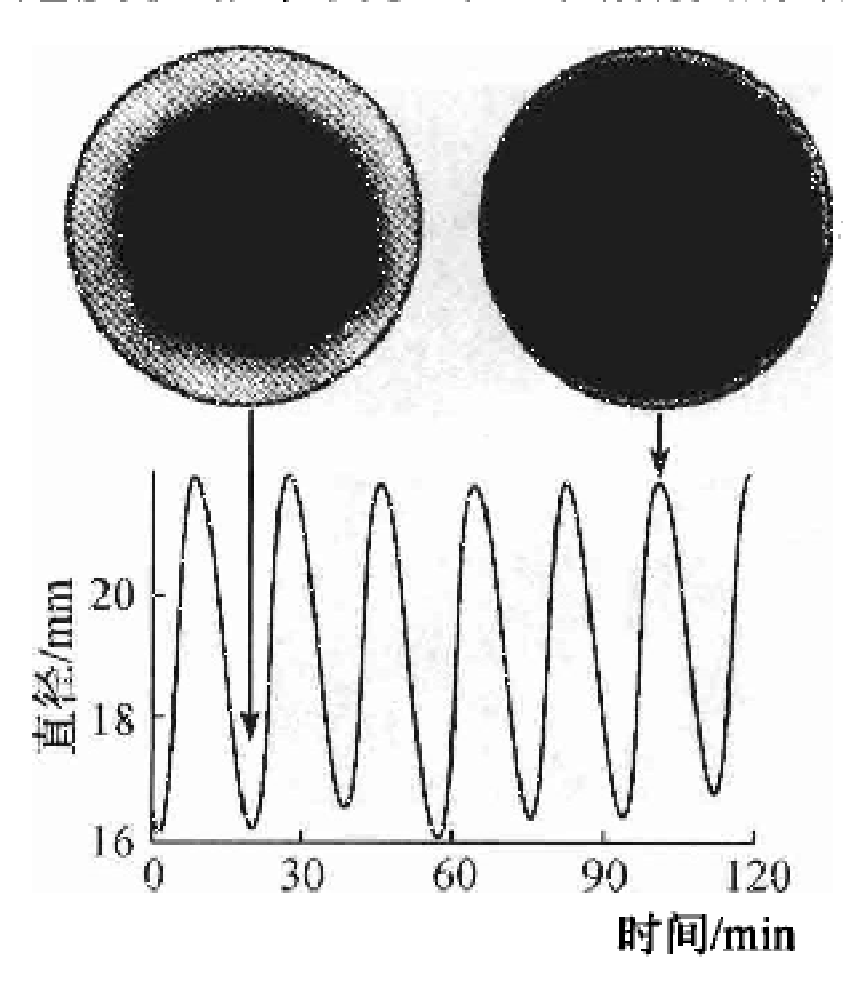


图 12.20 FIS 系统中的振荡斑点

第十三章　化学法拉第斑图

到目前为止，在反应扩散系统中由实验观测到的斑图自组织现象，按其自组织行为及产生条件可以被分为五类：第一类为图灵斑图. 本书在第八、第九章中对图灵斑图的自组织形成与动力学行为，从理论到实验两方面作了比较详细的介绍. 第二类为可激发系统中的行进波. 第三类为振荡系统中的相波. 对于这两类化学波的动力学行为，本书在第十、十一章通过对螺旋波的研究在理论与实验上作了介绍. 第四类为在双稳系统中由伊辛-布洛赫相变或横向失稳引发的定态、动态斑图. 这类斑图的形成机制我们在上一章中作了分析. 本章介绍最后一类化学斑图，化学法拉第斑图.

化学法拉第斑图起源于外力对反应扩散系统做周期性的扰动. 当系统处在霍普夫分岔附近，并受到一个小的空间均匀的周期外力扰动时，如果扰动频率大约二倍于系统本征频率，系统会自组织形成一类驻波斑图. 此类由次谐波共振(sub-harmonic resonance)自组织形成的斑图是在一百多年前由法拉第首先发现的，因而被称之为法拉第斑图. 法拉第斑图首先是在流体中观察到的. 在一个很浅的盘子中充满流体，当盘子通过外力的影响作上下振动时，如果振荡频率大约二倍于流体的本征频率，流体所产生的波浪呈驻波状态，驻波振幅的空间分布不随时间变化，表现为条形、正方形或六边形定态斑图. 本书第七章的图7.1(c)就是流体中观察到的一个法拉第斑图的例子. 化学法拉第斑图是通过对反应扩散系统作外力扰动而形成的. 本章介绍化学法拉第斑图的形成，并通过对其自组织机理的探讨分析外力对系统自组织行为的影响.

§13.1　振荡系统的波锋

首先考察在周期外力扰动下一个周期振荡子的动力学行为. 以范德坡振荡子为例：

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\omega_0^2u=\varepsilon(2\mu-u^2)\frac{du}{dt}+f\cos(\omega_e t). \qquad (13.1.1)$$

方程右边最后一项是周期外力扰动项. 如果扰动频率 ω_e 与振荡子的本征频率

ω_0 之比是一个无理数，则外力扰动不会与系统产生共振．振荡子的振幅方程可以利用多重尺度微扰分析得出．令

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T}, \tag{13.1.2}$$

代入方程(13.1.1)并按 ε 的幂级数将方程分开，得第 0 阶：

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \omega_0^2 u_0 = f\cos(\omega_e t). \tag{13.1.3}$$

解得

$$u_0 = A(T)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + \mathrm{c.\,c.} + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega_e^2}\cos(\omega_e t). \tag{13.1.4}$$

第 1 阶：

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \omega_0^2 u_1 = (2\mu - u_0^2)\frac{\partial u_0}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial T}. \tag{13.1.5}$$

将解(13.1.4)代入式(13.1.5)，并应用弗来得霍姆可解性条件，得到下面的振幅方程：

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}T} = \xi A - \frac{1}{2}|A|^2 A, \quad \xi = \mu - \frac{1}{4}\left(\frac{f}{\omega_0^2 - \omega_e^2}\right)^2. \tag{13.1.6}$$

由方程(13.1.6)可以得到这样的一般性结论：在一个振荡子受到外力周期扰动时，如果外力扰动与系统不发生共振，则：(1) 扰动使系统的霍普夫分岔推迟发生，推迟的程度与扰动振幅的平方成正比．(2) 在一级微扰近似下，外力不会引起系统本征振荡行为的锁相．也就是说，系统本征振荡仍然满足时间平移不变性．在振幅方程中，系统满足 $A \to A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 不变性．这里 θ 是一个任意常数．

下面考虑外力周期扰动与系统存在共振的情况．令 $\omega_e = \omega_0 + \varepsilon\delta$，$f = \varepsilon F$．方程(13.1.1)变为

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u = \varepsilon(2\mu - u^2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \varepsilon F\cos(\omega_0 + \varepsilon\delta)t. \tag{13.1.7}$$

仍然用式(13.1.2)的形式做微扰展开，得第 0 阶的解为

$$u_0 = A(T)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + \mathrm{c.\,c.} \tag{13.1.8}$$

在 ε 幂级数的第 1 阶，方程变为

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \omega_0^2 u_1 = (2\mu - u_0^2)\frac{\partial u_0}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial T} + F\cos(\omega_0 + \varepsilon\delta)t. \tag{13.1.9}$$

应用弗来得霍姆可解性条件得到下面的振幅方程：

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}T} = \mu A - \frac{1}{2}|A|^2 A - \frac{\mathrm{i}F}{4\omega_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta T}. \tag{13.1.10}$$

令 $A=Be^{i\delta T}$，振幅方程变为

$$\frac{dB}{dT}=(\mu-\delta)B-\frac{1}{2}|B|^2B-\frac{iF}{4\omega_0}. \tag{13.1.11}$$

振幅方程的基变为以外力扰动为频率的正弦振荡：

$$u_0=B(T)e^{i\omega_e t}+c.c.$$

从方程(13.1.11)看到，在外力周期扰动与系统发生共振时外力扰动不使系统的霍普夫分岔推迟发生. 由于振幅方程(13.1.11)的右边出现了一个常数项，方程的 $B\to Be^{i\theta}$ 对称不复存在. 它对应于系统的时间平移对称性破缺：原来的 $t\to t+t_0$ 的对称性变为比较低的 $t\to t+nT_e$ 对称，这里 T_e 为外力扰动的周期.

现在来一般性地探讨一下当一个临近霍普夫分岔的物理系统在受到周期性外力扰动时的情况[96]. 设扰动的频率有如下形式：

$$\omega_e=\frac{n}{m}(\omega_0-\nu), \tag{13.1.12}$$

这里 ω_e 与 ω_0 分别为外力的扰动频率与系统的本征频率；ν 是对本征频率的一个小的偏离，称之为频率调制；n 与 m 是正整数，n/m 是不可约分数. 周期外力的出现降低了系统的时间平移对称，使得它由原来的连续性时间平移不变，转化为间断的时间平移不变：$t\to t+kT_e$，这里 k 是一正整数，T_e 是外力的扰动周期. 在这种情况下系统的动力学行为应该满足如下关系：

$$c(\boldsymbol{r},t)=c(\boldsymbol{r},t+kT_e). \tag{13.1.13}$$

在临近霍普夫分岔时系统的变量可以表示为

$$c=c_0+Ae^{i(\omega_0-\nu)t}+c.c.$$

将平移不变性(13.1.12)代入上式，得

$$\begin{aligned}c&=c_0+Ae^{i(\omega_0-\nu)(t+kT_e)}+c.c.\\&=c_0+A^{i(\omega_0-\nu)kT_e}e^{i(\omega_0-\nu)t}+c.c.,\end{aligned}$$

所以在振幅方程上应有如下不变性：

$$A\to Ae^{i(\omega_0-\nu)kT_e}. \tag{13.1.14}$$

将式(13.1.12)代入式(13.1.14)，振幅方程的不变性可以变为

$$A\to Ae^{i2\pi mk/n}. \tag{13.1.15}$$

利用§8.2介绍的对称性分析方法，容易得到满足(13.1.15)的振幅方程：

$$\frac{dA}{dt}=(\mu+i\nu)A+(1+i\alpha)\nabla^2A-(1+i\beta)|A|^2A+\gamma_n\bar{A}^{n-1}. \tag{13.1.16}$$

方程右端前三项构成金兹堡-朗道方程的右端. 最后一项是由周期外力引起的，其强度正比于外力振幅的 m 次方. 当外力振幅为零时，这个方程回到金兹堡-朗

道方程的形式. 从§8.5最后的分析中知道,如果 $A\sim\varepsilon$,则方程(13.1.16)的左边与右边前三项的量级都为 ε^3. 由此可以将外力扰动分为两类:当 $n\leqslant 0$ 时外力扰动的量级小于或等于 ε^3,因而系统与外力存在强共振,它将对系统的动力学行为有重大影响. 当 $n>4$ 时外力扰动的量级大于 ε^3,系统与外力只存在弱共振,它对系统的动力学行为没有决定性影响.

令 $A=Re^{i\varphi}$,方程(13.1.16)的定态解满足如下方程:

$$\mu R-R^3+\gamma_n R^{n-1}\cos(n\varphi)=0, \qquad (13.1.17a)$$

$$\nu R-\beta R^3-\gamma_n R^{n-1}\sin(n\varphi)=0. \qquad (13.1.17b)$$

消去式(13.1.17)中的 φ 得

$$\gamma_n^2=\frac{(R^2-\mu)^2+(\nu-\beta R^2)^2}{R^{2(n-2)}}. \qquad (13.1.18)$$

由式(13.1.18)解出 R 后代入(13.1.17)可以计算出 φ 值. 计算式(13.1.17)将得到 n 个解,它们之间相差 $2\pi/n$ 相位角.

以上是根据对称性原则分析外力对临近霍普夫分岔的系统的影响. 下面研究一个具体系统. 为了把讨论集中到分析法拉第斑图的形成上,分析中只考虑 $n=2, m=1$ 的情形.

§13.2 钟摆模型

为了简单起见,首先分析一个简单的机械振荡系统. 考虑一长度为 l,质量为 m 的钟摆,在钟摆的上端点有一外力,使其产生一个小的上下周期运动 $\delta\cos\omega t$. 这种运动可以类比于打秋千,经验告诉人们,在打秋千时为了使秋千振幅最大,每一个周期要施加两次力. 以钟摆偏离垂直线的角度 θ 做变量,钟摆的运动方程为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}(1+\delta\omega^2\cos\omega t)\sin\theta=0. \qquad (13.2.1)$$

这里假定 $\delta\omega^2\ll 1$. 令 $\omega_0^2=g/l, \varepsilon'=\delta\omega^2$,并做如下无量纲变换: $t\to\omega_0 t, \omega\to\omega/\omega_0$,方程(13.2.1)变成

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+(1+\varepsilon'\cos\omega t)\sin\theta=0. \qquad (13.2.2)$$

现在令外力扰动频率大致二倍于系统本征频率,即 $\omega=2(1-\nu)$,其中 ν 为一个小的频率调制量,并在方程中加入阻尼项,得到如下方程:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\gamma\frac{d\theta}{dt}+[1+\varepsilon'\cos 2(1-\nu)t]\sin\theta=0. \qquad (13.2.3)$$

这里 2γ 是系统运动的阻尼系数. 该方程被称为马修(Mathieu)方程. 由于方程中外力干扰项和非线性项都很弱,我们可以对上一方程寻求微扰解. 假定系统中存在两个时间尺度 $t,\varepsilon^2 t$,以此为基础的微扰分析是多重尺度分析. 令 T 为一个长时间尺度,$T=\varepsilon^2 t$,并对控制参量作如下标度变换:$\varepsilon'=\varepsilon^2\tilde{\varepsilon},\gamma=\varepsilon^2\tilde{\gamma},\nu=\varepsilon^2\tilde{\nu}$. 这里 $\tilde{\varepsilon},\tilde{\gamma},\tilde{\nu}$ 为 $O(1)$. 令 $\theta=x,\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t=y$ 并将变量与自变量按 ε 幂级数的不同阶进行分解:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\varepsilon\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\varepsilon^2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}+\varepsilon^3\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}+\cdots,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T}. \tag{13.2.4}$$

代入方程(13.2.3),得

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T}\right)\left[\varepsilon\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\varepsilon^2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}+\varepsilon^3\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}+\cdots\right]\\&=\left[\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+\varepsilon^2\begin{pmatrix}0&0\\-\tilde{\varepsilon}\cos2(1-\nu)t&-2\tilde{\gamma}\end{pmatrix}\right]\\&\quad\cdot\left[\varepsilon\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\varepsilon^2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}+\varepsilon^3\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}\right]+\varepsilon^3\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{6}x_1^3\end{bmatrix}+O(\varepsilon^5).\end{aligned} \tag{13.2.5}$$

根据多重标尺度分析的程序,按 ε 幂级数的不同阶对方程(12.2.3)进行分解,第 1 阶为

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}. \tag{13.2.6}$$

其解的形式为:

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\end{pmatrix}A(T)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\text{c. c.}, \tag{13.2.7}$$

其中 A 为系统振荡的振幅,它的动力学行为由高阶微扰方程决定. 第 2 阶:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}.$$

由于上一方程的解与(13.2.7)相同,可以令其解为 0. 第 3 阶:

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial}{\partial t}-\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}\\&=-\frac{\partial}{\partial T}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\-\tilde{\varepsilon}\cos 2(1-\nu)t&-2\tilde{\gamma}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{6}x_1^3\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{13.2.8}$$

将式(13.2.7)代入式(13.2.8),得

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x_3\\ y_3\end{pmatrix}=-\frac{\partial A}{\partial T}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ -\frac{\tilde{\varepsilon}}{2}\bar{A}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(3-2\nu)t}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-2\nu)t}) & -2\tilde{\gamma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{6}A^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}3t}+\frac{1}{2}|A|^2A\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\end{bmatrix}. \tag{13.2.9}$$

应用弗来得霍姆可解性条件,即方程(13.2.9)右半部的函数必须垂直于方程(13.2.9)左半部共轭算子所规定的零特征向量.在此问题中,这个特征向量是

$$(x^+,y^+)=(1,-\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}+\mathrm{c.c.}$$

将上式左乘(13.2.9)式右边并运用弗来得霍姆可解性条件,得到关于 A 的振幅方程:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}T}=-\tilde{\gamma}A+\frac{\mathrm{i}}{4}\tilde{\varepsilon}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\nu t}\bar{A}-\frac{\mathrm{i}}{4}|A|^2A. \tag{13.2.10}$$

做变换 $A\to A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu t}=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\nu}T}$,代入(13.2.10)得振幅方程

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}T}=(-\tilde{\gamma}+\mathrm{i}\nu)A+\frac{\mathrm{i}}{4}\tilde{\varepsilon}\bar{A}-\frac{\mathrm{i}}{4}|A|^2A. \tag{13.2.11}$$

而原方程在 $\theta=0$ 附近的近似解变为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\varepsilon\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}A(T)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-\nu)t}+\mathrm{c.c.}$$

如果考虑由这样的钟摆组成的钟摆系列,钟摆之间由弹簧相连,而弹簧服从胡克定律,这就构成了法拉第斑图系统在一维系统的一个典型例子.该系统的运动方程为

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+2\gamma\frac{\partial\theta}{\partial t}+[1+\varepsilon\cos 2(1-\nu)t]\sin\theta=\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}, \tag{13.2.12}$$

这里弹簧的弹性系数被定为1.由多重尺度分析可以得到系统的周期振荡解

$$\theta=\varepsilon A(x,T)\cos[(1-\nu)t+\varphi_0]+O(\varepsilon^3).$$

对应的振幅方程为

$$\frac{\partial A}{\partial T}=(-\tilde{\gamma}+\mathrm{i}\nu)A-\frac{\mathrm{i}}{2}\nabla^2A-\frac{\mathrm{i}}{4}|A|^2A+\frac{\mathrm{i}}{4}\tilde{\varepsilon}\bar{A}. \tag{13.2.13}$$

法拉第斑图的出现是由于外力项的出现.振幅方程在外力振幅达到临界值时会引起系统均匀振荡态的失稳.在对振幅方程(13.2.13)做线性稳定性分析之前,首先对它做一个定性分析,从而得到法拉第斑图的一些特征.方程(13.2.13)

右边最后一项的存在使得原金兹堡-朗道方程的相平移不变性，即系统在 $A \to Ae^{i\varphi}$ 操作下不变的特征被破坏，因此系统不存在相行波解. 由此得出法拉第斑图第一个特征，即它不可能是行波，而只能是驻波. 驻波的振幅为空间定态图纹. 另外，方程(13.2.13)永远保持 $A \to -A$ 不变性，因此法拉第斑图是一个双稳系统. 两个稳定定态之间的振幅相位差为 π. 由此可以得出法拉第图纹的第二个特征，即它可以存在非平衡伊辛边界(伊辛墙)，并且有可能观察到伊辛-布洛赫相变.

现在对振幅方程做线性稳定性分析. 首先，容易看见由于 $\tilde{\gamma}>0$，在无外力扰动时解 $A=0$ 是稳定的. 围绕 $A=0$ 做微扰，令 $A=x+iy$，代入方程(13.2.13)并去掉高阶项得到线性方程

$$\frac{\partial}{\partial T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tilde{\gamma} & -\tilde{\nu}+\frac{\tilde{\varepsilon}}{4}-\frac{1}{2}\nabla^2 \\ -\tilde{\nu}+\frac{\tilde{\varepsilon}}{4}+\frac{1}{2}\nabla^2 & -\tilde{\gamma} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{13.2.14}$$

将微扰 (x,y) 在傅里叶空间展开：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} e^{\lambda T + ikr},$$

方程(13.2.14)变为

$$\frac{\partial}{\partial T}\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tilde{\gamma} & -\tilde{\nu}+\frac{\tilde{\varepsilon}}{4}+\frac{1}{2}k^2 \\ -\tilde{\nu}+\frac{\tilde{\varepsilon}}{4}+\frac{1}{2}k^2 & -\tilde{\gamma} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}. \tag{13.2.15}$$

解此方程的特征值，得色散关系

$$\lambda_{\pm} = -\tilde{\gamma} \pm \sqrt{\left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{4}\right)^2 - \left(\tilde{\nu}+\frac{1}{2}k^2\right)^2}. \tag{13.2.16}$$

分析式(13.2.16)可知，由于 $\tilde{\gamma}>0$，系统唯一失稳的途径是鞍-结点分岔. 当外力振幅 $\tilde{\varepsilon}$ 大于 $4\tilde{\gamma}$ 时，λ_+ 有可能大于零. 也就是说系统有可能失稳. 对于振幅 A 来说，失稳后一个波数为 k_c 的定态斑图将会生长出来，这里 $k_c^2=-2\tilde{\nu}$. 从以上分析看到，法拉第斑图具有不依赖具系统的普适性. 也就是说，它的出现与具体的物理系统无关，而只与扰动外力的强度(γ)和形式(ω_c)有关. 在物理空间中，这个对于振幅的定态斑图表现为驻波斑图，驻波的波长唯一地由频率调制量 ν 控制. 在以上分析的系统中，驻波斑图的出现要求 ν 为负值，即外力扰动频率要

略大于系统本征频率的二倍. 图 13.1 是在一维系统中法拉第斑图的一个数值模拟,注意其驻波的振幅不随时间变化.

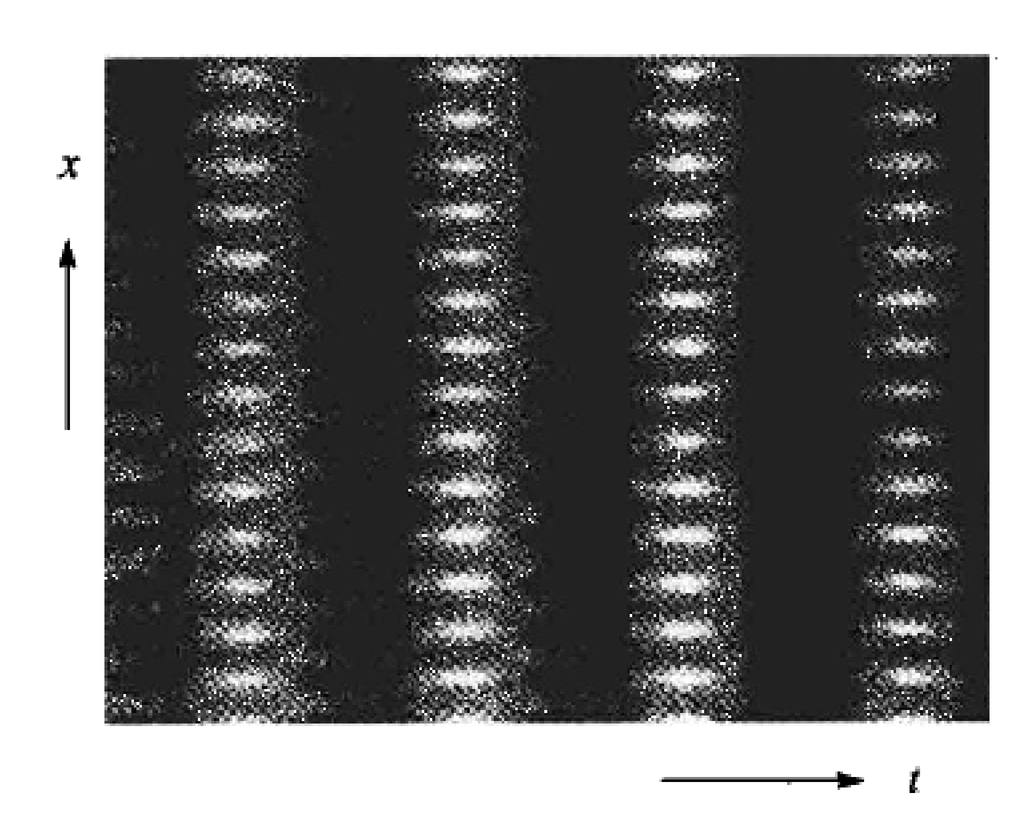


图 13.1 单摆链系统中得到的驻波斑图

§ 13.3 反应扩散模型

从分析机械振荡系统出发得到的对法拉第斑图的分析,可以几乎原封不动地应用于反应扩散系统. 本节将以化学反应模型布鲁塞尔子为例,分析法拉第斑图在反应扩散系统中的形成过程. 从 § 4.5 可知在不存在外力扰动的情况下,布鲁塞尔子的反应方程由(4.5.3)描述,对应的反应扩散动力学方程为

$$\frac{\partial X}{\partial t} = A - (B+1)X + X^2Y + D_X\nabla^2X, \qquad (13.3.1a)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = BX - X^2Y + D_Y\nabla^2Y. \qquad (13.3.1b)$$

现在假设反应常数 k_2 由于受到一个周期外力扰动(如光照)的影响,它的值随时间发生周期振荡. 周期振荡的频率接近于系统的本征频率的两倍:

$$k_2 = k_2^0[1+\gamma\cos2(\omega_0-\nu)t]. \qquad (13.3.2)$$

其中 ω_0 是系统的霍普夫分岔的本征频率;γ 为外力扰动的振幅,我们假设它是一个小量;ν 为频率调制量,也是一个小量. 在这些条件下系统(13.3.1)的动力学方程变为

$$\frac{\partial X}{\partial t} = A - [(B(1+\gamma\cos2(\omega_0-\nu)t)+1)]X + X^2Y + D_X\nabla^2X, \qquad (13.3.3a)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = B[1+\gamma\cos2(\omega_0-\nu)t]X - X^2Y + D_Y\nabla^2Y. \qquad (13.3.3b)$$

当 $\gamma=0$ 时，方程有定态解 $X_0=A, Y_0=B/A$. 霍普夫分岔的条件是 $B_c=A_2+1$. 在分岔点，系统的振荡频率为 $\omega_0=A$. 围绕此定态解做微扰：$X=X_0+x, Y=Y_0+y$，代入方程(13.3.3)得微扰方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}B-1+D_X\nabla^2 & A^2\\ -B & -A^2+D_Y\nabla^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\&\quad+\left(\frac{B}{A}x^2+2Axy+x^2y\right)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\\&\quad+\begin{pmatrix}-B\gamma\cos2(\omega_0-\nu)t & 0\\ B\gamma\cos2(\omega_0-\nu)t & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\&\quad+BA\gamma\cos2(\omega_0-\nu)t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{13.3.4}$$

方程右端的后两项是由外力扰动引起的.

对方程(13.3.4)进行多重尺度分析，令

$$B-B_c=\varepsilon^2\tilde{B}+O(\varepsilon^3),\quad \gamma=\varepsilon^2\tilde{\gamma}+O(\varepsilon^3),\quad \nu=\varepsilon^2\tilde{\nu}+O(\varepsilon^3),$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\varepsilon\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\varepsilon^2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}+\varepsilon^3\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}+\cdots.$$

将振荡振幅时间尺度和空间尺度与它的振荡模式分离：

$$\frac{\partial}{\partial t}\to\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T},\quad \nabla\to\varepsilon\nabla_s,$$

按上节所述的多重尺度分析程序对以上系统进行逐步分析，可以得到如下形式的振幅方程：

$$\frac{\partial A}{\partial T}=(\mu+\mathrm{i}\nu)A-(\alpha_r+\mathrm{i}\alpha_i)|A|^2A+(\beta_r+\mathrm{i}\beta_i)\nabla_s^2A+\gamma\bar{A},\tag{13.3.5}$$

其中

$$\mu=\tilde{B}/2,\quad \nu=\bar{\nu},\gamma=-\tilde{\gamma}\left(\frac{A^2+1}{2}\right),$$

$$\beta_r=\frac{D_x+D_Y}{2},\qquad \beta_i=-A\frac{D_X-D_Y}{2}$$

$$\alpha_r=\frac{1}{A^2}+\frac{1}{2},\quad \alpha_i=\left(\frac{2}{3A^3}-\frac{7}{6A}+\frac{2A}{3}\right).$$

法拉第斑图是在周期外力影响下产生的. 在无外力扰动的情况下系统应处在稳定的均匀定态. 也就是说当 $\gamma=0$ 时定态解 $A=0$ 是稳定的. 这要求振幅方程(13.3.5)中的系数 $\mu<0$. 令：$A=x+\mathrm{i}y$，围绕解 $A=0$ 做方程(13.3.5)的线性微扰分析，得线性微扰方程

$$\frac{\partial}{\partial T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu+\gamma+\beta_r\nabla_s^2 & -\nu-\beta_i\nabla_s^2 \\ \nu+\beta_i\nabla_s^2 & \mu-\gamma+\beta_r\nabla_s^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \qquad (13.3.6)$$

在傅里叶空间将微扰变量(x,y)展开：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} e^{\lambda T + iks},$$

得色散关系

$$\lambda^2 - 2T\lambda + \Delta = 0, \qquad (13.3.7)$$

其中：

$$T = \mu - \beta_r k^2, \quad \Delta = \Delta_0 + \Delta_1 k^2 + \Delta_2 k^4, \quad \Delta_0 = \mu^2 + \nu^2 - \gamma^2,$$
$$\Delta_1 = -2\mu\beta_r - 2\nu\beta_i, \quad \Delta_2 = \beta_r^2 + \beta_i^2.$$

解(13.3.7)，得

$$\lambda = T \pm \sqrt{T^2 - \Delta}. \qquad (13.3.8)$$

因为系统处在霍普夫分岔点之前，即$\mu<0$，而$\beta_r=(DX+DY)/2>0$，所以$T=\mu-\beta_r k^2<0$. 方程(13.3.5)中$A=0$的解失稳的唯一可能是$\Delta<0$. 将Δ对k^2求极小值得到临界点上斑图的波数：

$$k_c^2 = \frac{-\Delta_1}{2\Delta_2} = \frac{\mu\beta_r + \nu\beta_i}{\beta_r^2 + \beta_i^2}. \qquad (13.3.9)$$

法拉第驻波斑图的出现要求系统对均匀微扰是稳定的，即

$$\Delta_0 = \mu^2 + \nu^2 - \gamma^2 > 0, \qquad (13.3.10)$$

而对于波数为k_c^2的微扰是不稳定的，即

$$\Delta(k_c^2) = \Delta_0 - \frac{\Delta_1^2}{4\Delta_2} = \mu^2 + \nu^2 - \gamma^2 - \frac{(\mu\beta_r + \nu\beta_i)^2}{\beta_r^2 + \beta_i^2} < 0. \qquad (13.3.11)$$

令$\alpha=\beta_i/\beta_r$，式(13.3.11)可简化为

$$\frac{1}{1+\alpha^2}(\nu - \alpha\mu)^2 - \gamma^2 < 0. \qquad (13.3.12)$$

式(13.3.10)与(13.3.12)规定了法拉第驻波斑图出现的必要条件. 图13.2是以外力振幅γ和频率调制ν为控制参量的非平衡相变相图，阴影部分是法拉第斑图产生区域.

由于$\mu<0$，$\beta_r>0$，从式(13.3.9)可知，法拉第斑图的产生要求$\nu\beta_i>|\mu\beta_r|$. 由此可以得到两点推论，第一，如果所有反应物的扩散系数相等，则$\beta_i=-A(D_X-D_Y)/2=0$，系统不会出现法拉第斑图. 换句话说，法拉第斑图产生的必要条件是系统中不同反应物的扩散系数不同. 第二，由于频率调制参数可正可负，当反应物扩散系数不等时，我们总可以调节ν的符号使得$\nu\beta_i>0$. 因此法拉第斑图的出现条件与图灵斑图不同，不需要阻滞子的扩散系数大于活化子.

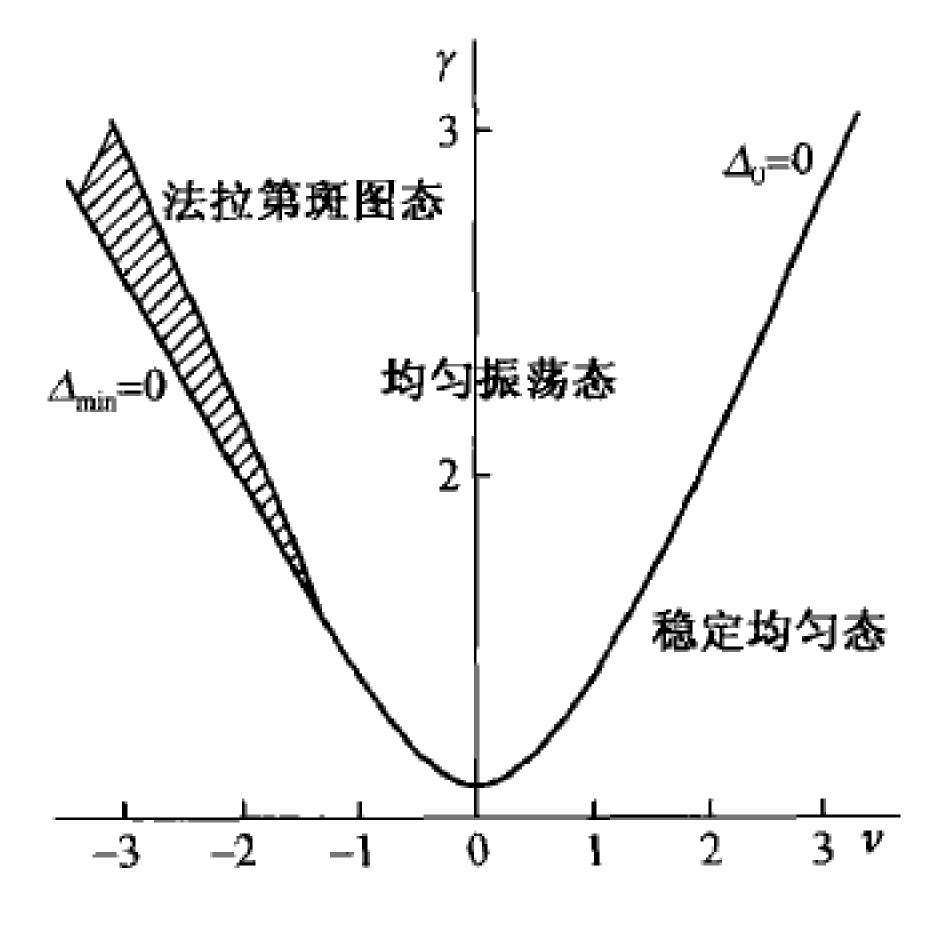


图 13.2 化学法拉第斑图的相图

§13.4 化学法拉第斑图的实验

化学法拉第斑图的实验开始于 1996 年. 实验在开放型空间反应器中进行，化学系统为 BZ 反应[97]. 在历史上，在寻找反应扩散系统中的图灵斑图的实验中，人们曾经把大量精力投入到对 BZ 反应的研究. 但所有的实验都以失败而告终. 其根本原因在于 BZ 反应中的活化子是 BrO_2，阻滞子是 Ce^{4+}. 由于反应在水溶液中进行，金属阳离子 Ce^{4+} 会被大量 OH^- 阴离子包围，这使得禁阻子的扩散系数远小于活化子，正好与图灵斑图形成的必要条件相反(见 §8.3). 在化学法拉第实验中，由于不需要禁阻子的扩散系数大于活化子，而只需要两者的扩散系数存在明显差别，这个在图灵斑图中的缺点在这里变成了优点.

实验中将反应的催化剂由铁离子改为钌离子，这样 BZ 反应就有了光敏性. 外力扰动可以通过对反应器做均匀的周期性光照完成. 其中光照频率为实验的主控制参量. 与上节的分析稍有不同的是，在实验中将系统固定在霍普夫分岔之后，所以在外力扰动为零时系统会产生螺旋波斑图，而不是均匀定态.

图 13.3(a)给出实验中观察到的周期外力的存在对系统的影响. 图的上半部是没有外力扰动的情况，系统自组织为螺旋波. 图的下半部是有外力干扰的情况，其干扰频率略大于 BZ 反应的霍普夫本征频率的两倍. 这时系统波相位的平移不变性被破坏，行进波变为驻波. 图 13.3(b)给出(a)中两点 A(实线)，B(虚线)的周期变化. A，B 两点的振荡相位相反，但都与外力干扰同步. 注意到图 13.3(a)中的法拉第斑图在局部区域为条形图纹，但从整体上看它又不是很

规则的. 这是由于系统的空间旋转不变性,条形图纹可以有不同的方向. 这些观测都与以上所述理论预测相符.

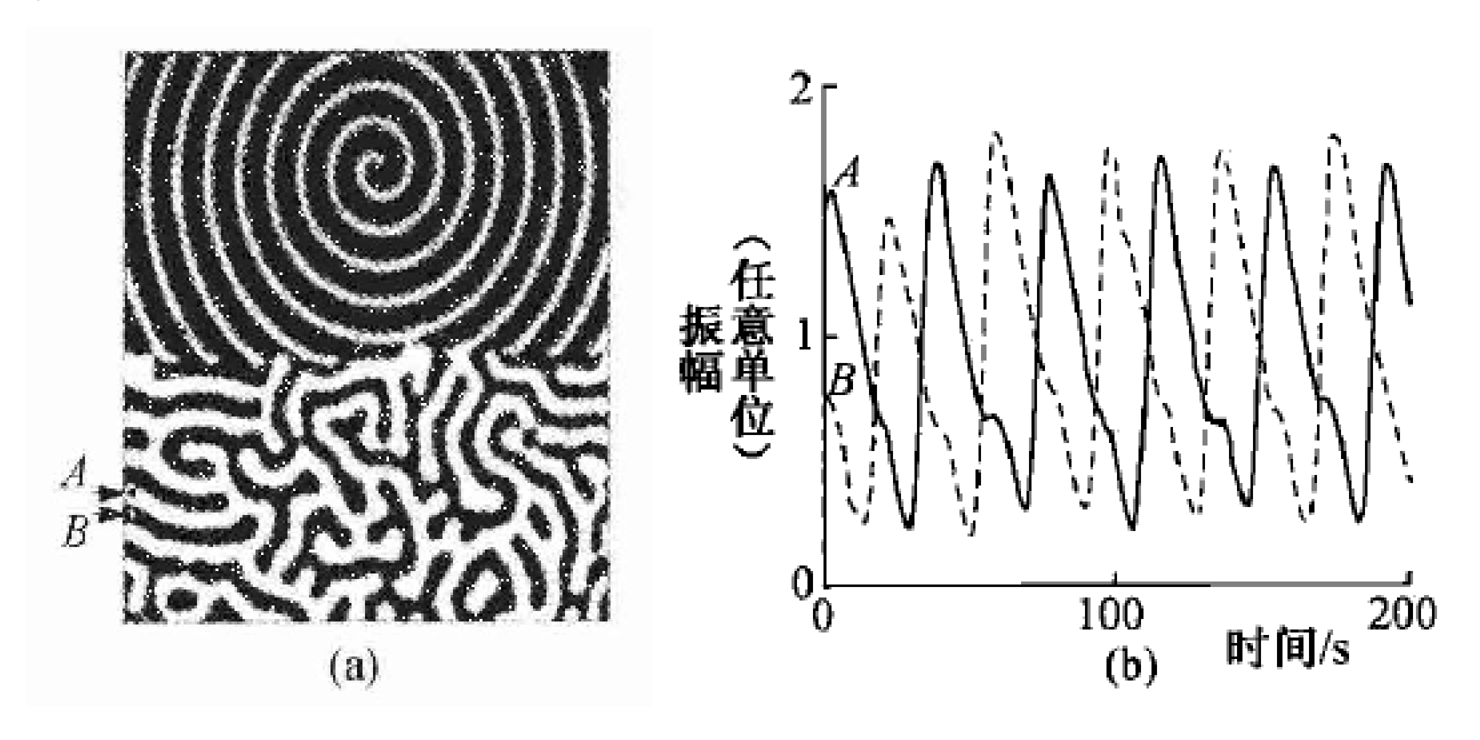


图 13.3　化学法拉第斑图的相图

当变换扰动频率时,从实验中可以观察到一系列共振斑图. 每一种斑图都有自己的锁相范围. 图 13.4 表示了当 $f_p/f_0=1,3/2,2$ 和 3 时的锁相斑图形态. 其中 f_p 是外力扰动频率,f_0 是系统的霍普夫本征频率. 在 1∶1 频率范围,整个系统与扰动同相,观察到的是空间均匀的振荡态. 当 f_p 增加到一定值时,系统不再与扰动同相,观察到的是类似于气泡状的斑图(见图 13.4). 从整体上看"气泡"的出现和消失看起来是无序的,但对每个空间点的振荡做傅里叶分析发现,它们的峰值是 $f_p/3$ 的整数倍,表明系统有3∶2共振.

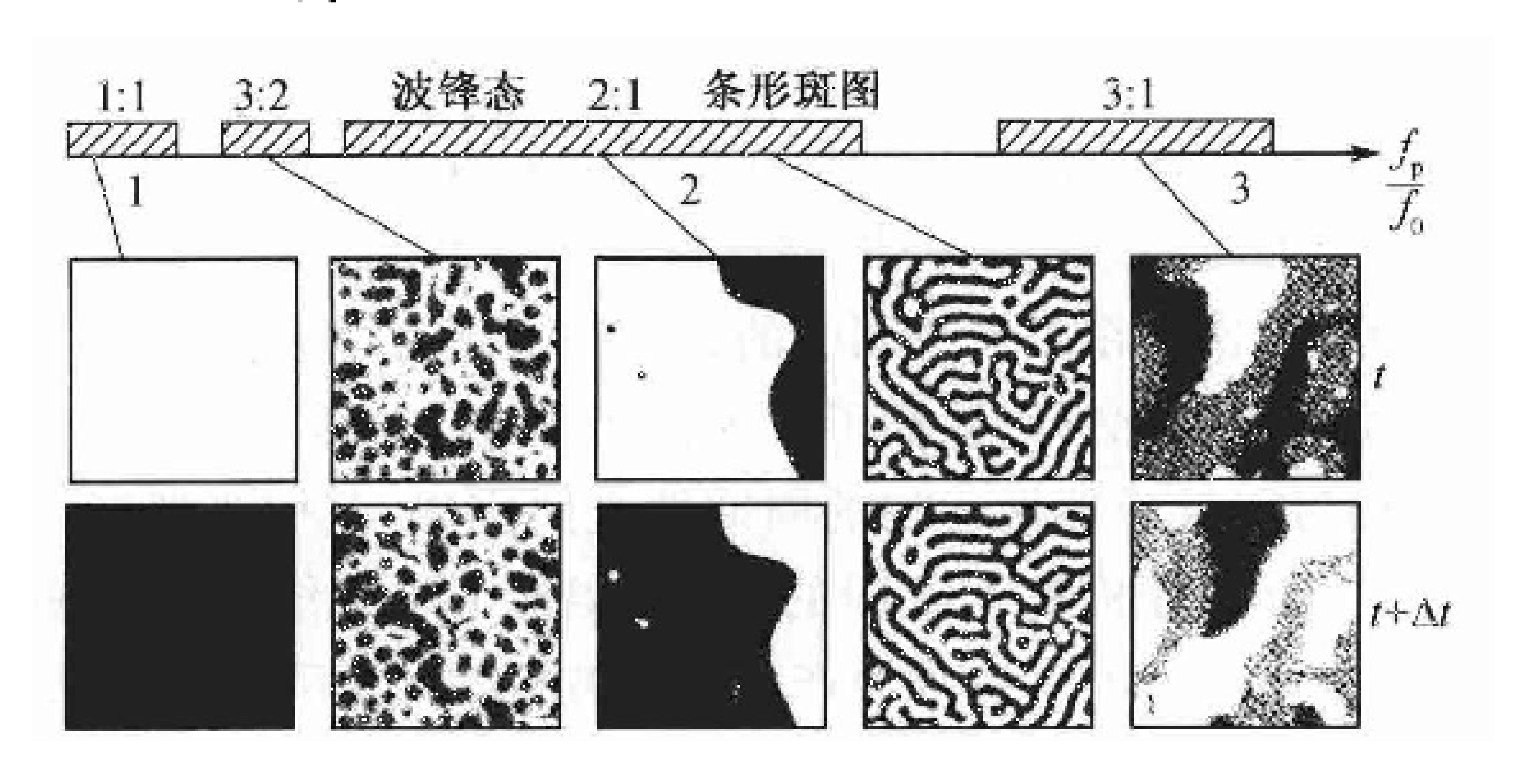


图 13.4　化学法拉第斑图的相图

系统与干扰有 2∶1 共振时,可以观察到两类图案. 在 $f_p/f_0<1.9\pm0.1$ 时,斑图的形态是双稳型的:一条稳定态的波锋线将两个相位相反的均匀态分开. 此类斑图是双稳系统中存在的典型图纹. 波锋线的形状与反应物浓度无关,取决于系统的初始条件. 这种状态在一定条件下可能会经历非平衡伊

辛-布洛赫相变或横向失稳而产生定态或时空斑图. 当 $f_p/f_0>1.9\pm0.1$ 时，条状法拉第图纹出现. 在§11.2 曾经提到，对于 BZ 反应系统，方程(13.3.5)中的 $\beta_i<0$. 在这种情况下，根据式(13.3.9)预计，法拉第斑图的产生应该在调制频率 $\nu<0$ 时发生，这一点在实验中得到了证实. 值得注意的是，由双稳态图纹到条状法拉第图纹的过渡过程类似于双稳系统中的伊辛-布洛赫相变. 这进一步表明在 2∶1 共振区，BZ 反应类似于双稳系统. 两个状态分别对应于 $A\cos(\omega t+\varphi)$ 与 $-A\cos(\omega t+\varphi)$. 与上两节的分析一致.

在 3∶1 共振区的斑图有三种状态，三种状态的振荡形式相同，但存在 $2\pi/3$ 的相位差(见图 13.4). 另外在图 13.4 的分岔图上存在着一些空缺，在这些区域内没有实验数据证明系统与外力扰动发生共振. 原因可能是系统在 $f_p/f_0=m:n$ 上锁频，但 m 和 n 的数值太大，以至于现有的实验数据无法辨认. 需要更高信噪比的实验去区分这些空缺区域的动力学行为.

化学法拉第斑图的实验是在反应扩散系统中构造准晶态的理想场所. 本书在§9.5 的末尾讨论了准晶态形成的必要条件，即具有不同波数的两组波矢必须形成空间共振(见图9.13). 到目前为止，人们还不知道系统能否自发地，在诸多可能的空间共振关系中选择满足准晶态的共振关系. 所以在反应扩散系统中经图灵分岔获得准晶态有相当的难度. 在化学法拉第斑图实验中，这个难点可以很容易地得到解决，原因是法拉第斑图的波长唯一地由外力的振荡频率决定. 在实验中只要在系统上加上两个频率的外力，并调节这两个频率的大小，使得它们对应的斑图波长满足符合准晶态形成的共振关系. 这个思想已经在流体实验中获得成功.

参 考 文 献

[1] Nicolis G. Introduction to nonlinear sciences. Cambridge University Press,1995.

[2] Strogacz S. Nonlinear dynamics and chaos, with application to physics, biology, chemistry and engineering. Perseus Publishing, Cambridge,2000.

[3] 赵凯华,朱照宣,黄畇：非线性物理导论. 北京：北京大学出版社,1992.

[4] Manneville P. Dissipative structures, chaos, and turbulence. Academic Press,1990.

[5] Guhenheimer J, Holms P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of verctor fields. Springer-Verleg,1983.

[6] Andronov A, Vitt A, Khaikin C. Theory of oscillators. Pergamon, Oxford,1966.

[7] Thompson M. Instabilities and catastrophes in science and engineering. Wiley, Chichester,1982.

[8] Walgraef A, Dewel G, Porckman P. Adv. Chem. Phys., 1982,49: 331.

[9] Libchaber A, Laroche C, Fauve S J. Physique Lett., 1982,43: L211.

[10] Glansdorff A, Prigogine I. Thermodynamics of structure, stability, and fluctuation. Wiley-InterScience, New York,1971.

[11] Nicolis G, Prigogine I. Self-organization in nonequilibrium systems. John Viley & Son, 1977.

[12] Bray W C. J. Am. Chem. Soc., 1921,493: 1262.

[13] Belousov B. Sbornik Referatov. Po. Radiaconi Medicine, 1958,1: 45.

[14] Field R, Körös E, Noyes R. J. Am. Chem. Soc., 1972,94: 8649.

[15] Li F, Long T, Lu Y, Ouyang Q, Tang C. Proc. Natl. Acad. Sci., 2004,101: 4781.

[16] Albert R, Jeong H, Barabási A-L. Nature, 2000,406: 378.

[17] Ihmels J, Friedlander G, Bergmann S, Sarig O, Ziv Y, Barkai N. Nature Genetics, 2002,31: 370.

[18] Lorenz E. J. Atoms. Sci., 1963,20: 130.

[19] May R. Stability and complexity in model ecosystems, 2nd ed. Princeton University Press,1975.

[20] May R. Theoretical ecology, principles and applications, 2nd ed. Blackwell Scientific Publications, Oxford,1981.

[21] Mackey M, Glass L. Science, 1977,197: 287.

[22] MiKhailov A, Hess B. J. Phys. Chem., 1996,100: 19059.

[23] Haken H. Synergetics. Springer, Berlin, 1983.
[24] Hanson F E. Federation Proc., 1978, 37: 2158.
[25] Griffith J. Mathematical neurobiology. Academic Press, New York, 1971.
[26] Chance B, Pye E, Ghosh A, Hess B. Biological and biochemical oscillators. Academic Press, New York, 1973.
[27] Goldbeter A. Mathematical models in molecular and cellular biology. Cambridge University Press, 1980.
[28] Rossler O. Phys. Lett. A, 1976, 57: 397.
[29] Strange P, Mikhailov A, Hess B. J. Phys. Chem., 1998, 102: 6273.
[30] Landau L, Lifshitz E. Statistical physics. Pergamon, Oxford, 1959.
[31] Thom R. Stabilité structurelle et morphogénèse. Benjamin, New York, 1962.
[32] Broer H, Dumortier F. Structures in dynamics. North Holland, Amsterdam, 1991.
[33] Gaspard P. J. Phys. Chem., 1990, 94: 1.
[34] Cross M, Hohenberg P. rev. Mod. Phys., 1993, 65: 851.
[35] Tritton D. Physical fluid dynamics, 2nd ed. Oxford Press, New York, 1992.
[36] Swinney H, Collub J. Hydrodynamic instabilities and the transition to turbulence. Springer, Berlin, 1981.
[37] Murray J. Mathematical biology. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
[38] Ammelt E, Astrov Y, Purwins H.-G. Phys. Rev. E., 1998, 58: 7109.
[39] Klaussmeier C. Science, 1999, 284: 1826.
[40] Mendez V. Phys. Rev. E., 1998, 57: 3622.
[41] Mendez V, Lebot J. Phys. Rev. E., 1997, 56: 6557.
[42] Fort J, Mendez V. Phys. Rev. E., 1999, 60: 5894.
[43] Lengyel I, Epstein I. Science, 1991, 251: 650.
[44] Gaspar V, Showalter K. J. Phys. Chem., 1990, 94: 4973.
[45] Tam W, Vastano J, Swinney H, Horsthemke W. Phys. Rev. Lett., 1988, 62: 2163.
[46] Castets V, Dulos E, Boissonade J, De Kepper P. Phys. Rev. Lett., 1990, 94: 2953.
[47] Ouyang Q, Swinney H. Nature, 1991, 352: 610.
[48] Belmonte A, Ouyang Q, Flesselles J-M. J. Phys. II, France., 1997, 7: 1425.
[49] Li G, Ouyang Q, Petrov V, Swinney H. Phys. Rev. Lett., 1996, 77: 2015.
[50] Ouyang Q, Swinney H. Chaos, 1991, 1: 411.
[51] Ouyang Q, Flesselles J-M. Nature, 1996, 379: 143.
[52] Turing A. Phil. R. Soc. London Ser. B, 1952, 327: 37.
[53] Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
[54] Duffet V, Boissonade J. J. Chem. Phys., 1992, 96: 664.

[55] Jensen O, Pannbacker V, Dewel G, Borckmans P. Phys. Lett. A, 1993,179: 91.
[56] Newell A, Whitehead J. J. Fluid Mech. , 1969,38: 279.
[57] Segel L. J. Fluid Mech. , 1969,38: 203.
[58] Eckhaus W. Studies in Nonlinear Stability Theory. Springer, Berlin,1965.
[59] Busse F. Rep. Prog. Phys. , 1978,41: 1929.
[60] Gunaratne G, Ouyang Q, Swinney H. Phys. Rev. E. , 1994,50: 2802.
[61] Swift B, Hohenberg P. Phys. Rev. A, 1977,15: 319.
[62] Zhou C, Guo H, Ouyang Q. Phys. Rev. E. , 2002,65: 036118.
[63] Frisch T, Sonnino G. Phys. Rev. E. , 1995,51: 1169.
[64] Kapral R, Showalter K. Chemical waves and patterns. Kluwer Academic, Dordrecht,1995.
[65] Arnold A, Showalter K, Tyson J. J. Chem. Educ. , 1987,64: 740.
[66] Hodgkin A, Huxley A. J. Physiol. , 1952,117: 500.
[67] Gross J, Trevan D. J. Cell. Sci. , 1976,22: 645.
[68] Murray J, Stanley E, Brown D. Proc. Roy. Soc. London, 1986,229: 111.
[69] Carey A, Giles R J, McLen R. Am. J. Trop. Med. Hyg. , 1978,27: 573.
[70] Burton W, Cabrera N, Frank F. Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1951,243: 299.
[71] Tyson J, Keener J. Physica D. , 1987,29: 215.
[72] Newell A, Moloney J. Nonlinear Optics. Addiotn-Wesley Reading, MA,1992.
[73] Hynne F, Sorensen P, Nielsen K. J. Chem. Phys. , 1990,92: 1747.
[74] Hynne F, Sorensen P. Phys. Rev. E. , 1993,40: 4106.
[75] Hynne F, Sorensen P, MollerT. J. Chem. Phys. , 1998,98: 219.
[76] Vukojevic V, Sorensen P, Hynne F. J. Phys. Chem. , 1993,97: 4091.
[77] Winfree A. Science, 1973,181: 973.
[78] Barkley D, Kness M, Tuckerman L. Phys. Rev. A, 1990,42: 740.
[79] Barkley D. Physica D, 1991,49: 61.
[80] Barkley D. Phys. Rev. Lett. , 1992,68: 2090.
[81] Barkley D. Phys. Rev. Lett. , 1994,72: 164.
[82] FitzHugh R. Biophys. J. , 1961,1: 445.
[83] Nagumo J, Arimoto S, Yoshizawa S. Proc. IRE, 1962,50: 2061.
[84] Skinner G, Swinney H. Physica D, 1991,48: 1.
[85] Bar M, Hilderbrand M, Eiswirth M, Faiche M, Engel H, Neufeld M. Chaos, 1994,4: 499.
[86] Ouyang Q, Swinney H, Li G. Phys. Rev. Lett. , 2000,84: 1047.
[87] Pearson J. Science, 1993,261: 189.
[88] Hagberg A, Meron E. Phys. Rev. Lett. , 1994,72: 2494.
[89] Hagberg A, Meron E. Chaos, 1994,4: 477.

[90] Elphick C，Hagberg A，Meron E. Phys. Rev. E.，1995，51：3052.
[91] Hagberg A，Meron，Rubinstein I E，Zaltzman B. Phys. Rev. Lett.，1996，76：427.
[92] Hagberg A，Meron E. Phys. Rev. Lett.，1997，78：1166.
[93] Coullet P，Lega J，Houchmanzadeh B，Lajzerowicz J. Phys. Rev. Lett.，1990，65：1352.
[94] Lee K，McCormick W，Ouyang Q，Swinney H. Science，1993，261：192.
[95] Lee K，McCormick W，Pearson J，Swinney H. Nature，1994，369：215.
[96] Coullet P，Emilsson K. Physica D，1992，61：119.
[97] Petrov V，Ouyang Q，Swinney H. Nature，1997，388：655.